

FÍSICA 2: FONAMENTS D'ELECTROMAGNETISME

1. CAMP ELÈCTRIC I POTENCIAL

1.1 Introducció

Les forces electromagnètiques són predominants a la naturalesa a partir de l'escala de l'àtom (reaccions químiques, interaccions moleculars, etc.) i per tant dominen des de l'estructura dels sòlids fins a fenòmens de transport, fregament (combinació entre forces gravitatòries i electromagnètiques), la major part dels processos biològics, etc. També són responsables de la radiació electromagnètica: les ones de ràdio, infrarroigs, llum visible, ultravioleta, raigs X, còsmics, etc. Només l'existència de càrregues elèctriques de signe oposat fa possible la neutralitat electromagnètica (apantallament) i porta a que la força gravitatòria domini a gran escala. L'Univers és elèctricament neutre.

Les primeres experiències d'atracció electromagnètica a l'antiguitat consisteixen en fenòmens macroscòpics: l'ambre fregat atrau la palla, el vidre repel·leix la seda i la magnetita atrau el ferro. Actualment la major part de la tecnologia es basa en les interaccions electromagnètiques: generació d'electricitat, telecomunicacions, aparells de mesura, etc.

Concepte de **càrrega elèctrica**: propietat intrínseca d'algunes partícules de la naturalesa que crea i està sotmesa a les interaccions electromagnètiques. En un principi es tracta l'electricitat i el magnetisme com a fenòmens independents però a principis de segle XIX s'observen relacions entre ambdós fenòmens (inducció electromagnètica), fins que finalment s'estableixen formalment les 4 equacions de Maxwell de l'electromagnetisme. El descobriment de l'electró, per J. J. Thompson el 1887, du a la **quantització de la càrrega** per R. Milikan el 1910, que estableix l'existència d'una càrrega elemental e , de manera que qualsevol càrrega serà múltiple d'ella, amb signe positiu o negatiu: $Q = \pm Ne$ (Els quarks, partícules que conformen els protons i neutrons, tenen terços de càrrega e però no s'han observat de manera aïllada). L'experiència ens diu que càrregues de signe diferent s'atrauen i de mateix signe es repel·leixen. En el **Sistema Internacional d'unitats** (d'ara en endavant S.I.) la càrrega s'expressa en Coulombs (C). Així, $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C.

S'estableix el principi de **conservació de la càrrega**: Si definim un sistema aïllat com aquell que no permet la transferència de càrrega amb el seu entorn, podem afirmar que la càrrega neta de qualsevol sistema aïllat es conserva. Per tant, com que l'Univers és un sistema aïllat per definició, la seva càrrega es transforma. La **figura 1.1** mostra exemples de transferència i conservació de càrrega entre dos sistemes: Suposem que inicialment tenim dos sistemes aïllats, A i B, idèntics excepte en el fet que tenen càrregues netes $Q_A = Q > 0$ i $Q_B = 0$ [Fig. 1.1(i)]. Si els posem en contacte de manera que permetem la transferència lliure de càrrega entre A i B, les forces d'atracció i repulsió entre càrregues provocaran un moviment de càrrega entre els dos sistemes tal que, d'acord amb el principi de conservació de càrrega, la nova distribució de càrrega d'*equilibri* (aquella que minimitza el fenomen d'atracció/repulsió) en cadascun dels sistemes serà $Q/2$: $Q_A + Q_B = Q$ [Fig. 1.1(ii)]. Cal notar que, depenent de la naturalesa del material, la transferència podrà ser de càrrega positiva $Q/2$ de A a B o de càrrega negativa $-Q/2$ de B a A.

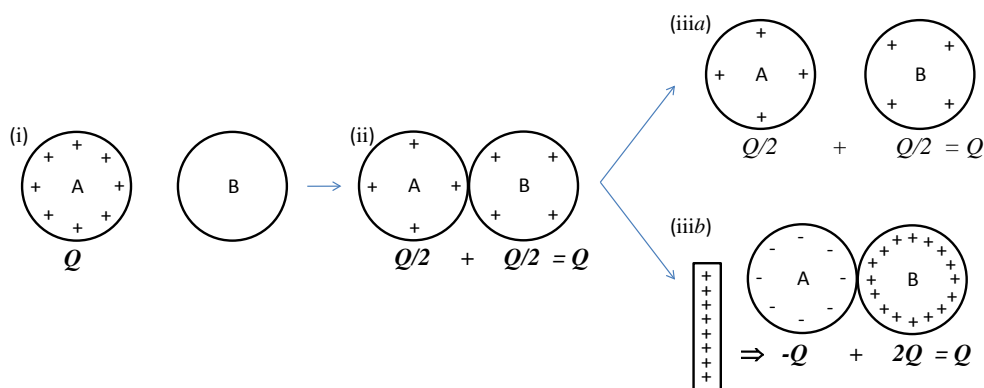


Fig. 1.1. Exemples del principi de conservació de càrrega.

Si en aquest nou estat (ii) separem els sistemes, cadascun romandrà amb la nova càrrega d'equilibri $Q/2$ [Fig. 1.1(iii*a*)]. Si en comptes d'això, en la configuració (ii) apropem (però mantenint aïllat) un altre sistema carregat de manera que imposa una càrrega $-Q$ a A per fenòmen d'atracció, el principi de conservació de càrrega ens diu que la redistribució de càrregues farà que la càrrega neta a B sigui $2Q$ [Fig. 1.1(iii*b*)].

1.2 Llei de Coulomb

Acabem de veure fenòmens de transferència de càrrega, és a dir, que involucren moviment de càrrega. Això implica l'existència d'una força elèctrica, atractiva o repulsiva. Aquesta ve donada per la Llei de Coulomb, segons la qual la força que fa una càrrega **puntual** (amb dimensió espacial nula) q_1 sobre una altra càrrega **puntual** q_2 que es troba a una distància $r_{1 \rightarrow 2}$ es pot expressar com:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = k \frac{q_1 q_2}{r_{1 \rightarrow 2}^3} \vec{r}_{1 \rightarrow 2} = k \frac{q_1 q_2}{r_{1 \rightarrow 2}^2} \hat{r}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{eq. (1.1)}$$

on k s'anomena Constant de Coulomb [$k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 8.99 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$] i $\vec{r}_{1 \rightarrow 2}$ és el vector que surt de q_1 i acaba a q_2 , i $\hat{r}_{1 \rightarrow 2} = \vec{r}_{1 \rightarrow 2} / r_{1 \rightarrow 2}$ és el vector unitat que uneix aquests dos punts, amb $r_{1 \rightarrow 2}$ essent el seu mòdul (distància). Aquesta expressió és anàloga a la gravitatòria ja que té una dependència espacial d' $1/r^2$ (que és de llarg abast ja que s'anula quan $r \rightarrow \infty$) i és proporcional a la magnitud de les dues partícules que interactuen, però amb la diferència que pot ser repulsiva pel doble signe de càrrega (en canvi la massa és una magnitud sempre positiva). D'acord amb l'eq. (1.1), la força de Coulomb que fa q_1 sobre q_2 va en la direcció i sentit del vector que va de q_1 a q_2 . Per tant, la força de Coulomb que fa q_2 sobre q_1 tindrà el mateix mòdul i direcció, i sentit contrari, tal com explica la figura 1.2:

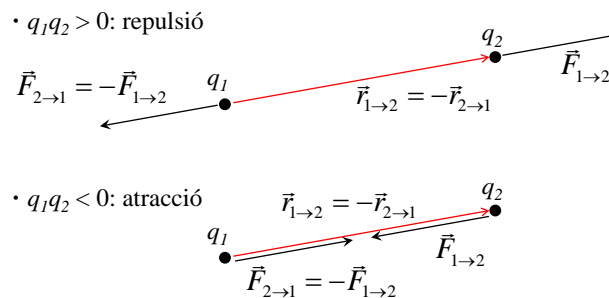


Fig. 1.2. Caràcter vectorial de la Força de Coulomb.

Si fem una **comparació** entre els mòduls de la força **gravitatòria** i força **elèctrica** entre dos protons:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{ke^2 / r^2}{Gm_p / r^2} = \frac{ke^2}{Gm_p^2} = \frac{8.99 \cdot 10^9 \cdot (1.60 \cdot 10^{-19})^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot (1.67 \cdot 10^{-27})^2} = 1.24 \cdot 10^{36}$$

o entre la força gravitatòria entre la seda fregada ($m \sim 0.1\text{g}$) i la Terra, i força elèctrica seda-paper (, típica transferència al fregar de $Q \sim 10\text{-}100\text{nC}$, $r \sim 10\text{cm}$):

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{kQ^2 / r}{mg} = \frac{8.99 \cdot 10^9 \cdot (100 \cdot 10^{-9})^2 / 0.1^2}{9.81 \cdot 10^{-4}} = 0.916 \cdot 10^{-9} \cdot 10^4 \cdot 10^2 \cdot 10^4 \sim 9 > 1$$

veiem que efectivament, en absència de neutralitat elèctrica, la força elèctrica és típicament molt més gran que la gravitatòria (la força elèctrica d'un tros de paper carregat és capaç de vèncer la força gravitatòria que fa tota la Terra sobre un tros de seda!).

1.3 Camp elèctric. Electrostatica. Principi de superposició

Com s'ha vist, la força de Coulomb no necessita el contacte entre les dues càrregues que interactuen, sinó

que fan una acció a distància. Per això s'introdueix el concepte de camp elèctric \vec{E} , que és un camp vectorial (funció que adjudica un vector a cada punt de l'espai) que fa de mitjancer entre la càrrega i la força elèctrica, i es defineix com la força per unitat de càrrega. Per tant, el camp creat per una càrrega q_1 en un punt P de l'espai és:

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{F}_{1 \rightarrow 2}}{q_2} = k \frac{q_1}{r_{i \rightarrow P}^2} \hat{r}_{i \rightarrow P} \quad \text{eq. (1.2)}$$

on el punt P és el punt on volem calcular el camp degut a la càrrega q_1 . Així, una càrrega crea un camp a tot l'espai de manera que si situem una segona càrrega q_2 en el punt P , aquesta rebrà una força $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \vec{E}_1$ (i així recuperem l'eq. 1.1). En aquest capítol tractarem fenòmens d'**electrostàtica**, que són aquells que tenen lloc en camps elèctrics constants en el temps: $d\vec{E}/dt = 0$.

En presència de vèries càrregues puntuals (distribució discreta de càrregues), el camp resultant de totes elles en qualsevol punt P es pot calcular com la suma dels camps creats per cadascuna d'elles en aquell punt (**principi de superposició**):

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i k \frac{q_i}{r_{i \rightarrow P}^2} \hat{r}_{i \rightarrow P} \quad \text{eq. (1.3)}$$

Si aleshores situem una càrrega externa q en aquell punt, la força resultant es podrà calcular aïllant-la de l'eq. 1.2, que serà equivalent a calcular-la com la suma de forces de cadascuna de les càrregues de la distribució sobre la càrrega externa q :

$$\vec{F} = q\vec{E} = q \sum_i k \frac{q_i}{r_{i \rightarrow P}^2} \hat{r}_{i \rightarrow P} = \sum_i k \frac{q_i q}{r_{i \rightarrow P}^2} \hat{r}_{i \rightarrow P} = \sum_i \vec{F}_i \quad \text{eq. (1.4)}$$

1.4 Distribucions contínues de càrrega

A vegades, la geometria de la càrrega no permet l'aproximació de càrrega puntual i és més adient considerar-la com una distribució contínua d'elements infinitessimals (diferencials) de càrrega dq . Llavors considerarem que cada diferencial de càrrega dq actua com una càrrega puntual que crea un diferencial de camp al seu voltant d'acord amb la llei de Coulomb. Llavors obtindrem el camp total aplicant el principi de superposició per tots els dq que constitueixen la distribució contínua. Per sumar elements diferencials, el sumatori de l'eq. 1.3 es converteix en una integral:

$$d\vec{E} = k \frac{dq}{r^2} \hat{r} \rightarrow \vec{E} = \int d\vec{E} = \int k \frac{dq}{r^2} \hat{r} \quad \text{eq. (1.5)}$$

En funció de la dimensionalitat de la distribució parlarem de distribucions volúmiques (3-dimensional), superficials (2-d) o lineals (1-d), i estaran caracteritzades per densitats de càrrega volúmiques ρ , superficials σ i lineals λ respectivament, definides com la quantitat de càrrega per unitat de volum, superfície i longitud respectivament. Per tant, matemàticament podrem escriure els dq com el producte entre la densitat de càrrega i el diferencial d'espai en el que es troba. Introduint l'expressió corresponent dins l'eq. 1.5 obtenim, pels diferents casos:

· Distribució volúmica:

$$dq = \rho d^3 r' \rightarrow \vec{E} = k \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r'; \quad \text{eq. (1.6)}$$

· Distribució superficial:

$$dq = \sigma d^2 r' \rightarrow \vec{E} = k \int \frac{\sigma(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^2 r'; \quad \text{eq. (1.7)}$$

· Distribució lineal:

$$dq = \lambda dr' \rightarrow \vec{E} = k \int \frac{\lambda(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dr'; \quad \text{eq. (1.8)}$$

on en les equacions anteriors hem anomenat \vec{r}' al vector posició de la distribució de càrrega i $\vec{r} - \vec{r}'$ és el vector que va des d'un diferencial de càrrega dq fins al punt P on volem calcular el camp. La figura 1.3 mostra la configuració d'aquesta notació:

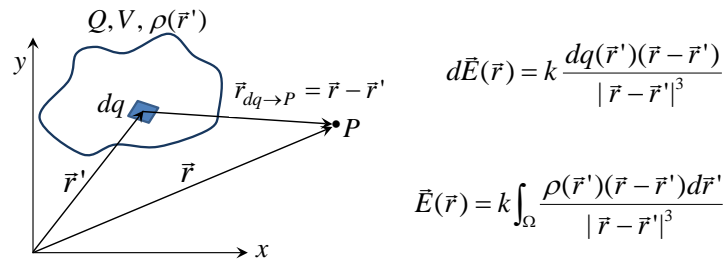


Fig. 1.3. Distribució contínua de càrrega.

En els següents requadres es mostren alguns exemples del càlcul integral del camp elèctric creat per distribucions contínues de càrregues senzilles.

A. CÀLCUL DEL CAMP ELÈCTRIC MITJANÇANT LA LLEI DE COULOMB

A1 - Línia de Càrrega – Fil carregat amb càrrega Q , de longitud L , amb densitat lineal de càrrega λ : $Q = \lambda L \rightarrow dq = \lambda dx$

· Camp en un punt qualsevol:

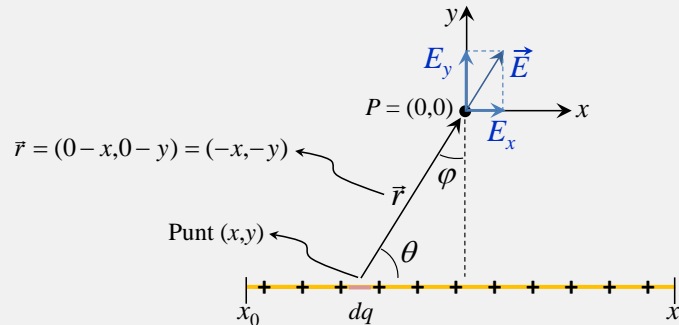


Fig. 1.4. Fil finit/infinit. Resolució mitjançant definició de camp elèctric.

$$\vec{E} = \int_{x_0}^{x_1} k \frac{dq(-x\hat{i} - y\hat{j})}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \int_{x_0}^{x_1} k \frac{\lambda(-x dx \hat{i} - y dx \hat{j})}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = k\lambda \left[\left(\frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \right)_{x_0}^{x_1} \hat{i} + \left(\frac{-x}{y(x^2 + y^2)^{1/2}} \right)_{x_0}^{x_1} \hat{j} \right] =$$

$$= k\lambda \left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \hat{i} - \left(\frac{\cot \theta_1}{r_1} - \frac{\cot \theta_0}{r_0} \right) \hat{j} \right] = \frac{k\lambda}{y} [(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_0) \hat{i} - (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0) \hat{j}] \quad \text{eq. (1.8)}$$

on hem utilitzat $dq = \lambda dx$ i hem situat l'origen dels eixos de coordenades al punt P on volem calcular el camp.

· Camp fil finit, P a la mediatriu: $x_0 = -L/2$; $x_1 = L/2$

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \int_{-L/2}^{L/2} k \frac{dq(-x\hat{i} - y\hat{j})}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \int_{-L/2}^{L/2} k \frac{\lambda(-xdx\hat{i} - ydx\hat{j})}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \\
&= k\lambda \left[\underbrace{\left(\frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \right)_{-L/2}^{L/2}}_{=0} \hat{i} + \left(\frac{-x}{y(x^2 + y^2)^{1/2}} \right)_{-L/2}^{L/2} \hat{j} \right] = k\lambda \left(\frac{-x}{y(x^2 + y^2)^{1/2}} \right)_{-L/2}^{L/2} \hat{j} = \\
&= \frac{-k\lambda}{\left((L/2)^2 + y^2 \right)^{1/2}} \left(\frac{L/2 - (-L/2)}{y} \right) \hat{j} = \frac{-k\lambda L}{y \left((L/2)^2 + y^2 \right)^{1/2}} \hat{j} \underset{y=R}{=} \frac{k\lambda L}{R \left((L/2)^2 + R^2 \right)^{1/2}} \hat{j} = \\
&= \frac{kQ}{R \left((L/2)^2 + R^2 \right)^{1/2}} \hat{j}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

· Camp fil finit, P a l'eix x: $x_0 = -L-D$; $x_1 = -D$; $y=0$

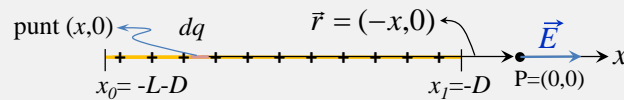


Fig. 1.5. Fil finit carregat, camp a l'eix.

Recuperem eq. (1.8) o bé:

$$\vec{E} = \int_{x_0}^{x_1} k \frac{dq(-x\hat{i})}{|x|^3} = \int_{x_0}^{x_1} k \frac{dq(x\hat{i})}{x^3} = \int_{x_0}^{x_1} k\lambda \frac{dx\hat{i}}{x^2} = -k\lambda \left(\frac{1}{x} \right)_{x_0}^{x_1} \hat{i} = k\lambda \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{L+D} \right) \hat{i} \tag{1.10}$$

Alerta els signes: Per a la primera igualtat, hem de fer explícit el valor absolut del mòdul i tenir en compte que en el nostre cas $x < 0$, d'acord amb la fig. 1.5. Recordar: $(x^2)^{3/2} = |x|^3$ ó introduir la funció sign(x):

$$\text{sign}(x) \equiv \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \rightarrow |x| = x \text{sign}(x) \rightarrow \vec{E} = \int_{x_0}^{x_1} k \frac{dq(-x\hat{i})}{|x|^3} = \int_{x_0}^{x_1} k \frac{dq(-x\hat{i})}{x^3} \text{sign}(x) = \dots$$

· Camp Fil infinit: $x_0 \rightarrow \infty$, $x_1 \rightarrow \infty$:

$$\vec{E} = k\lambda \left[\left(\frac{-1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \right)_{-\infty}^{\infty} \hat{i} + \left(\frac{x}{y(x^2 + y^2)^{1/2}} \right)_{-\infty}^{\infty} \hat{j} \right] = \frac{k\lambda(1 - (-1))}{y} \hat{j} = \frac{2k\lambda}{y} \hat{j} \tag{1.11}$$

on hem utilitzat $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \pm 1$.

A2 - Anell carregat: Densitat lineal de càrrega λ . Veure figura 1.6.

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \int k \frac{dq(x\hat{i} - R\sin\phi\hat{j} + R\cos\phi\hat{k})}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \int_0^{2\pi} k \frac{\lambda R d\phi (x\hat{i} - R\sin\phi\hat{j} + R\cos\phi\hat{k})}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \\
&= \frac{k\lambda R x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \left(\int_0^{2\pi} d\phi \hat{i} + R \int_0^{2\pi} (-\sin\phi\hat{j} + \cos\phi\hat{k}) \right) = \frac{k\lambda R x 2\pi}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{i} = \frac{\lambda R x}{2\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{i} = \\
&= \frac{kQx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{i}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

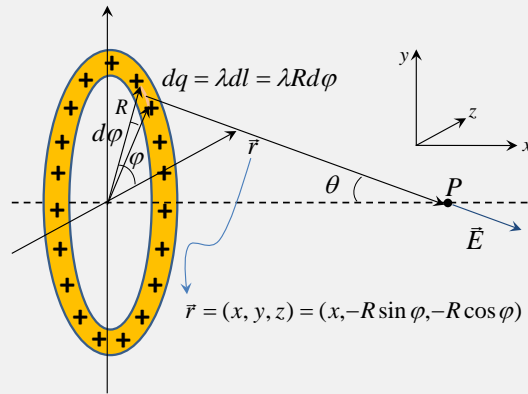


Fig. 1.6. Distribució anular de càrrega.

A3 - Disc carregat uniformement: Veure Fig. 1.7.

Recuperem resultat anterior. Ara l'interpretem com un dE degut a un dQ en un anell d'àrea $2\pi R dR$. Per tant, tenint en compte que té una densitat superficial de càrrega σ , podem escriure $dQ = 2\pi R dR \sigma$.

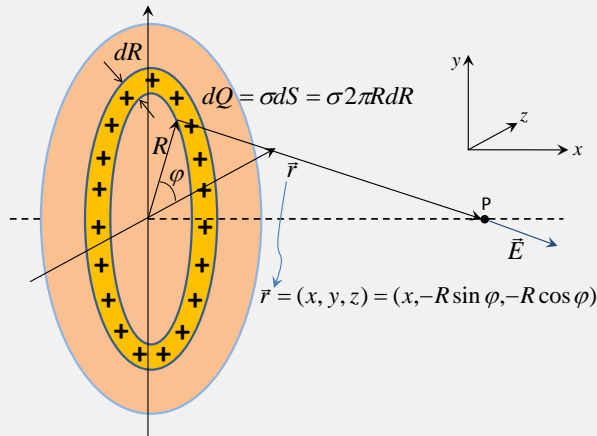


Fig. 1.7. Distribució superficial de càrrega en forma de disc.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \int \frac{xk dQ}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{i} = \int_0^R \frac{k\sigma x 2\pi R' dR'}{(x^2 + R'^2)^{3/2}} \hat{i} = 2\pi k\sigma x \int_0^R \frac{R' dR'}{(x^2 + R'^2)^{3/2}} \hat{i} = 2\pi k\sigma x \left(\frac{-1}{(x^2 + R'^2)^{1/2}} \right)_0^R \\ &= 2\pi k\sigma x \left(\frac{-1}{(x^2 + R^2)^{1/2}} + \frac{1}{(x^2)^{1/2}} \right) \hat{i} = \text{sign}(x) 2\pi k\sigma \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{R^2}{x^2}\right)^{1/2}} \right) \hat{i} \end{aligned} \quad \text{eq. (1.13)}$$

· Límit $x \rightarrow \infty$ (Punt P lluny del disc): Recuperem llei de Coulomb per càrrega puntual:

$$\begin{aligned} (1+a)^n &\approx 1+na \quad \forall |a| \ll 1 \rightarrow \left(1 + \frac{R^2}{x^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2} \rightarrow \\ \rightarrow \vec{E} &= \text{sign}(x) 2\pi k\sigma \left(1 - \left(1 - \frac{R^2}{2x^2}\right) \right) \hat{i} = \text{sign}(x) \frac{k\pi R^2 \sigma}{x^2} \hat{i} = \text{sign}(x) k \frac{Q}{x^2} \hat{i} \end{aligned} \quad \text{eq. (1.14)}$$

A4 - Pla infinit: Disc amb $R \rightarrow \infty$:

$$\vec{E} = \text{sign}(x) \lim_{R \rightarrow \infty} 2\pi k \sigma \left(1 - \frac{1}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right) \hat{t} = \text{sign}(x) 2\pi k \sigma \hat{t} = \text{sign}(x) \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{t} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{t} & x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{t} & x < 0 \end{cases} \quad \text{eq. (1.15)}$$

Notem que aquest resultat ens diu que un pla infinit fa un camp que és constant en tot l'espai, és a dir que no decau amb la distància (no depèn de x)!

1.5 Línies de camp

Hem vist com calcular el camp \vec{E} en qualsevol punt de l'espai a partir d'un conjunt de càrregues discretes o una distribució contínua de càrregues. Això, doncs, ens permet dibuixar en qualsevol punt el vector camp. També pot ser interessant fer-nos una idea global del camp \vec{E} a tot l'espai, però omplir l'espai de vectors pot ser molt ferragós a nivell visual. En comptes d'això introduïm un concepte lleugerament diferent al camp vectorial E , que són les **línies de camp**, que són corbes tals que el camp és **tangent a cada punt** d'aquestes, de manera que les línies defineixen \vec{E} unívocament. Matemàticament (condició de triangles semblants), si és el vector director d'un diferencial de la corba "línia de camp" en un punt de l'espai, aleshores podem escriure:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) &= E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k} \\ d\vec{l}(x, y, z) &= dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k} \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{E} \parallel d\vec{l} \rightarrow \frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad \text{eq. (1.16)}$$

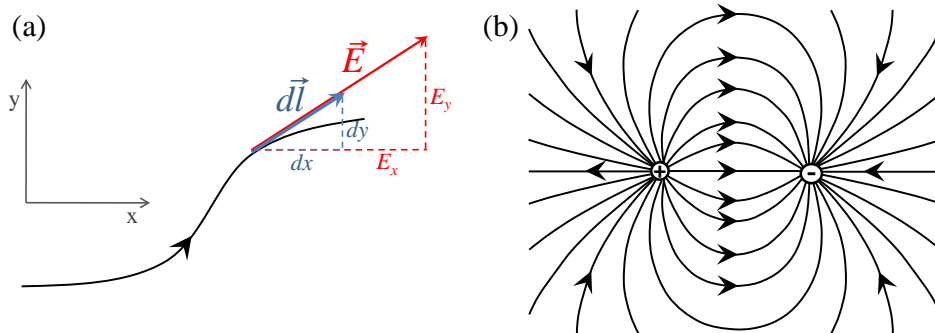


Fig. 1.8. (a) Condició de camp tangent a les línies de camp: Triangles semblants. (b) Línies de camp elèctric entre dues càrregues de signe oposat.

A cada línia de camp també se li associa un sentit (en el sentit més ampli del terme, no una direcció!). **Les línies de camp no es tallen mai.** Com que el camp és tangent a les línies de camp a cada punt, si aquestes es tallessin tindríem dos camps definits al mateix punt (diferents pendents)!

Les **línies de camp elèctric són obertes**; surten sempre de les càrregues positives o de l'infinit i acaben a l'infinit o en càrregues negatives (veure figura 1.8b). El nombre de línies que surten d'una càrrega positiva o entren en una negativa és proporcional a la càrrega. A més, degut a que en una càrrega puntual el camp és radial i els vectors radials se separen a mesura que la distància al centre augmenta, la densitat de línies de camp decreix amb la distància. Considerant que la superfície d'una esfera de radi r augmenta com r^2 , la densitat de línies (nombre de línies que atravessen una superfície dividit per la superfície) disminueix com r^2 , igual que el camp. Així, podem concloure que el valor del **camp elèctric és proporcional a la densitat de línies** de camp en cada punt.

1.6 Flux de camp elèctric i Llei de Gauss

1.6.1 Flux de camp elèctric

El flux de camp elèctric es defineix com el nombre de línies de camp \vec{E} que atravessen una superfície. La figura 1.9 il·lustra el fet que, d'acord amb aquesta definició, el flux és proporcional a l'àrea de la superfície, al camp elèctric i a la orientació entre ambdós. Per tant, matemàticament podem escriure:

$$\phi \equiv \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E dS \cos \theta \quad \text{eq. (1.17)}$$

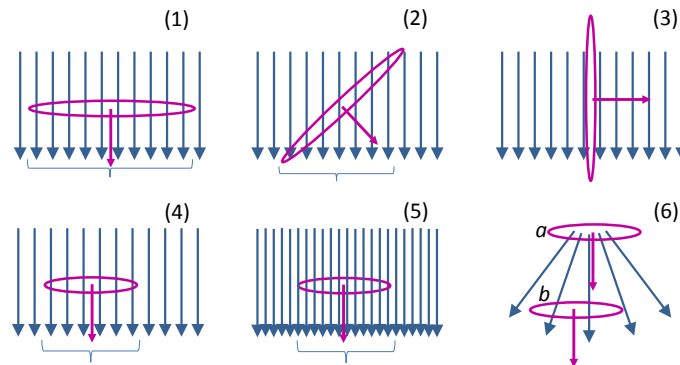


Fig. 1.9. Flux. Dependència amb orientació entre camp i superfície (1-3), àrea de superfície (1,4) i intensitat de camp (4-6).

1.6.2 Llei de Gauss

El Teorema de Gauss diu que el flux de camp elèctric a través d'una superfície tancada no depèn de la superfície sinó que és només proporcional a la càrrega interior neta a la superfície:

$$\phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \text{eq. (1.18)}$$

La figura 1.10 mostra que les línies de camp en superfícies que no tenen càrrega neta interior (verdes) entren a la superfície però després en tornen a sortir de manera que el flux és nul.

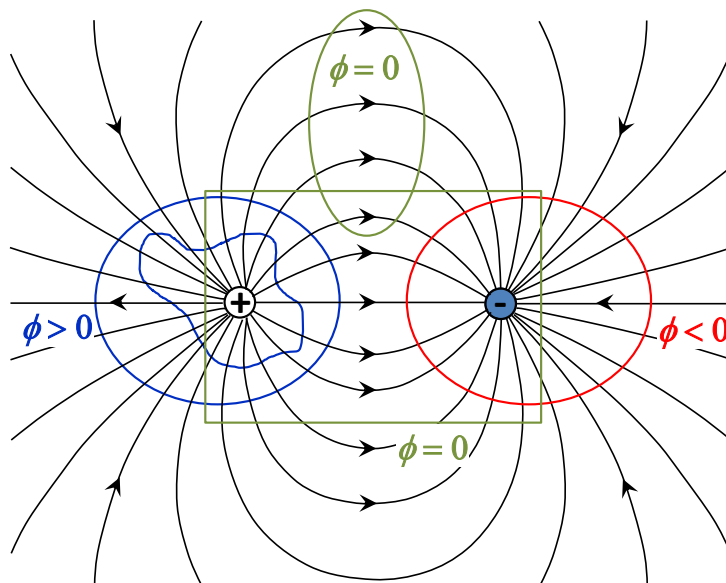


Fig. 1.10. Llei de Gauss en diferents superfícies en presència de dues càrregues puntuals de signe contrari.

Només aquelles superfícies que contenen càrrega interior neta no nula tenen un flux no nul (superfícies vermella i blaves). Les superfícies blaves mostren que el flux no depèn de la forma de la superfície sinó només de la càrrega interior. Les línies que entren a la superfície contribueixen negativament al flux i les que en surtin hi contribuïran positivament.

Tenint en compte el teorema matemàtic de la divergència podem obtenir la forma local del Teorema de Gauss:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Llei de Gauss :} \\ \text{Teorema de la divergència :} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho d^3r \\ \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \nabla \cdot \vec{E} d^3r \end{array} \rightarrow \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad \text{eq. (1.19)}$$

És important fer notar que el camp E es refereix al camp total, és a dir, el creat per totes les càrregues presents al sistema, interiors i exteriors a la superfície, però podem veure que només contribueixen al flux net les càrregues internes:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint \sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \sum_i \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \underbrace{\sum_{i=\text{int}} \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{S}}_{Q_{\text{int}} / \epsilon_0} + \underbrace{\sum_{i=\text{ext}} \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{S}}_{q_{\text{int}}=0} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Demostració del teorema de Gauss:

Introduïm el concepte d'**angle sòlid** Ω : superfície intersecció de con i esfera de radi 1. És l'equivalent tridimensional del concepte d'angle com a longitud d'arc d'una secció d'un cercle de radi 1. Si l'angle és igual a la longitud d'arc d'una secció d'un cercle dividit pel seu radi, l'angle sòlid és l'àrea d'una secció esfèrica d'u

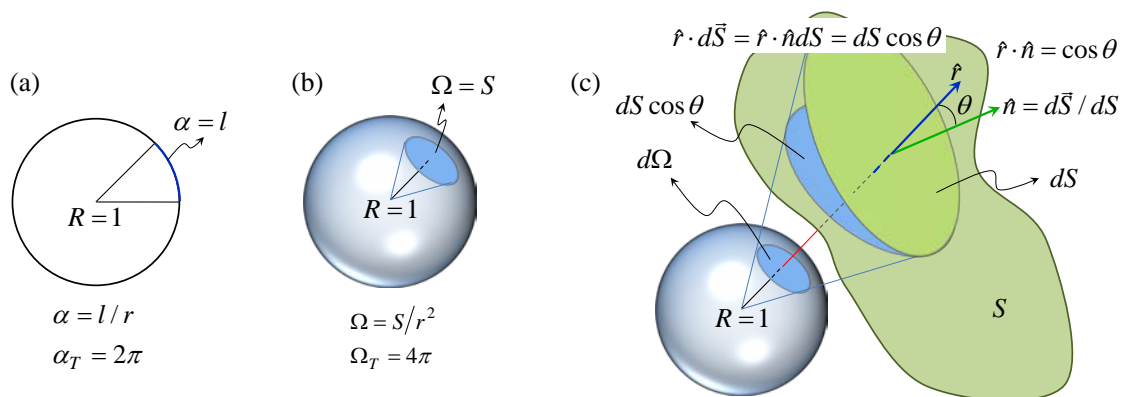


Fig. 1.11. (a) Angle. (b) angle sòlid. (c) Projectió d'un diferencial de superfície qualsevol sobre una esfera.

L'angle sòlid subtingut pel diferencial de superfície dS és la projecció d'aquesta superfície sobre una esfera dividit pel quadrat del radi de l'esfera:

$$d\Omega = \frac{dS \hat{n} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{dS \cos \theta}{r^2} \quad \text{eq. (1.20)}$$

Partint de la llei de Coulomb per càrregues puntuals:

$$\phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint k \frac{q \hat{r} \cdot dS \hat{n}}{r^2} = kq \oint \frac{dS \hat{r} \cdot \hat{n}}{r^2} = kq \oint d\Omega = kq 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Partint de la llei de Coulomb per quantitats infinitessimals de càrrega generant distribucions contínues:

$$\phi = \oint_S \left(\int_V \frac{k\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \cdot \hat{n}dS(\vec{r}) = \int_V k\rho(\vec{r}')d^3r' \underbrace{\oint_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \hat{n}dS(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}_{d\Omega} =$$

$$= k \int_V \underbrace{\rho(\vec{r}')d^3r'}_{dq} \underbrace{\oint_S \frac{d\Omega}{4\pi}}_{4\pi} = k4\pi Q_{\text{int}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

1.6.3 Càlcul de camp elèctric pel Teorema de Gauss

Abans hem vist com calcular el camp elèctric a partir de la llei de Coulomb i el principi de superposició, tant per distribucions discretes (càrregues puntuals) com per distribucions contínues (diferencials de càrrega). Per alguns casos amb prou simetria com per poder deduir la direcció i el sentit del camp elèctric, també podem utilitzar el teorema de Gauss per calcular-ne el mòdul. Amb aquest objectiu escollirem una superfície tancada d'acord amb les simetries del camp per facilitar-nos el càlcul.

Com a exemple, per una **càrrega puntual**, podem recuperar l'expressió per Coulomb si escollim com a superfície de Gauss una esfera centrada a la càrrega. El vector director de qualsevol diferencial de superfície d'aquesta esfera sempre serà radial i per tant paral·lel al camp elèctric de manera que podem escriure:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}; \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \stackrel{\vec{E} \parallel d\vec{S}}{=} \oint E dS = E \oint dS = ES = E4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \left(\Rightarrow k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)$$

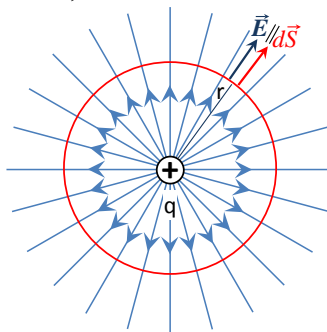


Fig. 1.12. Llei de Gauss per una càrrega puntual.

A continuació calcularem \vec{E} creat per diverses distribucions de càrrega amb el teorema de Gauss.

B. CÀLCUL DE CAMP ELÈCTRIC MITJANÇANT LA LLEI DE GAUSS

B1 - Fil infinit: Superfície de Gauss escollida: Cilindre.

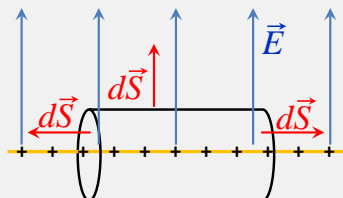


Fig. 1.13. Fil infinit. Resolució mitjançant la llei de Gauss.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\int_{\text{bases}} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{\vec{E} \perp d\vec{S} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0} + \underbrace{\int_{\text{lateral}} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{\vec{E} \parallel d\vec{S} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES} = \int_{\text{lateral}} ES \stackrel{E=cte}{=} ES_{\text{lateral}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\text{int}}}{2\pi L \epsilon_0} = \frac{2k\lambda}{r} \quad \text{eq. (1.21)}$$

on a la tercera igualtat hem tingut en compte que com que la superfície del cilindre està a una distància constant del fil, el camp és constant en qualsevol punt de la seva superfície (que és on s'avalua la integral) i per tant pot sortir de la integral.

B2 - Pla infinit: Distribució superficial de càrrega σ uniforme. Superfície de Gauss escollida: Cilindre o cub.

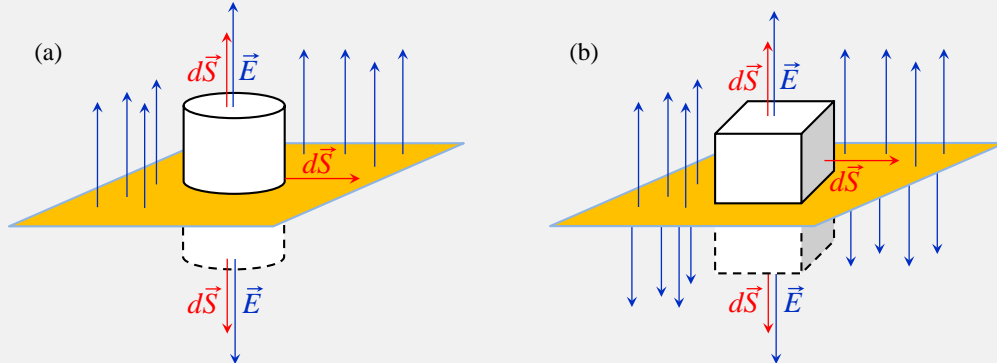


Fig. 1.14. Pla infinit. Càlcul mitjançant la llei de Gauss amb un cub o cilindre. En ambdós casos, flux a les cares laterals=0.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\int_{Bases} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{E \parallel d\vec{S}} + \underbrace{\int_{Lateral} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{E \perp d\vec{S} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0} = \int_{Bases} E dS = E \int_{Bases} dS = ES_{Bases} = E(S_{top} + S_{bottom}) = E2S = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \rightarrow$$

$$\rightarrow E = \frac{Q_{int}}{2\epsilon_0 S} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{eq. (1.22)}$$

i recuperem el resultat obtingut pel pla infinit calculat a partir del límit del disc amb $R \rightarrow \infty$. Notem que hi ha una discontinuïtat de $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ a $-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ quan passem de $y > 0$ a $y < 0$.

B3 - Esfera: Superfície de Gauss escollida: Esfera. (Problema 1.8.)

· Càrrega distribuïda sobre la superfície (Distribució superficial):

$$r > R: \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E dS = E \oint dS = ES = E4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

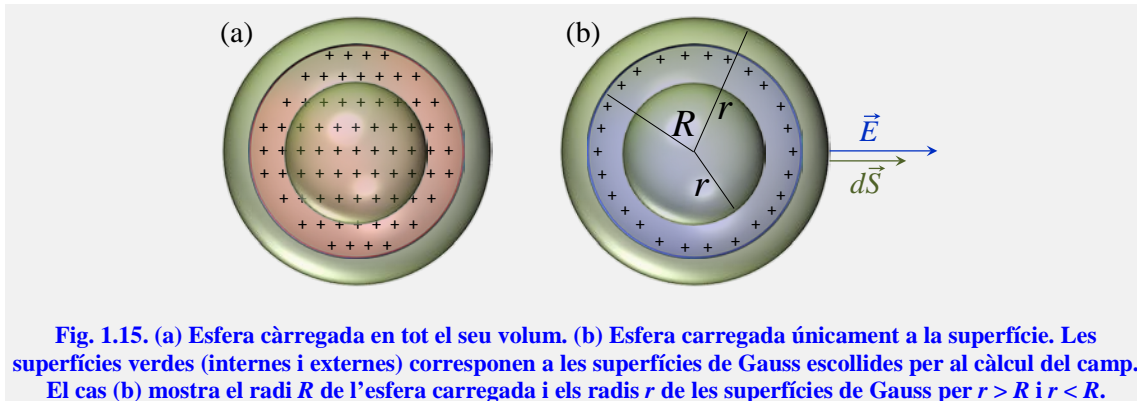
$$r < R: \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{eq. (1.23)}$$

· Càrrega distribuïda en tot el seu volum (Distribució volúmica):

$$r > R: \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E dS = E \oint dS = ES = E4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$r < R: \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E dS = E \oint dS = ES = E4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$Q_{int} = \rho 4\pi r^2 = \frac{Q}{4\pi R^2} 4\pi r^2 = Q \frac{r^2}{R^2} \rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{R^2} \quad \text{eq. (1.24)}$$



1.7 Energia potencial elèctrica

Ara calculem el treball que hem de fer per moure una càrrega q d'un punt A a un punt B per un determinat camí en el si d'un camp elèctric creat per una altra càrrega puntual Q :

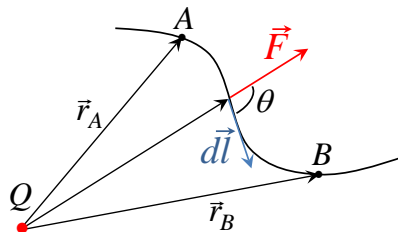


Fig. 1.16. Representació dels vectors força i diferencial de trajectòria pel càlcul del treball. El producte escalar entre r i dl està detallat a l'apèndix.

Així, essent $d\vec{\ell} = (dx, dy, dz)$,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = F d\ell \cos \theta = F dr; \quad W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{1}{r^2} dr = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad \text{eq. (1.25)}$$

Veiem que el treball no depèn del camí sinó només de la posició dels punts inicial A i final B! \rightarrow Per tant podem expressar el treball com el canvi d'una funció **energia potencial** que només depèn de la posició:

$$\Delta U = -W \quad \text{eq. (1.26)}$$

(Recalquem que el treball és un concepte associat per definició a un camí concret, no té sentit definir-lo en un punt). Invertint l'equació integral podem escriure la corresponent equació local com $\vec{F} = -\nabla U(\vec{r})$.

Això significa que la força electrostàtica és una **força conservativa**, que com hem vist és conseqüència del seu caràcter central. Recordem que una força central és aquella força que, situant l'origen de la força a l'origen del sistema de referència, té la mateixa direcció que el vector posició. Això implica que es conserva el moment angular ja que el moment de forces $\tau = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ és nul.

L'existència de la funció U ens permet definir l'energia total com l'energia cinètica més potencial: $E_T = (1/2)mv^2 + U$. Per principi de conservació de l'energia podem afirmar que E_T és manté constant.

Definim l'**energia de formació** o **energia potencial electrostàtica** d'un sistema com el treball necessari per constituir-lo. Partint del caràcter conservatiu de la força elèctrica podem expressar l'energia de formació com la variació d'energia potencial. Agafem com a exemple el cas d'un sistema de 3 càrregues q_1, q_2 i q_3 , i suposem l'energia potencial inicial com a nula (Fig. 1.17). Per formar aquest sistema, primer duem des de l^∞ fins a la posició final r_1 una càrrega q_1 (Fig. 1.17a). Com que no hi ha més càrregues, el

camp elèctric extern (i per tant la força) al que està sotmesa la càrrega és zero i per tant el treball per a dur-la és nul (Evidentment la càrrega no fa força elèctrica sobre ella mateixa, és a dir, no està sotmesa al seu propi camp elèctric). Llavors podem escriure que l'energia de formació d'aquest sistema amb una sola càrrega és:

$$U_1 = 0$$

En segon lloc, duem una segona càrrega elèctrica q_2 a la seva posició final r_2 (Fig. 1.17b). Com que en aquest cas hi ha la càrrega q_1 present, aquest procés ens costarà un treball degut al camp elèctric creat per la primera. Llavors, d'acord amb les eqs 1.25 i 1.26 podem escriure que l'energia de formació d'aquest sistema amb dues càrregues és:

$$U_2 = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

on simplement respecte l'eq. 1.25, $r_A = \infty$ i $r_B = |r_2 - r_1|$, i hem tingut en compte el canvi de signe introduït per l'eq. 1.26.

Finalment per completar el nostre sistema duem la tercera càrrega des de l' ∞ fins a r_3 (Fig. 1.17c). Aleshores tindrem una contribució deguda al camp creat per q_1 i una contribució deguda al camp creat per q_2 :

$$U_3 = k \frac{q_1 q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + k \frac{q_2 q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}$$

L'energia de formació total serà la suma de les tres contribucions:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + k \frac{q_1 q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + k \frac{q_2 q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}$$

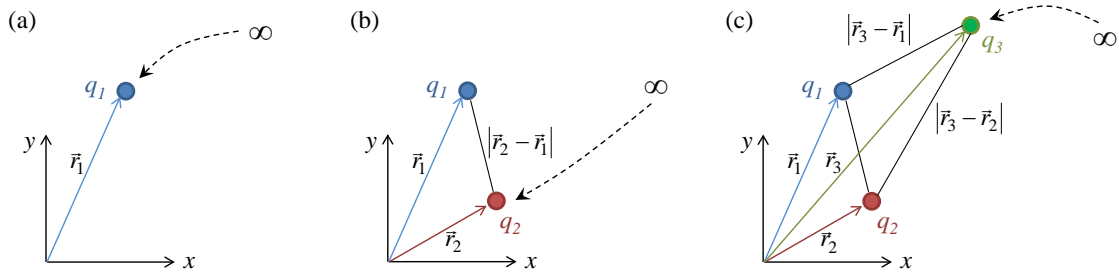


Fig. 1.17. Energia de formació.

Cal notar que l'expressió anterior és invariant sota permutacions entre càrregues, és a dir, si intercanviem q_1 per q_3 l'expressió no canvia. Això significa, com ha de ser, que l'energia de formació és independent de com s'ha format el sistema sinó que només depèn de l'estat del sistema (és a dir, de la posició de les càrregues). Això és conseqüència directa del caràcter conservatiu del camp elèctric.

També conseqüència d'aquesta invariància és el fet que l'expressió anterior es pot escriure, també, com la suma d'energies potencials de cadascuna de les càrregues tenint en compte el camp creat per les altres restants. Per evitar la duplicitat dels termes, cal afegir un factor 1/2:

$$U = \frac{1}{2} \left[\left(k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + k \frac{q_1 q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} \right) + \left(k \frac{q_2 q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} + k \frac{q_2 q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right) + \left(k \frac{q_3 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|} + k \frac{q_3 q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} \right) \right]$$

Llavors, de manera general per un sistema de N càrregues, podem escriure l'energia de formació com:

$$U = \frac{k}{2} \sum_j \sum_{i \neq j} \frac{q_j q_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad \text{eq. (1.27)}$$

on $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ és la distància (per tant el mòdul del vector) entre la càrrega i i la j . En el continu, l'energia de formació d'una distribució contínua de càrrega en 3 dimensions esdevé:

$$U = \frac{k}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho_e(\vec{r})\rho_e(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{eq. (1.28)}$$

1.8 Potencial elèctric

De la mateixa manera que hem definit el camp elèctric com la força per unitat de càrrega, definim el **potencial** com l'**energia potencial per unitat de càrrega**. Per tant podem reescriure les equacions anteriors (1.25 i 1.26) derivades del caràcter conservatiu de la força, però per unitat de càrrega. De manera integral:

$$dV = \frac{dU}{q} = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} \rightarrow \Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad \text{eq. (1.29)}$$

Invertint l'expressió integral obtenim l'expressió local:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) \quad \text{eq. (1.30)}$$

Per tant, repetint la definició anterior, el potencial V és un camp escalar degut a les càrregues existents al sistema que dona una mesura del treball que hauríem de fer per moure una càrrega addicional d'un punt a un altre, dividit per aquesta càrrega.

Com s'ha dit abans per la variació de l'energia potencial ΔU , la diferència de potencial ΔV tampoc depèn del camí específic de manera que podem escollir el més adient per als càlculs, que comenci i acabi als punts A i B. D'aquí es deriva que la variació del potencial al llarg d'una trajectòria tancada (anomenada **circulació del camp elèctric**) és nul:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \text{eq. (1.31)}$$

Aquesta equació només és vàlida en electrostàtica (és a dir, en absència de camp magnètic, ja que el camp magnètic no és conservatiu).

1.8.1 Superfícies equipotencials

Del producte escalar entre el camp elèctric i la trajectòria (veure figura 1.18), el potencial és una funció que decreix més ràpidament en el sentit del camp elèctric i creix més ràpidament en sentit contrari. Igualment, les trajectòries que comencin i acabin en punts que pertanyin a una superfície perpendicular al camp elèctric no implicaran cap canvi en el potencial de manera que aquestes superfícies s'anomenaran superfícies equipotencials.

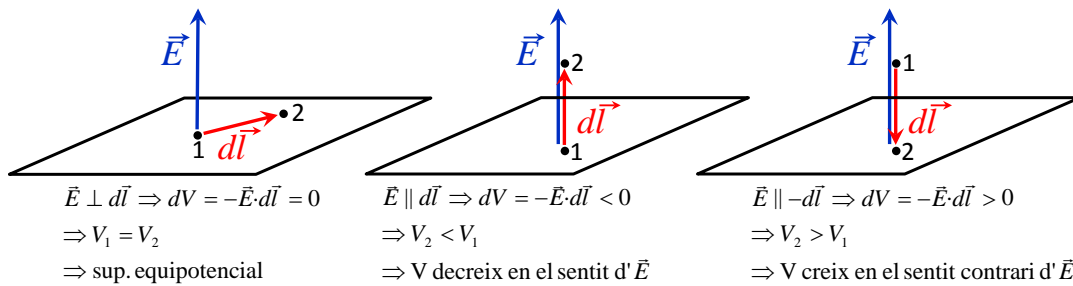


Fig. 1.18. El potencial decreix en el sentit del camp, creix en sentit contrari i es manté constant en superfícies perpendiculars al camp.

1.8.2 Càlcul del potencial creat per càrrega puntual:

Calculem la diferència de potencial entre els punts A i B degut a una càrrega puntual:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_{r_A}^{r_B} k \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{r_A}^{r_B} k \frac{q}{r^2} dr = kq \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad \text{eq. (1.32)}$$

on hem fet $\hat{r} \cdot d\vec{\ell} = d\ell \cos \theta = dr$, on dr és la component de $d\vec{\ell}$ en coordenades polars (r, θ) (veure annex). Aquest càlcul confirma que el canvi de potencial no depèn del camí i que les superfícies equipotencials d'una càrrega puntual són aquelles en les que $r_A = r_B$. Per tant, seran esferes concèntriques.

La [figura 1.19](#) il·lustra la independència de camí i la dependència únicament en la distància a la càrrega (no en la direcció): La diferència de potencial ΔV (treball per unitat de càrrega) al llarg de la trajectòria AB per C_1 (corba negra) és equivalent a la ΔV al llarg de la trajectòria AB per C_2 (trajectòria verda), que al seu torn és equivalent a la $\Delta V_{AA'}$, ja que $1/r_B = 1/r_{A'}$. Això demostra que podem agafar un $d\vec{\ell}$ que sigui paral·lel al camp ($d\vec{\ell} = d\vec{r}$) de manera que la integració sigui més senzilla, ja que $\hat{r} \cdot d\vec{r} = \hat{r} \cdot \hat{r} dr = dr$, fins arribar a un punt que pertanyi a la mateixa superfície equipotencial que el punt final.

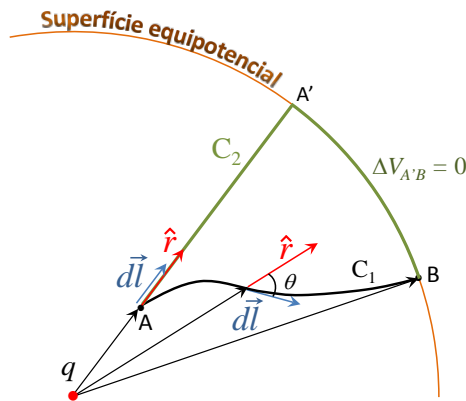


Fig. 1.19. Potencial. Independència de camí.

1.8.3 Variació de potencial i potencial:

Fins ara hem parlat de diferència de potencial entre dos punts. De fet, el camp conservatiu ens permet postular l'existència de la funció potencial però matemàticament només ens permet calcular diferències entre dos punts. A vegades, per abús de llenguatge, parlarem de *potencial* a seques, però sempre ens referirem al (la variació de) potencial respecte un punt de referència, que serà l'origen de potencial. En general podem tenir llibertat per escollir l'origen de potencial però veurem que en certs casos (com distribucions infinites, veure exemples) hi haurà restriccions.

Per una càrrega puntual o distribució finita (contínua o discreta) de càrregues comunament s'agafa l'origen de potencial a l' ∞ . Així, el potencial degut a una càrrega puntual a un punt que es troba a una distància r d'ella serà:

$$\Delta V = V_B - V_\infty = V_B \equiv V = kq \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{kq}{r} \quad \text{eq. (1.33)}$$

1.8.4 Principi de superposició pel potencial: Distribucions discretes i contínues i continuïtat del potencial

Si tenim una distribució discreta de càrregues, partint del principi de superposició de camps el potencial degut al conjunt de càrregues serà la suma de potencials:

$$\Delta V = -\int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{\infty}^A \sum_i \vec{E}_i \cdot d\vec{\ell} = -\sum_i \int_{\infty}^A \vec{E}_i \cdot d\vec{\ell} = \sum_i \frac{kq_i}{r_i} = \sum_i \Delta V_i \quad \text{eq. (1.34)}$$

on r_i és la distància de la càrrega i a la posició on calculem el potencial. Si el que tenim és una distribució contínua de càrregues, el potencial creat per una quantitat infinitesimal de càrrega dq i el potencial total seran, respectivament:

$$dV = k \frac{dq}{r} \rightarrow \Delta V = \int_{\Omega} k \frac{dq}{r} \quad \text{eq. (1.35)}$$

Si concretem els vectors posició, de manera anàloga al camp elèctric podem escriure:

$$dV(\vec{r}'') = k \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r}'' - \vec{r}'|}; \rightarrow V(\vec{r}'') = \int_{\Omega} k \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r}'' - \vec{r}'|}$$

(si redefinim $\vec{r} = |\vec{r}'' - \vec{r}'|$ llavors podem recuperar la penúltima equació, i el dV agafa dependència amb \vec{r}). Així mateix, si tenim una distribució contínua volúmica, superficial o lineal, el dq el podem expressar com (eqs 1.6-1.8):

$$dq(\vec{r}') = \rho(\vec{r}') d^3 r'; \quad dq(\vec{r}') = \sigma(\vec{r}') d^2 r'; \quad dq(\vec{r}') = \lambda(\vec{r}') dr'$$

i per tant podem escriure el potencial en els tres casos dimensionals com:

$$V(\vec{r}) = k \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}; \quad V(\vec{r}) = k \int d^2 r' \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}; \quad V(\vec{r}) = k \int dr' \frac{\lambda(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{eq. (1.36)}$$

El **potencial** és una **funció contínua** en tots aquells llocs en què el camp elèctric és finit, tot i que hi hagi discontinuïtats (veure, per exemple, els casos de la closca esfèrica i el pla infinit).

C. CÀLCUL DEL POTENCIAL

C1 - Potencial a l'eix d'un anell: (Problema 1.13) $Q = \lambda 2\pi R$; $dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$

· Fent la integral a partir de la fórmula del potencial a partir d'un diferencial de càrrega:

$$V = \int_{\text{Anell}} k \frac{dq}{r} = k\lambda \int_{\text{Anell}} \frac{dl}{r} = k\lambda \int_0^{2\pi} \frac{R d\theta}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{k\lambda R 2\pi}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}} \hat{=} \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + x^2}} \quad \text{eq. (1.37)}$$

Notem que podríem haver fet més fàcilment:

$$V = \int_{\text{Anell}} k \frac{dq}{r} = \int_{\text{Anell}} k \frac{dq}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{k}{\sqrt{R^2 + x^2}} \int_{\text{Anell}} dq = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

on hem tingut en compte que, per tot l'anell, $\sqrt{R^2 + x^2} = \text{const}$

· Integrant el camp elèctric entre l'infinit i el punt x : Notar que $d\vec{\ell} = dx' \hat{i} = -|dx'| \hat{i}$ ($dx' < 0$), ja que apunta de $x' = \infty$ a $x' = x$.

$$\Delta V (= V - \underbrace{V_{\infty}}_0 = V) = - \int_{\infty}^x \frac{kQx'}{(R^2 + x'^2)^{3/2}} \hat{i} \cdot \underset{=dx'}{d\vec{\ell}} = - \int_{\infty}^x \frac{kQx' dx'}{(R^2 + x'^2)^{3/2}} = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + x'^2}} \Big|_{\infty}^x = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + x^2}} \quad \text{eq. (1.38)}$$

C2 - Potencial d'un disc carregat uniformement: $Q = \sigma \pi R^2$; $dq = \sigma 2\pi R dR$

· Fent la integral a partir de la fórmula del potencial per d'un diferencial de càrrega:

$$\Delta V (= V - \underbrace{V_{\infty}}_0 = V) = \int_{\text{Disc}} \frac{k dQ}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \int_0^R \frac{k \sigma 2\pi R' dR'}{\sqrt{R'^2 + x^2}} = k \sigma 2\pi \left(\sqrt{R^2 + x^2} - |x| \right) \quad \text{eq. (1.40)}$$

que efectivament decreix quan x augmenta, consistentment amb la direcció i sentit de les línies de camp.

· Integrant el camp elèctric entre $x = \infty$ i el punt x :

$$\Delta V = -\int_{\infty}^x 2\pi k \sigma \left(1 - \frac{x'}{(x'^2 + R^2)^{1/2}} \right) \hat{r} \cdot d\vec{\ell} \underset{=dx'}{=} 2\pi k \sigma \left(\sqrt{R^2 + x'^2} - x' \right)_{\infty}^x =$$

$$= 2\pi k \sigma \left[\sqrt{R^2 + x^2} - x - \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{R^2 + x^2} - x \right) \right] = 2\pi k \sigma \left(\sqrt{R^2 + x^2} - x \right); \quad x > 0$$

També podem escollir un altre origen de potencial. Suposem $V = V_0$ a $x = 0$: Llavors fem camí de $x = 0$ fins a x :

$$\Delta V = V - V_0 = -\int_0^x 2\pi k \sigma \left(1 - \frac{x'}{(x'^2 + R^2)^{1/2}} \right) \hat{r} \cdot d\vec{\ell} \underset{=dx'}{=} 2\pi k \sigma \left(\sqrt{R^2 + x'^2} - x' \right)_0^x = 2\pi k \sigma \left(\sqrt{R^2 + x^2} - x - R \right)$$

$$\rightarrow V = V_0 + 2\pi k \sigma \left(\sqrt{R^2 + x^2} - x - R \right)$$

que també decreix quan x augmenta, consistentment amb la direcció i sentit de les línies de camp. Si calculem V_0 mitjançant l'expressió deduïda prenent l'origen de potencial a l' ∞ , obtenim $V_0 = 2\pi k \sigma R$ de manera si introduïm aquesta expressió a l'equació anterior recuperem l'expressió 1.4. És a dir, hem fet: $V(x) - V_{\infty} = V(x) - V_0 + V_0 - V_{\infty}$.

C3 - Potencial d'una closca esfèrica:

Podem fer-ho per integració dels dq o per integració de camí pel camp elèctric. Amb aquest últim:

$$\text{Per } r > R: \Delta V = V - V_{\infty} = V = -\int_{\infty}^r \frac{kq}{r'^2} \hat{r}' \cdot d\vec{\ell} \underset{=dr'}{=} kq \left(\frac{1}{r} \right)_{\infty}^r = \frac{kq}{r}$$

$$\text{Per } r < R: \Delta V = -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{\infty}^R \frac{kq}{r'^2} dr' - \underbrace{\int_R^r 0 \cdot d\vec{\ell}}_{=0} = -\int_{\infty}^R \frac{kq}{r'^2} dr' = \frac{kq}{R} \quad (= \text{const!}) \quad \text{eq. (1.41)}$$

Per continuïtat del potencial les dues solucions han de convergir a $r = R$. Efectivament: $V(R) = \frac{kq}{R}$

C4 - Potencial d'un pla infinit:

Sempre que tinguem distribucions de càrrega infinites no podem calcular el potencial a partir de la integració de la càrrega ja que no podem escollir l'origen de potencial a l' ∞ ja que amb aquesta integració obtenim, de fet, $V(x) \rightarrow \infty \quad \forall x$. Llavors hem de fer la integral de camí del camp escollint l'origen de potencial a un altre lloc.

$$\text{Per } x > 0: V(x) - V_0 = -\int_0^x \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_0^x \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{t} \cdot dx' \hat{t} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} x$$

$$\text{Per } x < 0: V(x) - V_0 = -\int_0^x \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^x \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{t} \cdot dx' \hat{t} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x \quad \text{eq. (1.42)}$$

C5 - Potencial d'un pla infinit i càrrega puntual:

Tot i que per la càrrega puntual podem escollir l'origen de potencial a l' ∞ , pel pla infinit no ho podem fer. Per això, si tenim un sistema amb els dos conjunts de càrregues hem d'escollir un origen de potencial comú que no pot ser l' ∞ , així que hem de recalculer el potencial de la càrrega puntual triant un altre origen.

C6 - Potencial d'un fil infinit:

Com en el cas d'un pla infinit, no podem integrar pel diferencial de càrrega ni podem agafar l'origen de potencial a l' ∞ .

$$V = -\int_a^y \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_a^y \frac{2k\lambda}{y'} \hat{j} \cdot \hat{j} dy' = -\int_a^y \frac{2k\lambda}{y'} \hat{j} \cdot \hat{j} dy' = -2k\lambda \int_a^y \frac{dy'}{y'} = -2k\lambda \ln \frac{y}{a} \quad \text{eq. (1.43)}$$

(També es podria fer una integral indefinida i sortiria la constant d'integració que correspondria a l'origen de potencial).

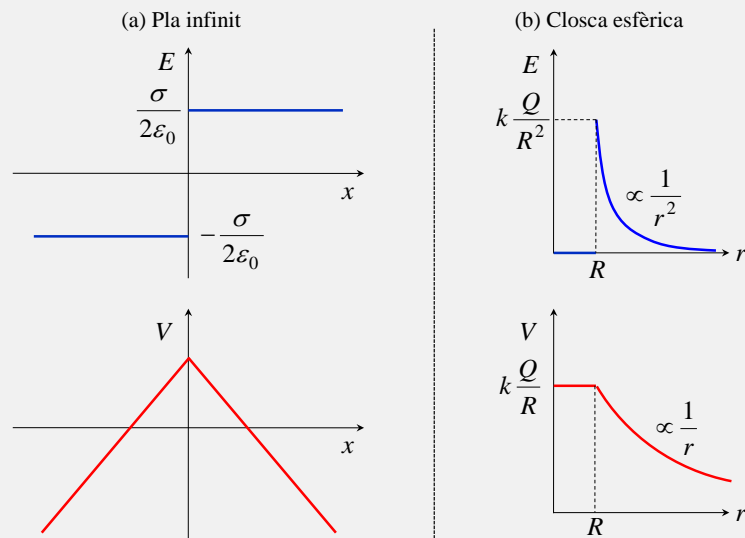


Fig. 1.20. Exemples de continuïtat del potencial (en vermell) en casos en què el camp elèctric (en blau) és discontinu: (a) pla infinit i (b) closca esfèrica.

1.8.5 Energia potencial a partir del potencial:

Anteriorment hem calculat el potencial a partir del treball, però també podem calcular-lo invertint la primera expressió de l'eq. (1.29):

$$dU = Vdq \rightarrow U = \int Vdq \quad \text{eq. (1.44)}$$

Lavors podem veure que, de fet, les eqs 1.27 i 1.28 es poden reescriure, respectivament, com:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_{j \neq i} V_j \quad \text{eq. (1.45)}$$

$$U = \frac{1}{2} \int d^3r \rho_e(\vec{r}) V(\vec{r}) \quad \text{eq. (1.46)}$$

Energia potencial d'una càrrega Q distribuïda en la superfície d'una esfera: Introduïnt el potencial d'una closca esfèrica, donat per l'eq. (1.41), a l'eq. (1.46), obtenim:

$$U = \frac{1}{2} \int d^2r \sigma(\vec{r}) k \frac{Q}{R} = \frac{kQ}{2R} \int d^2r \sigma(\vec{r}) = \frac{kQ^2}{2R} = \frac{1}{2} QV \quad \text{eq. (1.47)}$$

on hem substituït el factor $d^3r \rho_e(\vec{r})$ per l'equivalent en dos dimensions $d^2r \sigma_e(\vec{r})$ ja que la distribució és superficial.

Per completitud, enunciem la Llei de Gauss pel potencial en forma local, que s'anomena Equació de Poisson (si hi ha càrregues) o Laplace (si no n'hi ha). Respectivament, tindrem: $\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$; $\nabla^2 V = 0$