

FÍSICA 2: FONAMENTS D'ELECTROMAGNETISME

2.- CONDUCTORS I DIELÈCTRICS

2.1. Conductor i camp elèctric dins un conductor en equilibri electrostàtic:

Un conductor es defineix com aquell material que té càrregues lliures, és a dir portadors de càrrega que es poden moure *lliurement* pel seu interior, deslocalitzats dels àtoms que conformen la xarxa cristal·lina del material. En el Cu, per exemple, el nombre típic de càrregues lliures és de $\sim 10^{23}$ e/cm³.

Considerem un conductor carregat (amb càrrega neta diferent de zero) en equilibri electrostàtic: les càrregues estan en repòs, i per tant no hi ha corrent. Això significa que al seu interior $E = 0$ ja que si no, els electrons (o portadors de càrrega en general) estarien sotmesos a la força elèctrica d' E i per tant es veurien accelerats de manera que no hi hauria equilibri electrostàtic, contradint el supòsit inicial. Per la mateixa raó, podem afirmar que el camp elèctric a la superfície no pot tenir component tangencial ni component perpendicular cap endins, perquè si no acceleraria les càrregues lliures. Per tant podem afirmar que l'únic camp elèctric que existeix en un conductor en equilibri electrostàtic és a la superfície i perpendicular a ella cap enfora (les càrregues no poden moure's cap enfora perquè només tenen moviment lliure en el conductor). Aquest fet té diverses conseqüències:

- Degut a la llei de Gauss, $E = 0$ implica $q = 0$ a l'interior del conductor.
- Per tant, del punt anterior es dedueix que si el conductor està carregat, tota la càrrega està a la seva superfície (amb densitat en general no uniforme).
- Degut a que el camp elèctric és perpendicular a la superfície del conductor, podem dir que aquesta és una superfície equipotencial. Això implica que les línies de camp que neixen al conductor no hi poden anar a morir (ja que el potencial decreix en el sentit de les línies de camp) i que les que hi moren no hi poden néixer, ja que si no, la circulació del camp (veure eq. 1.31) no seria zero i la superfície no seria equipotencial. Dins conductor, $E = 0$. D'aquest fet i de les eqs 1.29 ó 1.30 es pot deduir que el potencial V és constant (E és la derivada de V , i la derivada d'una constant és zero) i en general diferent de zero!
- Per la llei de Gauss es pot demostrar que el camp fora de la superfície d'un conductor és $E = \sigma / \epsilon_0$. Per això considerarem una superfície cilíndrica o cúbica que intersekti la superfície del conductor, de manera anàloga al càlcul del camp elèctric pel pla infinit. En aquest cas, però, la contribució interna al conductor és nula ja que allí el camp també ho és. Fora del conductor, E i dS seran paral·lels entre sí (ambdós perpendiculars a la superfície del conductor) Per tant obtindrem: $ES = Q/\epsilon_0 \rightarrow E = Q/S\epsilon_0 = \sigma / \epsilon_0$.

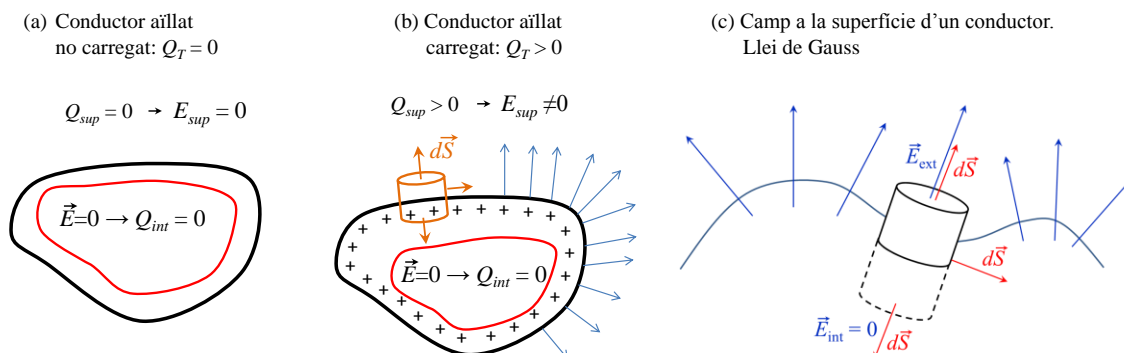


Fig. 2.1. (a,b) Conductor en equilibri electrostàtic. (c) Llei de Gauss.

Efecte punxa: Considerem dos conductors amb forma esfèrica, una gran i una petita, tal com es veu a la Figura 2.2 allunyats i connectats per un cable conductor llarg.

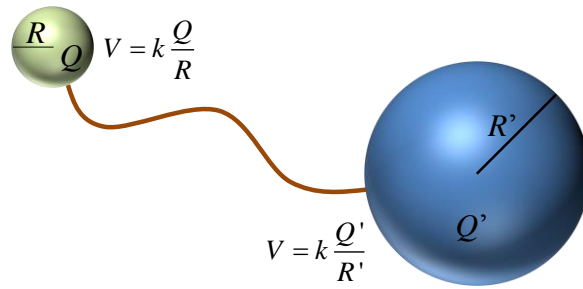


Fig. 2.2. Efecte punxa.

Podem calcular el potencial a cada esfera, tal com s'explica al Tema 1, per una esfera amb càrrega només a la superfície. A la vegada, degut a que estan connectats entre sí, tot el conjunt constitueix un sol conductor aïllat i per tant podem imposar que els potencials de les dues esferes han de ser iguals. D'aquesta última condició, i generalitzant a una geometria qualsevol, es pot deduir que la densitat de superfície de càrrega σ serà més gran en aquelles zones de la superfície del conductor que tinguin un radi de curvatura més petit (per exemple, les punxes), i serà més petita quan el radi de curvatura sigui més gran (per exemple, les zones planes). Matemàticament ho podem expressar de la següent manera:

$$\left. \begin{aligned} V &= k \frac{Q}{R} = k \frac{\sigma 4\pi R^2}{R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \\ V' &= k \frac{Q'}{R'} = k \frac{\sigma' 4\pi R'^2}{R'} = \frac{\sigma' R'}{\epsilon_0} \end{aligned} \right\} V = V' \Rightarrow \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \frac{\sigma' R'}{\epsilon_0} \Rightarrow \sigma R = \sigma' R'$$

$$\Rightarrow R < R' \Rightarrow \sigma > \sigma'$$

Si a les punxes, la densitat de càrrega és més gran, el camp elèctric (que és proporcional a la densitat de càrrega) també serà més gran. Un exemple de punxa és el parallamps: com que el camp és més gran, atraurà més les càrregues que viatgen amb els llamps. A més, també té un funcionament de previsió: a banda d'atraure, pot fer conduir càrregues positives a la punta que s'elevin al núvol i disminueixen la diferència de potencial entre núvol i terra, disminuint la probabilitat d'una descàrrega de llamp.

2.2 Influència i apantallament electrostàtic:

La **influència electrostàtica** és un fenomen que consisteix en la redistribució de càrregues degut a la presència d'un camp elèctric extern (creat, per exemple, amb un altre conductor).

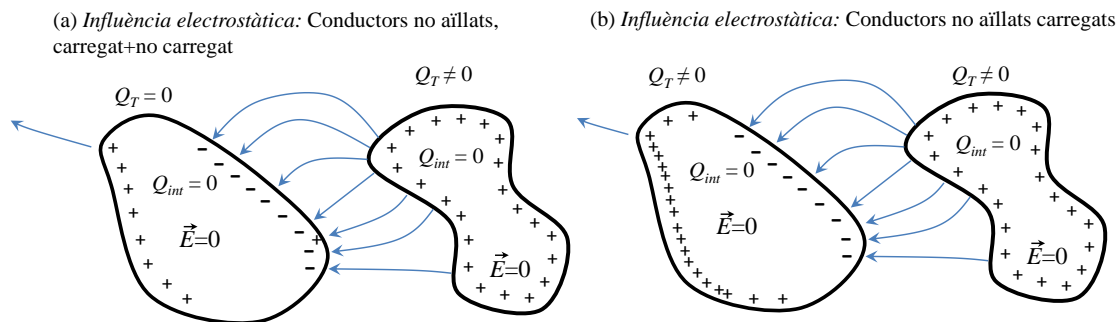


Fig. 2.3. Influència electrostàtica. Esquerra: conductor descarregat. Dreta: conductor carregat.

Dues superfícies conductores es troben en situació d'**influència total** quan totes les línies de camp que surten d'una superfície acaben en l'altre.

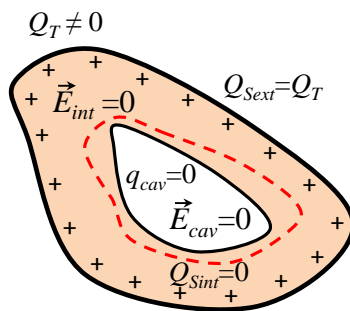
Quan dues regions estan fora de la influència electrostàtica l'una de l'altra es diu que estan en situació d'**apantallament**.

Ex: Cavitat dins d'un conductor: Gàbia de Faraday: Considerem un cavitat no conductora dins d'un conductor, sense càrregues a dins (Fig. 2.4a) (en presència d'un camp extern, redistribució de càrregues per tal d'anular el camp dins del conductor i dins de la cavitat). Sobre la superfície de la cavitat $\sigma = 0$, si no hi hauria línies de camp dins de la cavitat i per tant la circulació del camp seria no nula i tancada dins del conductor també. Es pot deduir del teorema de Gauss: Si tracem superfície tancada dins del conductor, com que dins del conductor $E = 0$, llavors $Q_{int} = 0$, ja que Q dins la cavitat = 0, per tant $E = 0$. Això és vàlid independentment del que passi a l'exterior del conductor (presència de càrregues, camps, etc.): Per tant, aquestes dues regions estan fora de la influència electrostàtica l'una de l'altra i per tant es troben en situació d'apantallament.

També podem considerar la situació en què tenim una certa càrrega q_{cav} a l'interior de la cavitat (Fig. 2.4b). En aquest cas es pot demostrar, mitjançant el Teorema de Gauss, que s'acumula una càrrega a la superfície interior del conductor, Q_{Sint} , igual a la càrrega q_{cav} de dins la cavitat, amb el signe canviat:

$$Q_{Sint} = -q_{cav}$$

(a) Conductor carregat, amb cavitat sense càrrega: apantallament (Gàbia de Faraday)



(b) Conductor carregat, amb cavitat amb càrrega: Influència total i apantallament

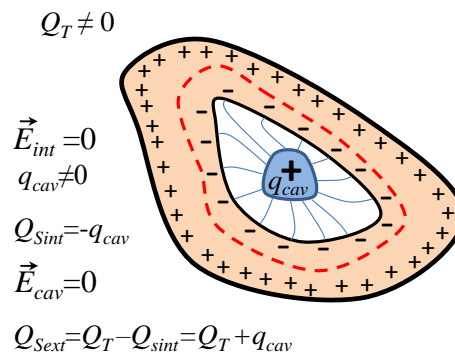


Fig. 2.4. Apantallament i influència en un conductor amb una cavitat interior.

Un conductor amb una cavitat divideix l'espai en dos regions lliures d'influència mútua. Així, canvis en l'exterior del conductor només afegiran una constant al potencial, la qual cosa és intrascendent, ja que no afectarà en cap cas ni el camp elèctric (ja que és derivada del potencial i la derivada d'una constant és nula) ni les distribucions de càrrega a l'interior. Evidentment aquest apantallament és en el doble sentit: de dins respecte fora i de fora respecte dins.

En canvi, hi ha influència total entre les càrregues dins de la cavitat i la superfície interior de la cavitat.

Exemples de situacions d'apantallament amb gàbies de Faraday les trobem en avions, cotxes, cables coaxials, aparells electrònics amb caixa externa metàl·lica connectada a terra, falta de cobertura mòbil dins d'ascensors metàl·lics. Cas d'apantallament total en els dos sentits.

Conductors aïllats: Mantenen la càrrega neta constant ja que no hi ha cap camí conductor per augmentar-la o disminuir-la.

Conductors en contacte: Com que el contacte permet el moviment de les càrregues entre les superfícies dels diferents conductors, per complir la condició d'equilibri tots els conductors han d'estar al mateix potencial ja que si no, una diferència de potencial comportaria l'existència d'un camp elèctric que mouria les càrregues en la superfície. Per tant, conductors en contacte actuen com un sol conductor, per tant amb una única superfície equipotencial. Cas particular: connexió a terra, connexió a generador de potencial:

2.3 Pressió electrostàtica

Ara anem a calcular la força exercida per unitat de superfície en un dq d'una superfície conductora per la resta de la superfície. Sigui E_+ i E_- els camps creats per la superfície conductora just a sobre i sota la superfície (Fig. 2.5).

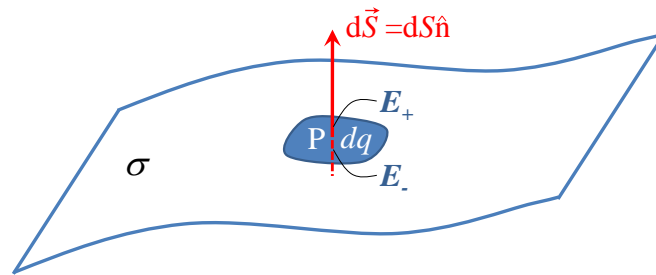


Fig. 2.5. Superfície conductora i disposició de magnituds per al càlcul de la pressió electrostàtica.

$$dq = \sigma dS \rightarrow d\vec{F} = dq\vec{E}$$

Llavors, separant les contribucions degut al dq i a la resta de la superfície, podem escriure E_+ i E_- seguint el principi de superposició de camps:

$$\vec{E} = \vec{E}^{dq} + \vec{E}^r \rightarrow \begin{cases} \vec{E}_+ = \vec{E}_+^{dq} + \vec{E}_+^r \\ \vec{E}_- = \vec{E}_-^{dq} + \vec{E}_-^r \end{cases} \quad \text{eq. (2.1)}$$

En aquestes equacions el superíndex dq es refereix al diferencial de càrrega situada al punt P i el superíndex r es refereix a la resta de la superfície.

Per continuïtat : $\vec{E}_+^r = \vec{E}_-^r = \vec{E}^r$

Per simetria : $\vec{E}_+^{dq} = -\vec{E}_-^{dq}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} = \vec{E}_+ = \vec{E}_+^{dq} + \vec{E}^r \\ 0 = \vec{E}_- = -\vec{E}_+^{dq} + \vec{E}^r \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{E}^r = \frac{1}{2} (\vec{E}_+ + \vec{E}_-) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n} \quad \text{eq. (2.2)}$$

$$d\vec{F} = dq\vec{E}^r = \sigma dS \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \hat{n} \rightarrow \frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{n} \quad \text{eq. (2.3)}$$

2.4 Capacitat i energia emmagatzemada

La **capacitat** d'un conductor es defineix com $C \equiv Q/V$ i és una característica intrínseca del material, no de quant s'ha carregat. Es pot veure per arguments dimensionals $[C] = [\epsilon_0]L$. La capacitat d'un condensador està definida positiva.

Tal com quan tenim una distribució de càrregues parlem d'*energia de formació* del sistema, en el context de conductors podem parlar d'*energia emmagatzemada*, però correspon al mateix concepte: l'energia emmagatzemada en un conductor correspon al treball que hem hagut de fer per carregar el conductor. Per calcular-la, doncs, hem de tenir en compte l'energia que cal per poder dur cada diferencial de càrrega de la distribució des de l'infinit fins al conductor, tenint en compte que el potencial variarà a cada moment, ja que a l'estat inicial serà 0 i al final serà el potencial degut al conductor completament carregat. Fent ús de la definició de capacitat (que és una magnitud constant), podem expressar el potencial en funció de la càrrega de manera que obtenim un integrant que depèn únicament de la càrrega i per tant podem integrar. Matemàticament:

$$dU = Vdq = \frac{q}{C}dq; \quad U = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{C} \int_0^Q qdq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad \text{eq. (2.4)}$$

Alternativament, també podem fer ús de l'expressió que involucra el sistema completament format, amb el potencial final, amb la qual cosa hem d'introduir el factor $\frac{1}{2}$ per evitar dobles comptes tal com s'ha justificat a l'apartat d'*Energia de formació* al tema 1:

$$U = \frac{1}{2} \int V(\vec{r})\sigma(\vec{r})dS(\vec{r}) = \frac{1}{2} \int V\sigma(\vec{r})dS(\vec{r}) = \frac{1}{2} V \int \sigma(\vec{r})dS(\vec{r}) = \frac{1}{2} VQ = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

on hem tingut en compte que el potencial en el conductor és constant.

L'energia emmagatzemada en un sistema de conductors es pot calcular com la suma d'energies:

$$U = \frac{1}{2} \int V(\vec{r})\sigma(\vec{r})dS(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sum_k \int V_k \sigma_k(\vec{r})dS_k(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sum_k V_k \int \sigma_k(\vec{r})dS_k(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sum_k V_k Q_k \quad \text{eq. (2.5)}$$

Conductor esfèric:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \rightarrow C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R \rightarrow U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{eq. (2.6)}$$

Més endavant recuperarem aquesta expressió a partir del concepte de densitat d'energia definit a partir del condensador pla.

2.5 Condensadors

Un condensador es defineix com l'associació de dos condensadors aïllats entre sí (anomenats *plaques*) i un cop carregats, tenen la mateixa càrrega i signe contrari, en situació d'influència total. Un condensador es caracteritza per la seva capacitat, que es defineix de manera anàloga a la capacitat d'un conductor: $C = Q/V$ on Q és la càrrega d'una de les plaques. Característica intrínseca del condensador, no de quant s'ha carregat. Es pot veure per arguments dimensionals $[C] = [\epsilon_0]L$ (funció de la seva geometria i del medi entre plaques).

Els condensadors serveixen per crear camps elèctrics i emmagatzemar energia i càrrega.

L'energia emmagatzemada respon a l'energia necessària per carregar-lo (energia de càrrega):

$$dU = Vdq = \frac{q}{C}dq; \quad U = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{C} \int_0^Q qdq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad \text{eq. (2.7)}$$

A continuació analitzem diversos condensadors amb diferent geometria.

2.6 Condensador Pla:

Un condensador pla està constituït per dos plans propers i l'espai entre ells. Els plans estan situats a una distància petita comparat amb qualsevol dels seus costats de manera que per punts situats entre els plans podem considerar els plans com a infinits. Per tant, el camp total serà la suma dels camps creats per cadascun dels plans infinits, tal com mostra la [figura 2.6a](#). Així, fora del condensador el camp serà nul i entre les plaques serà:

$$E = 2 \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A};$$

$$\Delta V = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_a^b dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \underbrace{(b-a)}_{=d} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Qd}{\epsilon_0 A} = Ed \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad \text{eq. (2.8)}$$

També podem plantejar el càlcul tenint en compte directament els dos plans, assumint que el camp en qualsevol punt haurà de ser perpendicular a les superfícies de les plaques. Les superfícies de Gauss que

escollim són cilindres (o ortoesdres) tal com es mostren a la [figura 2.6b](#). En el cilindre A la càrrega interna és nula i degut a la llei de Gauss això imposa que fora de l'espai entre plaques el camp és nul. Aleshores, agafant el cilindre B, com que a la cara externa (esquerra) el camp és nul tal com acabem de deduir, el camp resultant a la cara interna (dreta), el camp ha de ser:

$$\int_{B-dreta} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{B-dreta} E dS = E \int_{B-dreta} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q_{int}}{S \epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{eq. (2.9)}$$

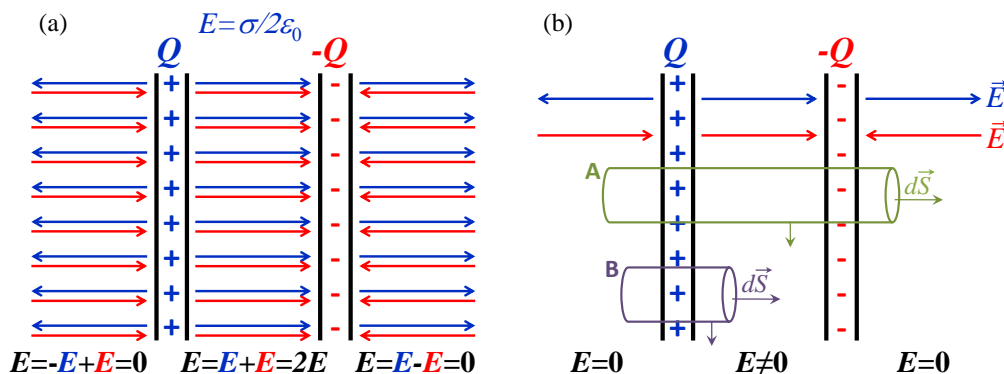


Fig. 2.6. Camp elèctric en un condensador pla.

Energia emmagatzemada o de càrrega. Per calcular-la, recuperem l'eq. 2.7:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{\epsilon_0 A} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 A d}{\epsilon_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 A d \quad \text{eq. (2.10a)}$$

$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} V^2 \quad \text{eq. (2.10b)}$$

Força d'atracció entre plaques d'un condensador pla aïllat:

Quan tractem de medis conductors i/o condensadors, en general ens podem trobar en dues situacions diferenciades: **condensador aïllat** o **condensador connectat a una diferència de potencial V**:

Condensador aïllat: Per definició no hi pot haver transferència de càrrega de les plaques a l'entorn, per tant la càrrega Q (i per tant σ) es manté constant. Llavors utilitzarem l'expressió d' U en funció de Q ó σ de l'eq. 2.10a i en calculem la força:

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{\sigma^2 A}{\epsilon_0} x \right) = -\frac{\sigma^2 A}{\epsilon_0}$$

Densitat d'energia electrostàtica:

Si recuperem l'eq. 2.10a, el numerador conté el terme Ad que correspon al volum entre les plaques del condensador. Així, passem aquest terme a l'altra banda tenim:

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

que correspon a la densitat d'energia d'un camp electrostàtic. Tot i que hem obtingut aquest resultat per un cas particular es pot demostrar que per qualsevol camp elèctric es compleix en general:

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad \text{eq. (2.11)}$$

2.7 Capacitats de condensadors d'altres geometries:

Per calcular la capacitat de condensadors esfèrics i cilíndrics seguirem els mateixos passos que en el cas anterior: (i) Calcular mitjançant la llei de Gauss el camp elèctric entre les plaques (veure línia verda discontinua a la Fig. 2.5), (ii) integrar el camp per calcular el potencial i (iii) aplicar la definició de capacitat.

Condensador esfèric:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E dS = E \oint dS = E 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$\rightarrow V = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \stackrel{d\vec{l}=dr\hat{r}}{=} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$\rightarrow C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0}{(1/R_2 - 1/R_1)} \stackrel{R_2 \rightarrow \infty}{=} 4\pi\epsilon_0 R \quad \text{eq. (2.12)}$$

on hem recuperat l'expressió pel conductor esfèric.

Condensador cilíndric: Ex: cable coaxial.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{lateral}} E dS = E \int_{\text{lateral}} dS = E 2\pi r L = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r L} \hat{r}$$

$$\rightarrow V = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \stackrel{d\vec{l}=dr\hat{r}}{=} -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = -\frac{Q \ln(R_2/R_1)}{2\pi\epsilon_0 L}$$

$$\rightarrow C = \frac{Q}{|V|} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)} \quad \text{eq. (2.13)}$$

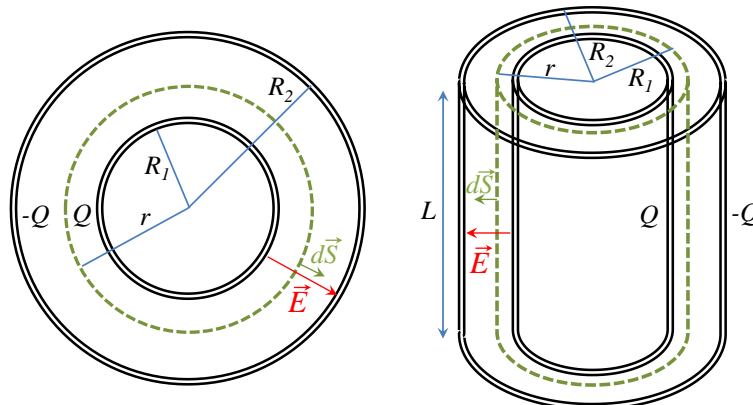


Fig. 2.7. Conductors esfèric i cilíndric.

2.8 Associacions de condensadors:

Per avaluar condensadors connectats en sèrie o paral·lel calcularem la capacitat, càrrega i voltatge d'un condensador **equivalent** definit com aquell que emmagatzema tanta energia com tots els condensadors connectats junts donada una mateixa diferència de potencial entre els dos extrems dels conjunts.

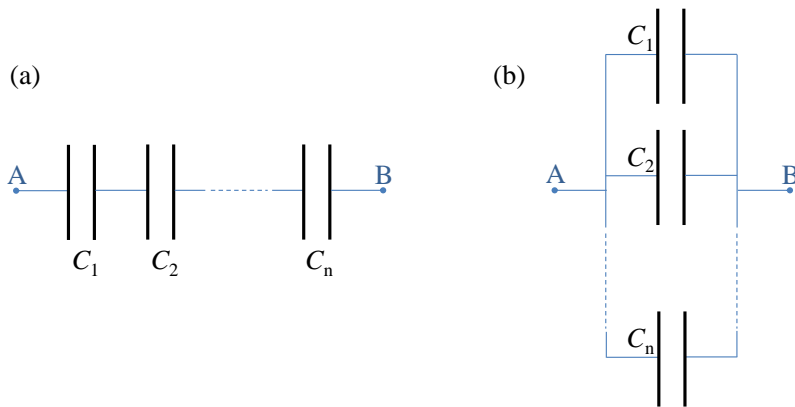


Fig. 2.8. Associacions de condensadors (a) en sèrie i (b) en paral·lel.

Associació de condensadors en paral·lel:

Com que el punt A i les plaques esquerra i el punt B i les plaques dreta pertanyen al mateix conductor respectivament, estan al mateix potencial i per tant $V_A - V_B = V_i (=V_{eq}) \forall i$, essent V_i la diferència de potencial entre les plaques del condensador i .

$$U = \frac{1}{2} \sum_i C_i V_i^2 = \frac{V^2}{2} \sum_i C_i = \frac{1}{2} V^2 C_{eq} \Rightarrow C_{eq} = \sum_i C_i \quad \text{eq. (2.14)}$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i = \frac{V^2}{2} \sum_i Q_i = \frac{1}{2} V^2 Q_{eq} \Rightarrow Q_{eq} = \sum_i Q_i \quad \text{eq. (2.15)}$$

Associació de condensadors en sèrie:

Partint de condensadors descarregats, degut a la diferència de potencial $V_A - V_B$ hi haurà una transferència de càrrega de la placa esquerra del condensador esquerre a la placa dreta del condensador dret de manera que acabaran carregats amb càrregues q i $-q$ respectivament. Això provocarà una distribució de càrregues en les plaques internes que, com que estan aïllades, amb càrrega neta nula que s'ha de conservar, serà la mateixa que les plaques externes amb signe alternat. Així podem dir que $Q_i = Q (=Q_{eq}) \forall i$. Per tant:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i = \frac{Q}{2} \sum_i V_i = \frac{1}{2} Q_{eq} V_{eq} \Rightarrow V_{eq} = \sum_i V_i \quad \text{eq. (2.16)}$$

Quan tractem amb sistemes de conductors en situació d'influència total, els podem tractar també en termes de condensadors i les seves capacitats.

Exemple problema fonamental: 3 conductors esfèrics concèntrics = 3 condensadors C_{12} , C_{23} i $C_{3\infty}$

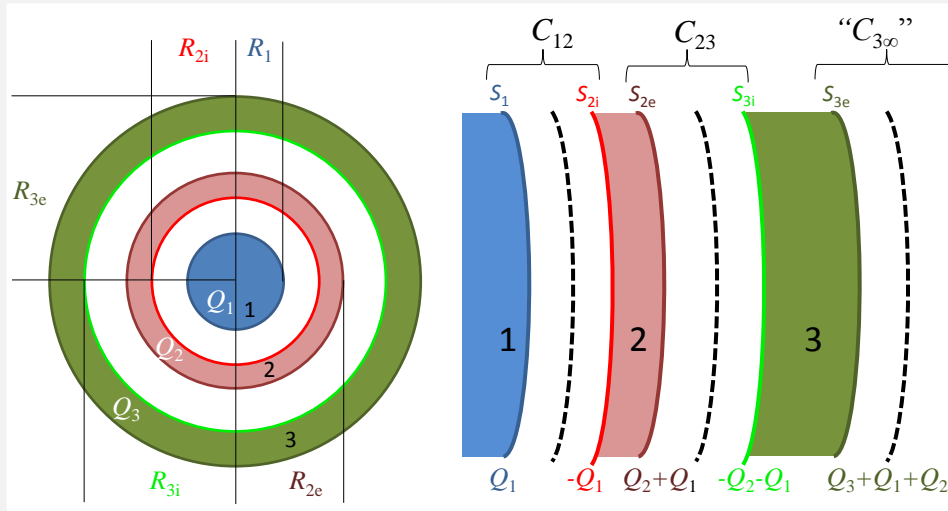


Fig. 2.9. Tres conductors esfèrics concèntrics. Les combinacions de les seves superfícies es poden interpretar com a condensadors.

Coneixem tota la geometria del problema (radis i simetries) i per condició d'equilibri electrostàtic podem establir una relació d'influència total i per tant una relació entre les càrregues de les superfícies veïnes, tal com es descriu a la figura. Com sempre ens podem trobar en dues situacions diferents: (i) Conductors aïllats o (ii) connectats a una determinada diferència de potencial respecte terra (que pot ser zero mateix).

Plantejarem un cas particular en què tenim l'esfera 1 connectada a terra, per tant $V_1 = 0$, i que coneixem Q_2 i Q_3 . Les incògnites del problema seran, doncs Q_1 , V_2 i V_3 . Per calcular la diferència de potencial entre cada conductor primer calculem el camp elèctric mitjançant superfícies de Gauss (línies guionades a la fig. 2.9). Després, per integració al llarg d'una trajectòria radial, per exemple de dins cap enfora, podem determinar la diferència de potencial a cada tram:

$$V_2 - V_1 = - \int_{R_1}^{R_{2i}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{R_1}^{R_{2i}} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_{2i}} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$V_3 - V_2 = - \int_{R_{2e}}^{R_{3i}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q_2 + Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_{3i}} - \frac{1}{R_{2e}} \right)$$

$$V_\infty - V_3 = - \int_{R_{3e}}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q_3 + Q_2 + Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R_{3e}} \right) = - \frac{Q_3 + Q_2 + Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{3e}}$$

Així tenim 3 equacions i 3 incògnites de manera que podem resoldre el sistema:

$$Q_1 = Q_2 \frac{\left(\frac{1}{R_{3i}} - \frac{1}{R_{2e}} - \frac{1}{R_{3e}} \right)}{\left(\frac{1}{R_{3e}} - \frac{1}{R_{3i}} - \frac{1}{R_{2i}} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{2e}} \right)}$$

· Veiem que podríem haver plantejat en termes de condensadors i capacitats: la superfície S_1 i la S_{2i} formen un condensador que anomenarem C_{12} , amb capacitat del mateix nom. Com que és un condensador esfèric (el que hi hagi més enllà de les superfícies no afectarà el què hi passi a dins), per influència total el podem considerar de manera aïllada i dir, d'acord amb l'eq. (2.12), que la seva capacitat és:

$$C_{12} = \frac{4\pi\epsilon_0}{(1/R_{2i} - 1/R_1)} = \frac{Q_1}{V_2 - V_1}$$

de manera que hem obtingut l'equació anterior. Igualment, podem considerar els altres condensadors formats per les superfícies S_{2e} i S_{3i} (condensador C_{23}) i la S_{3e} i l^∞ (condensador $C_{3\infty}$), on considerarem l^∞ com una placa connectada a terra, perquè a l'introduir el potencial (secció 1.9) vam veure que amb geometria esfèrica podem agafar $V_\infty = 0$. Així, anem recuperant totes les equacions anteriors partint del coneixement previ de la capacitat d'un condensador esfèric.

2.9 Dielèctrics

Definició: Material aïllant, que per tant no permet la lliure circulació de càrregues pel seu interior, però la seva estructura interna es veu afectat per la presència de camps elèctrics: desplaçament i deformació del núvol electrònic respecte el nucli de l'àtom de tal manera que els centres de càrrega adquireixen posicions diferents: aparició local de dipols elèctrics induïts (veure Fig. 2.10).

Dipol elèctric: Sistema format per dues càrregues iguals q i de signe contrari, a una distància d . Moment dipolar p : vector de mòdul qd , direcció recta que els uneix i de sentit de $-q$ a q . Un dipol en el si d'un camp extern constant pateix una reorientació de tal manera que el moment dipolar s'alinea amb el camp. Dipol en camp no uniforme: reorientació i força neta (atracció/repulsió).

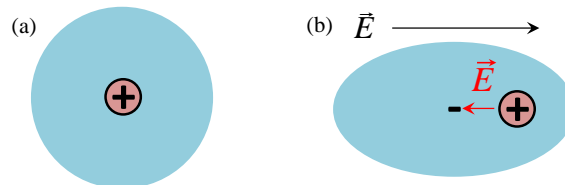


Fig. 2.10. Dipol elèctric induït per camp elèctric

Com es pot veure amb la fig. 2.10, el desplaçament relatiu dels centres de càrrega positiva i negativa d'un àtom es veu compensat a escala més gran pel desplaçament dels centres de càrrega dels àtoms veïns, de manera que de manera global Aquesta compensació passa per tots els àtoms a l'interior del material, però no als de la superfície ja que no tenen veïns de manera que apareix una càrrega neta superficial anomenada **càrrega lligada o càrrega de polarització**. Això fa aparèixer una **polarització neta** al material que és un camp elèctric intern que compensa parcialment el camp elèctric extern.

- **Tipus** de dielèctrics:

- **No dipolars** (~no polars): només presenten polarització neta com a resposta a un camp extern.
- **Dipolars** (~polars): Les molècules del material presenten dipols inclús en absència de camp extern. En certes condicions, aquesta polarització local pren direccions aleatòries de manera que només apareix polarització neta sota camp extern per la reorientació dels dipols. En certes circumstàncies, certs materials també poden mostrar una ordenació dels dipols donant lloc a polarització neta en absència de camps externs (fases polars). D'entre els materials dipolars en podem trobar dos tipus:
 - **Iònics: electrons transferits** entre àtoms, i on hi ha desplaçament relatiu entre càrregues internes. Ex: BaTiO_3 (Titanat de Bari).
 - **Covalents polars: electrons compartits** entre àtoms (de manera desigual, és a dir els electrons es passen més temps en un àtom que en un altre, però no arriben a ser iònics), i presenten alguna assimetria en l'estructura. Ex: Aigua

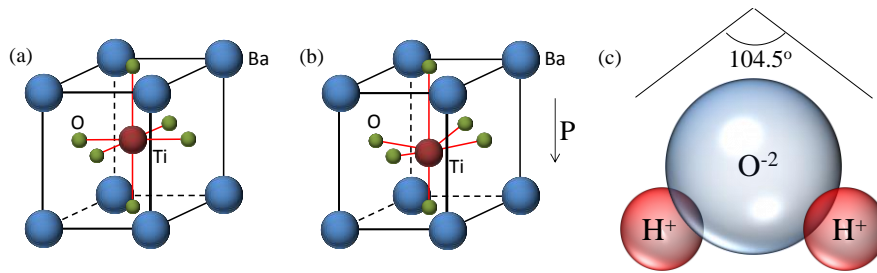


Fig. 2.11. (a) Fase no polar. (b) fase polar ionica. (d) Molècula polar.

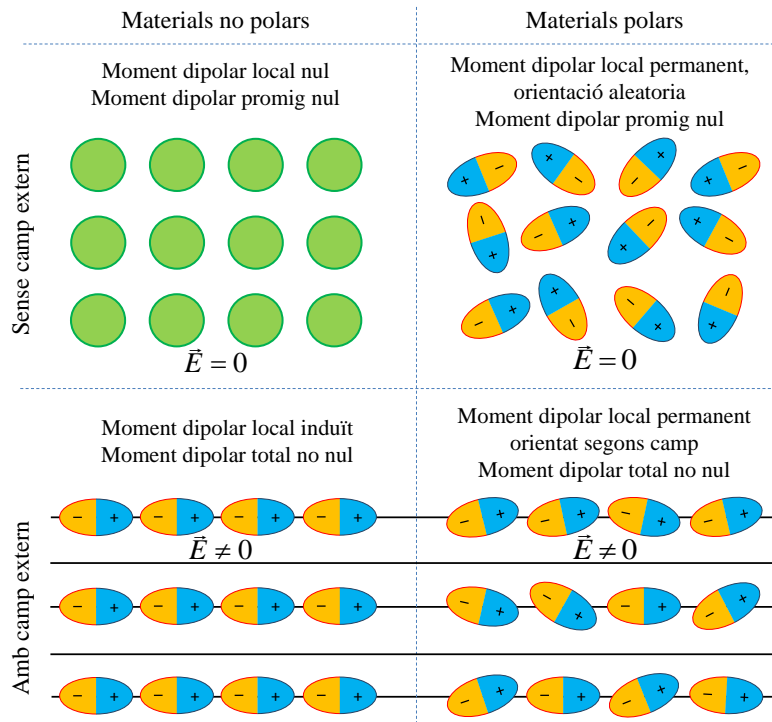


Fig. 2.12. Materials polars i no polars amb i sense camp elèctric extern.

La introducció d'un dielèctric en el si d'un cert camp elèctric extern, doncs, implica la debilitació del camp elèctric a l'interior del dielèctric. Com que $E \propto 1/\text{permitivitat dielèctrica}$, per poder plasmar la debilitació d' E de manera matemàtica podem definir una permitivitat dielèctrica relativa $\epsilon_r > 1$ i una permitivitat absoluta ϵ del medi tal que $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 > \epsilon_0$. Així, les equacions d'electrostàtica seguiran essent vàlides en medis dielèctrics, però en comptes de tenir en compte la permitivitat del buit ϵ_0 s'haurà de tenir en compte la permitivitat del dielèctric ϵ . Cal notar que l'aire té una permitivitat dielèctrica molt propera al buit, de manera que les equacions segueixen essent vàlides per l'aire.

2.10 Introducció de dielèctrics entre les plaques d'un condensador:

Suposem que ara emplenem densament l'espai entre les plaques d'un condensador amb un dielèctric. Donat que $\epsilon > \epsilon_0$ sempre, i $C \propto \epsilon$, llavors C augmenta quan introduïm un dielèctric entre les plaques d'un condensador. Tenint en compte que $C=Q/V$, podem analitzar les dues situacions de sempre:

- Condensador aïllat: Q es manté, per tant disminueix E i V .
- Connectat a $V=\text{cte}$: Per mantenir V (i per tant E) constants, Q augmenta.

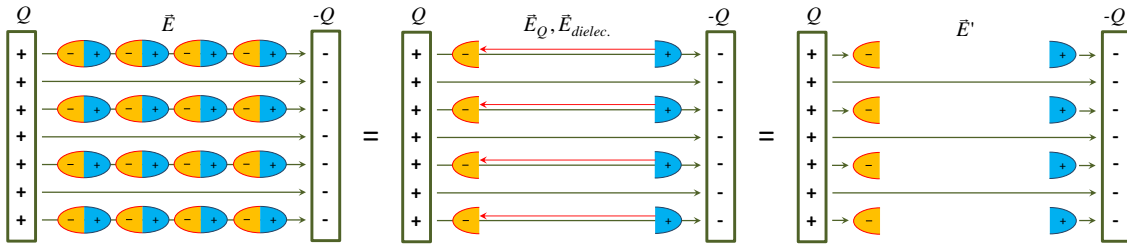


Fig. 2.13. Efecte d'un dielèctric entre les plaques d'un condensador pla.

2.10.1 Introducció de dos dielèctrics en sèrie:

Com que el camp elèctric és perpendicular a la superfície del dielèctric, aquesta és equipotencial. Tenint en compte que dins el dielèctric el camp elèctric és constant i igual a σ/ϵ , podem calcular la diferència de potencial per trams:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^b \frac{\sigma}{\epsilon_1} dx + \int_b^a \frac{\sigma}{\epsilon_2} dx = \frac{\sigma b}{\epsilon_1} + \frac{\sigma(a-b)}{\epsilon_2} = \frac{Qb}{\epsilon_1 A} + \frac{Q(a-b)}{\epsilon_2 A} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \\
 &= Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{Q}{C_{eq}}
 \end{aligned}$$

Per tant, podem considerar la introducció de dos dielèctrics amb la interfase paral·lela a les plaques com dos condensadors connectats en sèrie, cadascun dels quals només conté un únic dielèctric (veure fig. 2.14, esquerra).

2.10.1 Introducció de dos dielèctrics en paral·lel:

De manera similar, si introduïm dos dielèctrics amb la interfase perpendicular a les plaques, els podem considerar com dos condensadors en paral·lel, cadascun amb un únic dielèctric (veure fig. 2.14, dreta), amb àrees les corresponents a les regions en contacte amb els dielèctrics ja que en aquesta configuració totes les plaques "d'un mateix costat" dels condensadors també estan al mateix potencial. Cal veure que en aquesta situació, cadascun dels condensadors en paral·lel C_1 i C_2 en general tindrà una càrrega diferent de l'altre, de manera que al considerar el condensador únic C , aquest tindrà una distribució de càrrega no uniforme, amb densitats superficials de càrrega diferents que variaran entre les regions enfront de cadascun dels dielèctrics. Matemàticament, i seguint la notació de la fig. 2.14, dreta, podem escriure:

$$\left. \begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\epsilon_{r_1} \epsilon_0 A_1}{d} \rightarrow V_1 = \frac{Q_1}{C_1} \\
 C_2 &= \frac{\epsilon_{r_2} \epsilon_0 A_2}{d} \rightarrow V_2 = \frac{Q_2}{C_2}
 \end{aligned} \right\} V_1 = V_2 \rightarrow \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \rightarrow Q_1 = \frac{C_1}{C_2} Q_2;$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_1 &= \frac{Q_1}{A_1} \\
 \sigma_2 &= \frac{Q_2}{A_2}
 \end{aligned} \right\} \sigma_1 = \frac{C_1}{C_2} \frac{Q_2}{A_1} = \frac{C_1 A_2}{C_2 A_1} \sigma_2 = \frac{\epsilon_{r_1} \epsilon_0 A_1}{d} \frac{d}{\epsilon_{r_2} \epsilon_0 A_2} \frac{A_2}{A_1} \sigma_2 = \frac{\epsilon_{r_1}}{\epsilon_{r_2}} \sigma_2$$

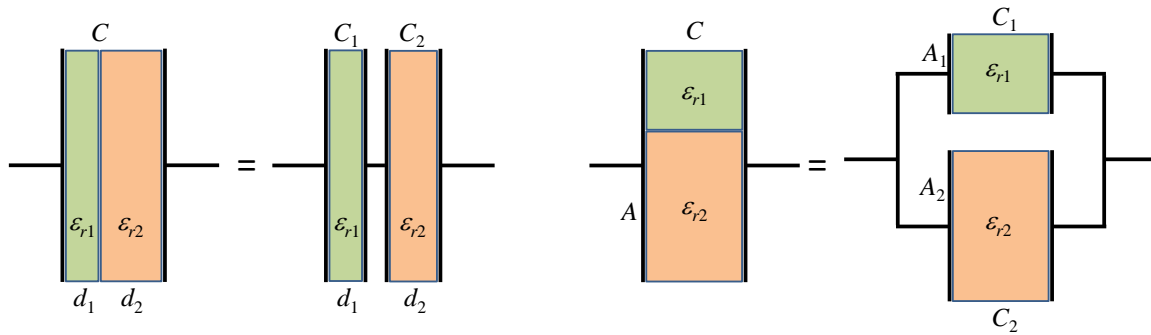


Fig. 2.14. Condensadors amb dielèctrics. Esquerra: dielèctrics en sèrie. Dreta: dielèctrics en paral·lel.

• **Camp de ruptura dielèctrica:**

Tots els medis dielèctrics tenen un límit de **camp elèctric màxim** intern que poden suportar sense canviar les condicions estructurals. Aquest límit s'anomena camp de ruptura dielèctrica i per camps elèctrics superiors a aquest, les càrregues adquireixen prou energia per obrir camins conductors a través del material (descàrregues en arc, llamps) de manera que els dielèctrics deixen d'actuar com a tals. Cada dielèctric té un camp característic de ruptura dielèctrica.

Donada la relació proporcional entre càrrega i camp elèctric, l'existència d'un camp de ruptura dielèctrica limita la **càrrega màxima** que pot emmagatzemar un medi conductor (per exemple, les plaques d'un condensador).