

FÍSICA 2: FONAMENTS D'ELECTROMAGNETISME

3.- CORRENT CONTINU I CORRENT ALTERN

En el tema anterior hem vist què passa quan connectem un condensador a una font de potencial: passat un règim transitori durant el qual es produeix la càrrega del condensador, s'assoleix un estat d'equilibri electrostàtic de manera que no hi ha moviment de càrregues dins dels conductors. Si substituïm el condensador per un element conductor, que per tant permeti el pas de les càrregues a través seu (per exemple una resistència) de tal manera que tinguem un circuit tancat, passat un règim transitori d'acumulació de càrrega en alguns punts de la superfície del conductor, s'assolirà un règim estacionari consistent en el moviment o circulació de càrregues per l'interior del conductor. Les càrregues es mouran degut a la diferència de potencial (és a dir, el camp elèctric) creat per la font a dins del conductor, que impedirà que les càrregues assolixin l'equilibri electrostàtic: així, a mesura que s'allunyen del pol positiu de la font el potencial (energia) de les càrregues anirà disminuint fins arribar al pol negatiu on, al tornar entrar a la font, recuperaran el potencial (energia) perdut.

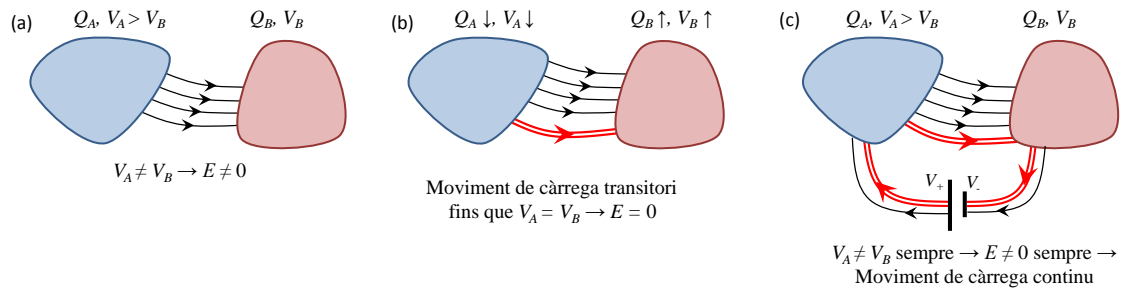


Fig. 3.1. (a) Conductors carregats aïllats: Absència de moviment de càrrega. (b) Conductors carregats no aïllats: moviment de càrrega transitori. (c) Conductors carregats en circuit tancat amb una font: moviment de càrrega continu.

Les càrregues s'acceleraran degut a la força de Coulomb però també es veuran frenades degut als xocs contra les altres càrregues i contra els àtoms de la xarxa cristal·lina del material. El resultat net d'aquests dos processos és una velocitat promitja constant, anomenada **velocitat d'arrossegament** o de deriva v_d . Cal mencionar també l'existència de l'agitació tèrmica que dota les càrregues lliures d'una velocitat no nula (també en absència de camp elèctric), però el caràcter aleatori d'aquesta fa que en promig no contribueixi a la velocitat d'arrossegament. La velocitat d'arrossegament és proporcional al camp elèctric aplicat:

$$\vec{v}_d = \mu_p \vec{E} \quad \text{eq. (3.1)}$$

on μ_p s'anomena mobilitat dels portadors de càrrega.

3.1 Intensitat i densitat de corrent

Per caracteritzar el moviment de càrregues es defineix el corrent o **intensitat de corrent** com la quantitat de càrregues per unitat de temps que atravesa una secció del conductor. En termes diferencials:

$$I = \frac{dq}{dt}; \quad [I] = A = \frac{C}{s} \quad \text{eq. (3.2)}$$

Si considerem una secció d'un conductor en el que hi ha un moviment de càrregues en una cert sentit, la quantitat de càrrega que travessa una secció S del conductor en un cert interval de temps dt es pot expressar com (veure Fig. 3.2) $dQ = nqSv_d dt$, on n és el nombre de càrregues per unitat de volum (densitat de portadors de càrrega), v_d és la velocitat promitja (velocitat de deriva o d'arrossegament) i q és la magnitud de la càrrega elèctrica de les càrregues lliures (o portadors de càrrega). Per tant, la intensitat serà:

$$I = \frac{dQ}{dt} = nqSv_d \quad \text{eq. (3.3)}$$

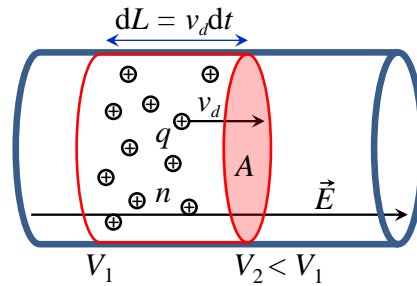


Fig. 3.2. Secció d'un conductor amb moviment de càrrega.

Tot i que la intensitat no és una magnitud vectorial, se li associa un sentit d'acord amb el moviment de les càrregues positives. Per tant els electrons es mouen en sentit contrari al corrent.

• **Densitat de corrent:** El concepte d'intensitat es refereix a la quantitat de càrrega que travessa una superfície. Per tractar el corrent elèctric a nivell local, però, és més útil referir-se al concepte de densitat (volúmica) de corrent \vec{J} , definit com la càrrega que travessa un punt de l'espai per unitat de temps en una certa direcció, és a dir, la intensitat de corrent per unitat de superfície. Per a això, tindrem en compte la intensitat en un diferencial de superfície dS , expressat com $dI = nqv_d dS$. Llavors la intensitat per unitat de superfície serà: $J = dI/dS = nqv_d = \rho_\tau v_d$ on ρ_τ és la densitat volúmica de càrrega. Per acabar de caracteritzar la densitat de corrent com a vector, li assignarem la direcció i sentit del vector diferencial de superfície:

$$\vec{J} = \frac{dI}{dS} d\vec{S} = \rho_\tau \vec{v}_d \quad \text{eq. (3.4)}$$

$$\rightarrow dI = \vec{J} \cdot d\vec{S} \rightarrow I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \text{eq. (3.5)}$$

En aquesta última eq. (3.5) podem veure que a l'invertir la primera igualtat de l'eq. (3.4), la intensitat correspon al flux de la densitat de corrent.

3.2 Llei d'Ohm

Introduïnt l'eq. (3.1) a l'eq. (3.4) podem escriure:

$$\vec{J} = \rho_\tau \vec{v}_d = \rho_\tau \mu_p \vec{E} = \sigma_c \vec{E} \quad \text{eq. (3.6)}$$

on hem definit la **conductivitat** elèctrica com $\sigma_c = \rho_\tau \mu_p$, que serà alta per materials conductors i baixa per materials dielèctrics. Invertint l'eq. (3.6) podem escriure:

$$\vec{E} = \rho_c \vec{J} \quad \text{eq. (3.7)}$$

on hem definit la **resistivitat** elèctrica com $\rho_c = 1/\sigma_c$. De cara a l'anàlisi de circuits, té interès ara reescriure aquesta equació en termes del potencial i la intensitat de corrent. Introduïnt l'eq. (3.6) dins l'eq. (3.5), i considerant un camp constant dins del conductor, obtenim l'equació següent:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_S \sigma_c \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sigma_c ES \rightarrow E = \frac{I}{\sigma_c S} \quad \text{eq. (3.8)}$$

D'altra banda recuperant la Fig. 3.2, podem calcular el potencial com $\Delta V = -\int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E\ell \rightarrow E = \Delta V / \ell$.

Combinant aquestes dues últimes equacions pel camp elèctric obtenim la **llei d'ohm**:

$$\Delta V = \frac{\ell}{\sigma_c S} I = \rho \frac{\ell}{S} I = RI \quad \text{eq. (3.9)}$$

on hem definit la **resistència** del material com $R \equiv \rho \frac{\ell}{S}$, essent la seva unitat l'Ohm : $[R] = \Omega$.

Pels materials *òhmics*, la resistència és constant a través del material i independent de la intensitat que hi circula. Aquí val la pena mencionar que el potencial elèctric en el context d'anàlisi de circuits també és anomenat tensió o, directament, voltatge.

3.3 Energia i Potència. Llei de Joule

Com hem mencionat anteriorment, els portadors de càrrega es mouen degut a la força exercida pel camp elèctric. No obstant, aquests es veuen frenats deguts als xocs, que comporten una pèrdua d'energia (desacceleració) en forma de calor. Aquest fenomen es coneix com a **lleis de Joule**. Anem a calcular ara la potència subministrada pel camp elèctric. Per això, calcularem primer el treball fet pel camp elèctric sobre un diferencial de càrrega dq i després aplicarem la definició de potència:

$$d(W)_{dq} = d(\vec{F} \cdot d\vec{\ell})_{dq} = dq \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = dq(V_1 - V_2) = Idt(V_1 - V_2) \rightarrow P = \frac{dW}{dt} = I(V_1 - V_2) \quad \text{eq. (3.10)}$$

Si $V_1 > V_2$, el camp elèctric ha fet treball i la potència és positiva, que significa que ha estat consumida pel sistema. Si $V_2 > V_1$, significa que s'ha subministrat potència al sistema. Podem expressar-ho en termes de la resistència tot just introduïnt a l'última expressió l'eq. (3.9):

$$P = RI^2 \quad \text{eq. (3.11)}$$

3.4.1 Transport de l'energia elèctrica

El transport d'energia elèctrica que té lloc entre la central on es produeix i els llocs de consum (cases, indústries) sovint necessita centenars o milers de km de cables conductors. D'acord amb l'eq. (3.11), es perdrà una certa potència per efecte Joule. Com que la resistència dels fils no es pot canviar (una vegada optimitzada), el transport es durà a terme a la mínima intensitat possible. Per no perdre potència de consum, d'acord amb l'eq. (3.10) aleshores s'haurà d'augmentar el potencial al qual es realitza el transport. Per aquest motiu es fan servir les línies d'*alta tensió*, que pot arribar a centenars de milers de Volts. D'altra banda, als extrems de les línies (tant a la central com als llocs de consum), s'utilitzaran *transformadors* per poder canviar el potencial, ja sigui augmentant-lo (de la central a la línia d'alta tensió) com disminuint-lo (de la línia al lloc de consum). El funcionament d'aquests transformadors s'explicarà amb el fenomen d'inducció mútua al tema 5.

3.5 Lleis de Kirchhoff

3.5.1 1era Llei de Kirchhoff: Equació de continuïtat (Conservació de Càrrega).

El principi de conservació de càrrega estableix que la càrrega no es crea ni es destrueix, sinó que és una magnitud que es conserva. Aplicant aquest principi a la definició de flux de densitat de corrent en una superfície tancada dins de la qual no hi hagi fonts ni embornals (*sumideros*) de càrrega obtenim l'equació de continuïtat:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt} \quad \text{eq. (3.12)}$$

Aquesta equació diu que la densitat de corrent net en una superfície tancada és igual a la disminució de la quantitat de càrrega dins de la superfície tancada per unitat de temps. Cal notar que aquesta equació té un significat diferent que l'eq. (3.c) ja que el flux es calcula a través d'una superfície tancada. Per tant serà igual a la intensitat sortint menys la intensitat entrant.

Si tenim un corrent estacionari, que vol dir que la intensitat és constant en el temps, donat que entrarà tanta càrrega com en sortirà, el flux net serà nul, per tant:

$$\text{Per corrents estacionaris:} \quad \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{eq. (3.13)}$$

3.5.2 Zona Llei de Kirchhoff: Conservació de l'energia.

Anteriorment hem vist que el camp electrostàtic és conservatiu, de manera que la seva circulació és igual a zero (veure tema 1). Si prenem una trajectòria tancada que ressegueixi un circuit alimentat per una f.e.m, podem escriure:

$$\Delta V = -\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 = -\int_{fem} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{circuit} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \Delta V_{fem} + \Delta V_{circuit}$$

on hem separat la trajectòria entre la contribució de la f.e.m i la contribució del circuit restant (inclosa la resistència interna de la font). Tal com s'ha comentat en la secció 3.5, la f.e.m provoca un guany net de potencial, $\Delta V_{fem} = \varepsilon$ (en presència d'elements com motors que actuen de forces contraelectromotrius, $\Delta V_{fem} = -\varepsilon$). En canvi, d'acord amb l'eq. (3.9) el corrent al llarg del circuit provoca una caiguda de potencial $\Delta V_{circuit} = -RI$. Introduint aquestes igualtats a l'equació anterior i aïllant la f.e.m, i considerant en general un circuit amb diverses fonts, elements resistius i motors, podem escriure la segona llei de Kirchhoff com:

$$\sum_i^M \varepsilon_i = \sum_j^N R_j I + \sum_k^L \varepsilon'_k \quad \text{eq. (3.14)}$$

En el cas més general d'un circuit amb diverses malles, podem aplicar aquesta equació en qualsevol trajectòria tancada del circuit (malla). Tanmateix, per resoldre el circuit (és a dir, esbrinar les intensitats de cada branca), només serà necessari aplicar aquesta llei únicament en totes les malles independents.

Cal mencionar que una deducció més fonamental de la segona llei de Kirchhoff passa per considerar explícitament el fet que durant la conducció de corrent tenen lloc processos que involucren forces no conservatives (no electrostàtiques), tals com les relacionades amb l'origen de les forces electromotrius (químiques a les piles, mecàniques a les dinamos, etc.) i les dissipatives relacionades amb l'efecte Joule. En l'anàlisi anterior la consideració d'aquests processos s'ha fet de manera implícita, tenint en compte únicament el resultat net d'aquests.

3.6 Associacions de resistències

3.6.1 Resistències en sèrie:

A vegades pot ser útil calcular la resistència equivalent a una associació de resistències en sèrie, tal com es pot veure a la Fig. 3.3a. En aquest cas, sabem que per tots els punts del circuit, des de A fins a B hi circularà la mateixa intensitat ja que pertanyen a la mateixa branca. Llavors podem raonar que el potencial que cau $V_B - V_A$ serà:

$$V_B - V_A = R_1 I + R_2 I + \dots + R_N I = \sum_{i=1}^N R_i I = I \sum_{i=1}^N R_i$$

D'altra banda ara considerem que el circuit de la Fig. 3.3a és equivalent al circuit de la Fig. 3.3c, on hem substituït les resistències en sèrie R_i per una d'equivalent R_{eq} . Donat que per a aquest últim circuit podem escriure $V_B - V_A = IR_{eq}$, igualant aquesta equació amb l'equació anterior obtenim:

$$R_{eq} = \sum_i R_i \quad \text{eq. (3.15)}$$

3.6.2 Resistències en paral·lel:

Ara considerem el cas d'una associació de resistències en paral·lel (Fig. 3.3b). Per calcular la resistència equivalent (Fig. 3.3c) hem de tenir en compte que per cada resistència en general hi circularà una intensitat diferent però que la diferència de potencial entre els extrems de cada resistència serà la mateixa. Llavors podem escriure:

$$V_B - V_A = R_1 I_1 = R_2 I_2 = \dots = R_N I_N \Rightarrow I_1 = \frac{V_B - V_A}{R_1}; I_2 = \frac{V_B - V_A}{R_2}; \dots$$

$$I = \sum_{i=1}^N I_i = \sum_{i=1}^N \frac{V_B - V_A}{R_i}$$

$$V_B - V_A = R_{eq} I \Rightarrow I = \frac{V_B - V_A}{R_{eq}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{V_B - V_A}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{V_B - V_A}{R_i} = (V_B - V_A) \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \end{array} \right.$$

Finalment, doncs, obtenim:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i} \quad \text{eq. (3.16)}$$

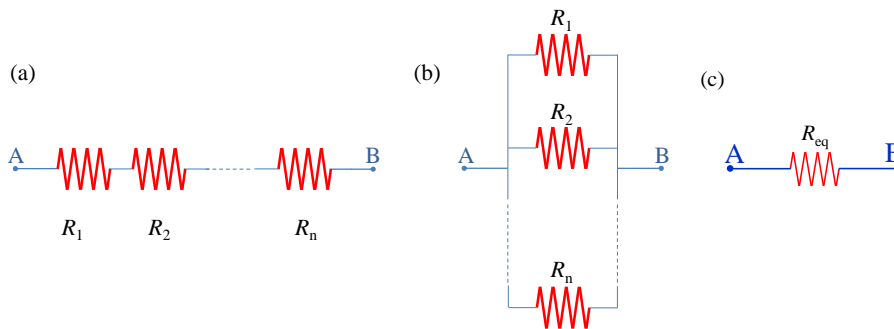


Fig. 3.3. Associacions de resistències. (a) En sèrie. (b) En paral·lel

3.7 Força electromotriu i contraelectromotriu. Generadors i receptors

Com s'ha dit, el manteniment d'un corrent al llarg d'un circuit tancat requereix una font d'energia que conservi la diferència de potencial entre dos punts. En general, aquesta font s'anomena *generador* (com una pila, bateria) i la diferència de potencial que és capaç de generar s'anomena força electromotriu (*fem*) ε , però cal remarcar que no és una força sinó una tensió i per tant tindrà unitats de volts.

Teòricament, la *fem* que un generador és capaç d'aportar a un circuit només depèn de les característiques d'ell mateix, però a la realitat, si connectem aquest generador a un circuit, s'observa que la diferència de potencial aportada pel generador al circuit decreix a mesura que es fa augmentar la intensitat de corrent. Aquest comportament és degut al fet que tot generador real conté una resistència interna intrínseca a ell mateix (dit de passada, obligat pel segon principi de la termodinàmica), de manera que la diferència de potencial que és capaç d'aportar a un circuit com el de la Fig 3.4a (on, de manera habitual, hem inclòs una resistència addicional R per limitar la intensitat que circula pel circuit) serà

$$V_B - V_A = \varepsilon - rI.$$

Donat que r i I són magnituds definides positives, $(V_B - V_A) < \varepsilon$ i aquesta equació efectivament és una recta amb pendent negatiu, que explica el comportament mencionat anteriorment.

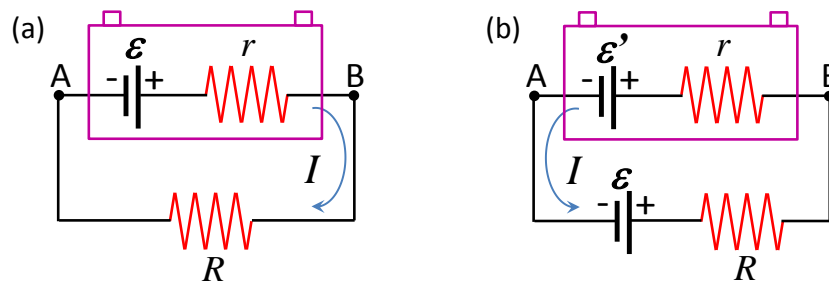


Fig. 3.4. (a) Generador ε . (b) Receptor ε' .

De la mateixa manera, la potència subministrada pel generador al circuit $(V_B - V_A)I$ serà menor que la potència consumida pel generador $\mathcal{E}I$. Si les dividim podem calcular el rendiment de la pila:

$$\eta = \frac{P_{\text{subministrada}}}{P_{\text{consumida}}} = \frac{(\mathcal{E} - rI)I}{\mathcal{E}I} = \frac{\mathcal{E} - rI}{\mathcal{E}} < 100\%$$

Oposadament al generador, podem trobar un element que fa decreïxer la diferència de potencial entre els seus extrems (com un motor), de la mateixa manera que una resistència. En aquest cas, anomenarem aquest embornal de tensió com a *receptor* i la tensió que fa disminuir com a força contraelectromotriu (*fcem*) \mathcal{E}' (veure Fig. 3.4b, on també hem inclòs al circuit un generador, negligint-ne la resistència interna, per poder fer funcionar el circuit). El símbol d'un *receptor* és el mateix que per un generador, però la intensitat va en sentit contrari, del born positiu al negatiu. De manera similar a un generador però a l'inrevés, un receptor no és capaç de convertir en potència útil (treball) tota la potència que consumeix, sinó que una part es perd en forma de calor (efectivament tots els motors s'escalfen). Aquesta pèrdua de potència també es pot expressar mitjançant una resistència interna com es veu a la figura. Les equacions corresponents en aquest cas seran:

$$V_B - V_A = \mathcal{E} + rI$$

$$\eta = \frac{P_{\text{subministrada}}}{P_{\text{consumida}}} = \frac{\mathcal{E}'I}{(\mathcal{E}' + rI)I} = \frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{E}' + rI} < 100\%$$

on a la última equació hem calculat el rendiment com la potència útil subministrada pel motor per fer treball dividit per la potència total consumida pel motor.

3.8 Corrent continu. Circuit RC i RL

El corrent continu es defineix com aquell corrent que circula sempre en el mateix sentit. Això té lloc quan tenim una f.e.m que no canvia la polaritat dels seus borns. Si a més el corrent continu té una magnitud constant llavors parlarem d'un corrent estacionari, però en general no té perquè ser-ho. Un exemple de corrent continu no estacionari es produeix durant el procés transitori de càrrega i descàrrega d'un condensador i durant el procés transitori d'establiment i supressió d'un corrent en una bobina. A continuació estudiarem l'evolució de la intensitat en circuits que tenen aquests elements durant els processos transitoris. Per minimitzar el corrent en el circuit, introduïrem una resistència en sèrie amb l'element en qüestió per minimitzar la intensitat que circula pel circuit.

3.8.1 Circuit RC: Càrrega i descàrrega d'un condensador

Si connectem una resistència i un condensador a una f.e.m (interruptor connectat a A a la Fig. 3.5) s'estableix un corrent continu no estacionari (transitori) durant el qual es produeix la càrrega del condensador. Escrivint la segona llei de Kirchhoff obtenim:

$$\mathcal{E} = IR + \frac{q}{C} = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \rightarrow q(t) = C\mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \rightarrow I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{eq. (3.17)}$$

Per analitzar el procés de descàrrega del condensador, connectarem l'interruptor a B, de manera que la segona llei de Kirchhoff quedarà:

$$0 = IR + \frac{q}{C} = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \rightarrow q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \rightarrow I(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{eq. (3.18)}$$

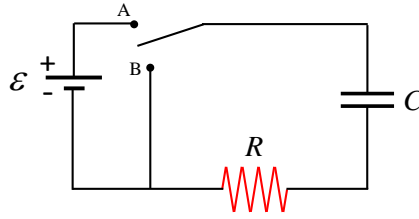


Fig. 3.5. Circuit RC: Quan l'interruptor A està tancat (B obert) el condensador es carrega. Quan l'interruptor B està tancat (A obert) el condensador es descarrega.

Fixem-nos que en la primera igualtat de les equacions (3.18) hem obtingut

$$0 = IR + \frac{q}{C} = R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \rightarrow \frac{q}{C} = R \left(-\frac{dq}{dt} \right)$$

Aquesta última igualtat es pot interpretar de la manera següent: ja que el voltatge que cau al condensador, a l'esquerra de l'última igualtat està definit de manera positiva, i donat que per força la càrrega disminuirà en funció del temps, per tant la derivada dq/dt serà negativa. Així, per mantenir la consistència de signes, ens surt el signe negatiu de manera natural. D'altra banda, també podríem considerar que el condensador aporta l'energia per la intensitat transítoria, de manera que $q/C = IR$. Llavors hauríem de considerar que la intensitat hauria d'ésser definida com a $-dq/dt$, per tal de recuperar el signe correcte de la caiguda de voltatge al condensador.

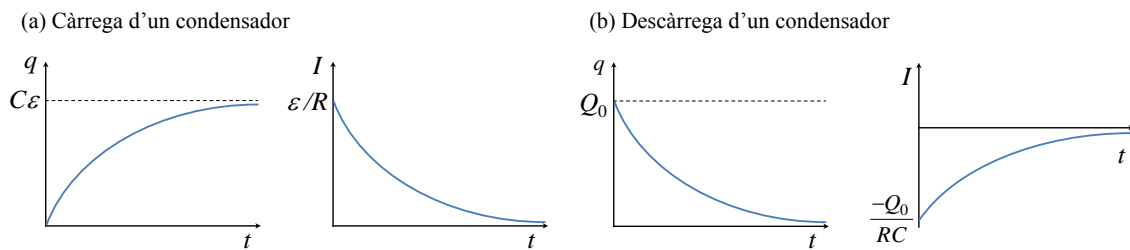


Fig. 3.6. Evolució de la càrrega i la intensitat durant la càrrega (a) i la descàrrega (b) d'un condensador.

Donat que no hi ha flux de càrrega entre les plaques del condensador (el dielèctric o buit entre les plaques ho impedeix), en el règim estacionari el condensador es comporta com un tall al circuit, és a dir que es converteix en un circuit obert i per tant la intensitat és nula. En aquest règim estacionari, el condensador està completament carregat d'acord amb la diferència de potencial entre les seves plaques, que serà precisament l'establerta per la força electromotriu ε , ja que al ser la intensitat nula, no hi ha cap diferència de potencial entre els borns de la resistència i per tant no compta a nivell de la segona llei de Kirchhoff.

Cal notar també que només hem fet ús de la segona llei de Kirchhoff perquè el circuit estudiat consta d'una sola branca (no hi ha cap nus) de manera que no té sentit plantejar la primera llei de Kirchhoff ja que la intensitat serà la mateixa en tots els seus elements.

Podem calcular ara el **treball de càrrega d'un condensador**:

$$dW = \varepsilon dq \rightarrow W = \int_{q(t=0)}^{q(t=\infty)} \varepsilon dq \underset{\varepsilon=cte}{=} \varepsilon q(\infty) = \varepsilon^2 C$$

Com hem demostrat anteriorment [veure eq. (2.d)], només la meitat d'aquest treball s'emmagatzema en forma d'energia potencial al condensador. Podem veure ara que l'altra meitat es perdrà en forma de calor per efecte Joule a la resistència:

$$W = \int_{q(t=0)}^{q(t=\infty)} V_R dq = \int_{q(t=0)}^{q(t=\infty)} IR dq = R \int_0^\infty I^2 dt = -R \left(\frac{Q_0}{RC} \right)^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{Q_0^2}{RC^2} \frac{RC}{2} \left[e^{-\frac{2t}{RC}} \right]_0^\infty = -\frac{Q_0^2}{2C} \Big|_{Q_0=\varepsilon C} = -\frac{\varepsilon^2 C}{2}$$

3.8.2. Circuit RL: Establiment i supressió d'un corrent en una bobina

Aquest apartat s'estudiarà en detall en el tema 5, ja que implica el coneixement de la llei de Faraday d'inducció electromagnètica.

3.9 Corrent Altern

El corrent altern és aquell que canvia de sentit al llarg del temps, degut a un canvi de polaritat dels borns de la font. Un cas particular és el del senyal periòdic, on la variació de la intensitat obeeix una regularitat en el temps. En aquest sentit podem tenir senyals rectangulars, triangulars, sinusoidals, etc., sent aquests últims els de més interès ja que poden tenir un tractament matemàtic analític molt més senzill que les altres casos. Aquí ens centrarem únicament en corrents alterns sinusoidals.

Així com en corrent continu estacionari només teníem en compte circuits amb resistències, el corrent altern permet l'ús d'altres elements tals com condensadors i bobines d'autoinducció que introduiran comportaments més complexos. Considerem primer circuits amb un sol element (purament resistiu, capacitiu o inductiu) alimentats per una font de tensió sinusoidal. El potencial generat per la font es podrà escriure com:

$$\varepsilon(t) = V_{\max} \cos(\omega t)$$

Com que en tots els casos tractem amb un circuit d'una sola branca (malla), sense cap nus, la primera regla de Kirchhoff esdevé trivial: la intensitat serà la mateixa a cada instant de temps en tots els punts del circuit. La segona llei de Kirchhoff ens dirà que el voltatge generat per la font serà exactament el voltatge que cau a l'element del circuit.

3.9.1 Circuit purament resistiu (R): Fig. 3.7(a)

La segona llei de Kirchhoff imposa $V_R(t) = \varepsilon(t)$. D'altra banda, per relacionar la intensitat del circuit amb el voltatge podem utilitzar la llei d'Ohm.

$$V_R(t) = RI(t) \rightarrow I(t) = \frac{V_R(t)}{R} = \frac{V_{\max}}{R} \cos(\omega t) = I_{\max} \cos(\omega t) \rightarrow I_{\max} = \frac{V_{\max}}{R}$$

3.9.2 Circuit purament capacitiu (C): Fig. 3.7(b)

La segona llei de Kirchhoff imposa $V_R(t) = \varepsilon(t)$. D'altra banda, per relacionar la intensitat del circuit amb el voltatge hem de tenir en compte la definició de capacitat.

$$q(t) = V_C(t)C = V_{\max} C \cos(\omega t) \rightarrow I(t) = \frac{dq}{dt} = -V_{\max} C \omega \sin(\omega t) = V_{\max} C \omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_{\max} = V_{\max} C \omega = \frac{V_{\max}}{X_C} \rightarrow X_C = \frac{1}{C \omega}$$

Podem veure que en aquest cas la intensitat màxima i el voltatge màxim (és a dir, entre les seves amplituds) estan relacionats per una magnitud que anomenarem **reactància capacitiva**, que fa el paper de la resistència en una corresponent llei d'Ohm generalitzada.

3.9.3 Circuit purament inductiu (L): Fig. 3.7(c)

La segona llei de Kirchhoff imposa $V_R(t) = \varepsilon(t)$. Per analitzar la intensitat que passa per la bobina, cal tenir en compte la llei de Faraday d'autoinducció, que es justificarà quan es tracti el fenomen d'inducció electromagnètica (Tema 5), i que relaciona el potencial i la intensitat en una bobina com:

$$\varepsilon(t) = L \frac{dI(t)}{dt}$$

Manipulant aquesta expressió i integrant:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{V(t)}{L} = \frac{V_{\max}}{L} \cos(\omega t) \rightarrow I(t) = \frac{V_{\max}}{L\omega} \sin(\omega t) = \frac{V_{\max}}{L\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow I(t) = I_{\max} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

on $I_{\max} = \frac{V_{\max}}{L\omega} \equiv \frac{V_{\max}}{X_L} \rightarrow X_L = L\omega$

En aquest cas la intensitat màxima i el voltatge màxim estan relacionats per una magnitud X_L que anomenarem **reactància inductiva**.

3.9.4 Circuit RLC: Fig. 3.7(d)

Considerarem ara un circuit de corrent altern amb una sola malla que conté els tres elements anteriors, R, L i C connectats en sèrie. En aquest cas partirem del principi de conservació de càrrega (primera regla de Kirchoff), que ens diu que la intensitat és la mateixa per tots els elements de la malla:

$$I(t) = I_{\max} \cos(\omega t)$$

Ara formularem el desfassament de les caigudes de potencial a cada element en funció de la intensitat d'acord amb els resultats anteriors:

$$\begin{aligned} V_R(t) &= I_{\max} R \cos(\omega t) \\ V_C(t) &= \frac{I_{\max}}{C\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ V_L(t) &= I_{\max} L\omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

A continuació aplicarem la segona regla de Kirchoff a la malla per relacionar la diferència de potencial a cada element amb la diferència de potencial proporcionada pel generador:

$$\tilde{V}(t) = \tilde{V}_R(t) + \tilde{V}_C(t) + \tilde{V}_L(t) = V_{\max} \cos(\omega t + \varphi)$$

on φ serà l'angle resultant de sumar els diferents desfassaments segons els pesos respectius donats per les reactàncies corresponents. Això es pot veure més fàcilment introduint el concepte de fasor.

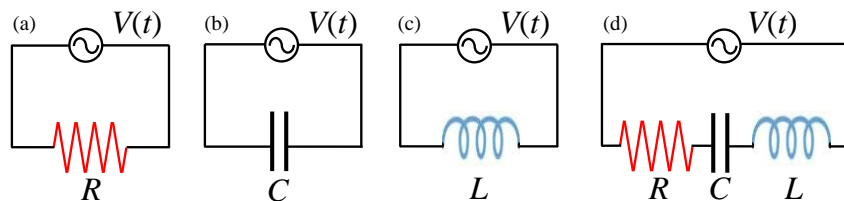


Fig. 3.7. Circuits amb (a) resistència, (b) condensador, (c) bobina i (d) els tres elements junts.

3.9.5 Desfasament. Fasors

A l'analitzar aquests circuits, hem vist que tant la bobina com el condensador introdueixen desfassaments entre les intensitats i els potencials. Per representar i tractar aquests desfassaments utilitzarem la notació fasorial, que considera tant el voltatge com la intensitat nombres complexos rotatoris en el pla complex, d'amplitud constant i fase oscil.lant, que anomenarem fasors. A efectes pràctics, els fasors es representen com pseudovectors en un diagrama fasorial. Per entendre-ho podem veure el diagrama de la Fig. 3.8a, on

es representa un fasor típic $y(t) = A_0 \cos(\omega t)$ en diferents instants de temps (vectors de colors). El valor numèric del fasor en qualsevol instant de temps, $y(t)$, serà la projecció del fasor sobre l'eix horitzontal (x), representat sota el diagrama fasorial com a segments de l'origen a la corba sinusoidal blava. Així, el fasor vermell es troba a $t = 0$, de manera que $y(0) = A_0$, que efectivament és el valor màxim que pot tenir aquest fasor. Els diferents fasors de colors estan representats als temps a intervals de 45° . Així, verd: $\omega t = 45^\circ$; blau clar: $\omega t = 45^\circ$; blau: $\omega t = 90^\circ$; blau fosc: $\omega t = 135^\circ$, $\omega t = 180^\circ$, i així successivament. Les projeccions corresponents estan representades amb el mateix color.

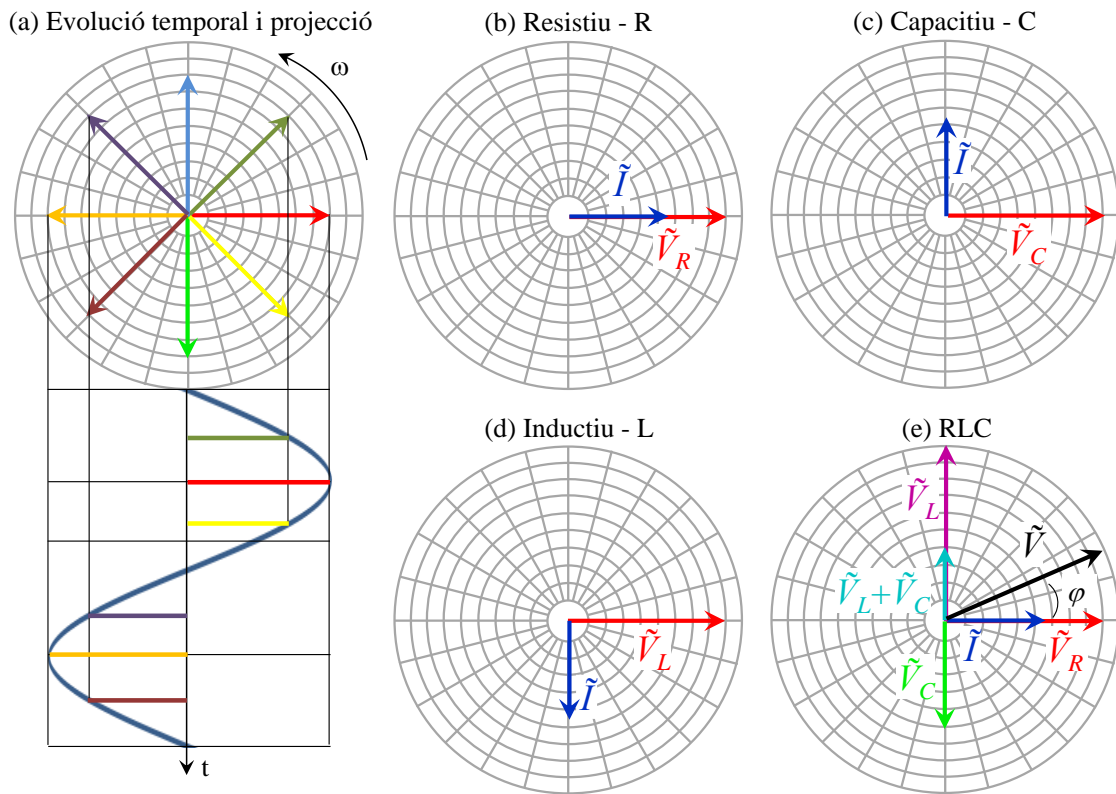


Fig. 3.8. Diagrames fasorials en diferents casos.

La utilitat dels diagrames fasorials és la representació de les magnituds i desfasaments entre diferents fasors. Per això es representen tots els fasors que s'estiguin analitzant, en el mateix instant de temps, que es pot escollir segons la conveniència de cada cas particular. Per exemple, les Figs 3.8b,c,d mostren els fasors voltatge \tilde{V} i intensitat \tilde{I} en els casos dels 3 circuits amb un sol element estudiats abans: resistiu, capacitiu i inductiu respectivament. Els angles entre els fasors corresponen als desfasaments entre les magnituds respectives. En aquest cas hem escollit arbitràriament els voltatges a $t = 0$, de manera que la intensitat pren la direcció de l'eix horitzontal.

Tal com es pot veure en els diagrames fasorials de la Fig. 3.8e, el mòdul del voltatge generat per la font es calcularà com:

$$\begin{aligned}
 |\tilde{V}(t)| = V_{\max} &= \sqrt{V_{\max_R}^2 + (V_{\max_L} - V_{\max_C})^2} = \sqrt{I_{\max}^2 \left(R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 \right)} = \\
 &= I_{\max} \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} = I_{\max} \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I_{\max} Z
 \end{aligned}$$

Veiem que obtenim una relació entre l'amplitud del voltatge i de la intensitat (és a dir, una llei d'Ohm generalitzada) on la constant de proporcionalitat Z (que depèn de la freqüència) s'anomena **impedància**.

3.9.6 Ressonància:

El fenòmen de ressonància té lloc quan no hi ha desfassament entre la intensitat que circula pel circuit i el potencial generat a la font (és a dir, $\varphi = 0$). Això passa quan les reactàncies capacitiva i inductiva s'anulen mútuament, de manera que la part imaginària de la impedància complexa d'un circuit es fa zero i per tant $Z = R$. Per tant, podem trobar la condició de ressonància:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 0 \rightarrow X_L = X_C \rightarrow L\omega = \frac{1}{C\omega} \rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Aplicacions: Cavitats ressonants (sintonització de ràdio, etc.).

Pol Lloveras