

FÍSICA 2: FONAMENTS D'ELECTROMAGNETISME

4.- CAMP MAGNÈTIC

4.1. Introducció. Fonts de magnetisme

El magnetisme és una propietat de la naturalesa que pot aparèixer degut a diverses causes, per exemple:

- *Càrregues elèctriques en moviment*, que és el fenomen en el qual ens focalitzarem en aquest capítol i el següent. Aquesta propietat fou descoberta per Oersted a l'observar que al passar un corrent prop d'una brúixola, l'agulla d'aquesta es desviava.

- *Dipòls magnètics permanents*. En general les partícules elementals tenen una propietat relacionada amb el moment angular de rotació intrínsec que s'anomena espí (spin en anglès), que els dota d'un moment magnètic, i que és independent de la càrrega elèctrica. L'espí és l'origen més comú del

A la natura trobem materials magnètics, que contenen al seu interior un conjunt de dipòls magnètics elementals, i materials que no contenen dipòls magnètics elementals, anomenats *diamagnètics*. Els materials magnètics es poden subclassificar segons les interaccions entre els seus dipòls magnètics elementals. Per exemple, si aquests estan alineats en la mateixa direcció i sentit llavors a més a més presentaran un dipòl magnètic total net, formant el que anomenem *imants permanents*, que originarà un camp magnètic al seu exterior no nul.

Anàlogament a la propietat elèctrica, aquesta càrregues magnètiques (de la naturalesa que siguin), d'una banda originen un camp magnètic propi i d'altra banda si es col·loquen en presència d'un camp magnètic extern (és a dir, aliè a ella, no originat per ella) estaran sotmeses a una força magnètica. En el cas de les càrregues elèctriques en moviment aquesta força vindrà descrita per la llei de Lorentz, com es veurà més endavant.

4.2 Camp magnètic

Anàlogament al concepte de camp elèctric, el camp magnètic és un camp vectorial que ens permet definir les interaccions a distància entre partícules magnètiques. Igualment, és útil fer servir el concepte de línies de camp magnètic de manera que a cada punt de l'espai el camp magnètic serà tangent a elles. Val la pena mencionar ja aquí, que contràriament a la força de Coulomb pel camp elèctric, la força magnètica que rep una càrrega en moviment no és paral·lela al camp magnètic sinó perpendicular a ella, tal com descriu la llei de Lorentz (veure [Sec. 4.3](#)).

Per calcular el camp magnètic ens valdrem de la següent expressió:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} \quad \text{eq. (4.1)}$$

Ara, tenint en compte el fet que en un element de corrent filiforme en un conductor unidimensional, tenim que:

$$dq\vec{v} = dq \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{dq}{dt} d\vec{\ell} = Id\vec{\ell}$$

Considerant les dues expressions anteriors podem calcular el camp magnètic creat pel corrent filiforme:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} \rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} \rightarrow B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\ell \sin \alpha}{r^2} \quad \text{eq. (4.2)}$$

on a l'expressió integral hem aplicat el principi de superposició de camps, amb tots els elements diferencials de corrent. Coneixent la geometria del conductor, podrem evaluar la integral i trobar una expressió específica per cada cas.

En el cas més general d'un conductor amb un corrent volúmic, podem fer servir la definició de densitat de corrent, de manera que

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

4.3 Força Magnètica

Si considerem una partícula elèctrica en moviment amb una certa velocitat v en el si d'un camp magnètic B , la força magnètica que patirà aquesta partícula serà

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad \text{eq. (4.3)}$$

de manera que la interacció magnètica mútua entre dues càrregues elèctriques en moviment es podrà escriure com:

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 q_2 \frac{\vec{v}_2 \times (\vec{v}_1 \times \vec{r})}{r^3} \quad \text{eq. (4.4)}$$

Si considerem una partícula elèctrica en moviment amb una certa velocitat v en el si d'un camp elèctric E i un camp magnètic B , la magnitud i direcció de la força total que pateix una càrrega elèctrica en moviment ve descrita per la **Força de Lorentz**:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{eq. (4.5)}$$

on el primer terme respon a la llei de Coulomb i el segon terme ens diu que la força degut al camp magnètic serà perpendicular a B i a v (i per tant a la trajectòria).

Si tenim en compte que un conductor per on hi circula una corrent té una densitat volúmica de càrrega n i un volum Al , podem reescriure l'equació anterior segons la **Força de Laplace**:

$$\left. \begin{aligned} \vec{F} &= (q\vec{v}_d \times \vec{B})nAl \\ I &= nqv_d A \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Sobre un element de corrent la força magnètica serà:

$$d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B} \rightarrow \vec{F} = I \int d\vec{\ell} \times \vec{B} \quad \text{eq. (4.6)}$$

4.4 Corrent rectilini

4.4.1 Camp magnètic corrent rectilini

Considerem una disposició com la de la Fig. 4.1. Primer de tot hem de calcular el vector diferencial element de corrent $d\vec{\ell}$ i el vector $\vec{r}$ distància des de l'element de corrent fins al punt on volem calcular el camp. Un cop coneguts, podem calcular-ne el producte vectorial:

$$\left. \begin{aligned} d\vec{\ell} &= (0, dy, 0) \\ \vec{r} &= (x, -y, z) \end{aligned} \right\} \rightarrow d\vec{\ell} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & dy & 0 \\ x & -y & 0 \end{vmatrix} = -x dy \hat{k}$$

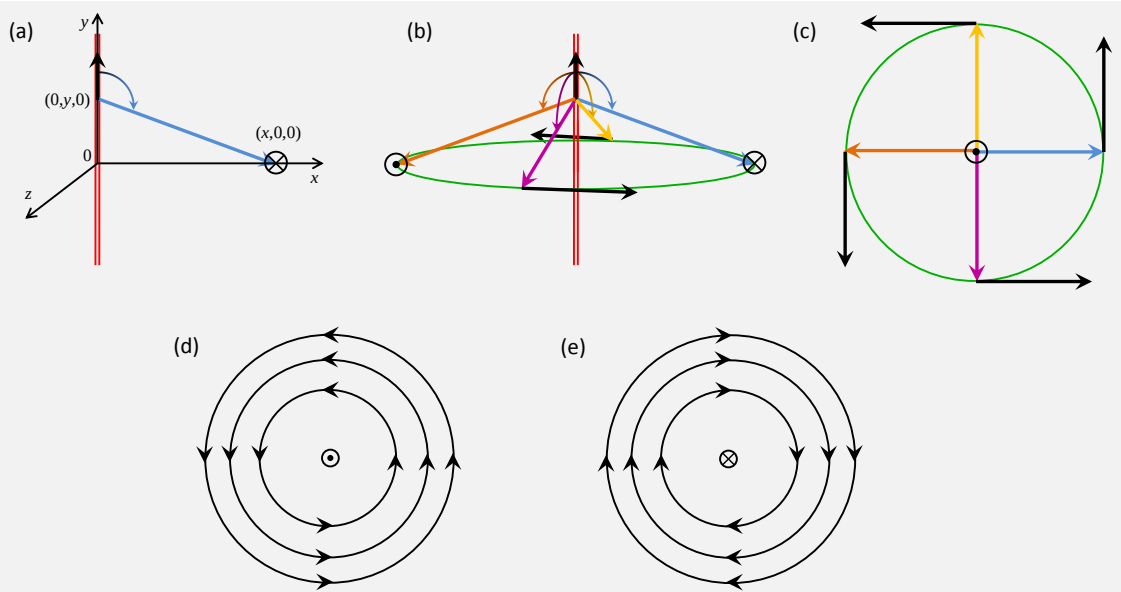


Fig. 4.1. Camp creat per un fil infinit. (a) En un cert punt. (b) En qualsevol punt. (c) En qualsevol punt, vista zenital. (d) i (e) Línies de camp per cadascun dels sentits de circulació del corrent elèctric.

Fil finit:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I (-x)}{4\pi} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \hat{k} = -\frac{\mu_0 I x \hat{k}}{4\pi} \left[\frac{y}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \right]_{y_1}^{y_2} = -\frac{\mu_0 I \hat{k}}{4\pi x} \left[\frac{y_2}{\sqrt{x^2 + y_2^2}} - \frac{y_1}{\sqrt{x^2 + y_1^2}} \right]; \quad \text{eq. (4.7)}$$

Fil finit a la mediatriu: $y_1 = -y_2 = -a$.

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I \hat{k}}{4\pi x} \left[\frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{(-a)}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right] = -\frac{\mu_0 I \hat{k} 2a}{4\pi x \sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{\mu_0 I \hat{k} a}{2\pi x \sqrt{x^2 + a^2}} \quad \text{eq. (4.8)}$$

Fil infinit:

$$\vec{B} = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{\mu_0 I \hat{k} a}{2\pi x \sqrt{x^2 + a^2}} \right) = -\frac{\mu_0 I \hat{k}}{2\pi x} \lim_{a \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}}}_{=1} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \hat{k} \quad \text{eq. (4.9)}$$

4.4.2 Força entre dos fils infinits

Suposem que tenim dos fils infinits un a prop de l'altre, amb un corrent I_1 i I_2 en la mateixa direcció. El corrent I_1 farà aparèixer un camp magnètic B_1 en la regió on es troba I_2 . Per tant, podem aplicar la llei de Laplace per calcular la força que farà aquest camp magnètic a I_2 :

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} &= I_2 d\vec{\ell}_2 \times \vec{B}_1 = I_2 d\vec{\ell}_2 \times \left(-\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \hat{k} \right) = -d\ell \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi x} \hat{j} \times \hat{k} = -d\ell \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi x} \hat{i} \\ \Rightarrow \frac{d\vec{F}}{d\ell} &= -\frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi x} \hat{i}; \end{aligned} \quad \text{eq. (4.10)}$$

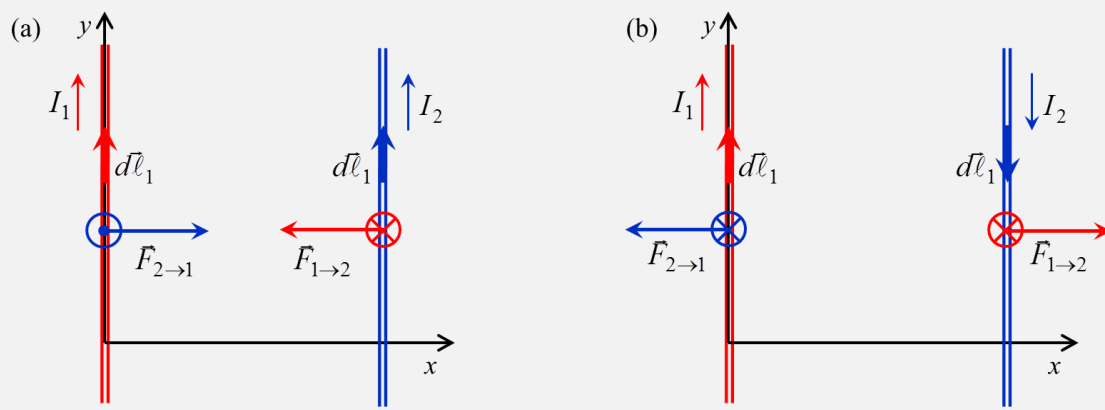


Fig. 4.2. Força entre dos fils infinits.

Segons els eixos de coordenades, el fil 1 és sobre l'eix y i el fil 2 paral·lel a y i $x > 0$, per tant el signe negatiu de la força indicarà una força atractiva. Ara bé, si la intensitat dels dos conductors és oposada l'una a l'altra, per exemple, $d\vec{l} = -d\vec{l}$ i la força serà d'igual mòdul però de signe oposat, i per tant serà repulsiva.

Evidentment, per simetria el corrent 1 es veurà afectat de la mateixa manera pel corrent 2, de manera que I_2 farà una força també atractiva sobre I_1 .

4.5 Corrent circular (espira)

4.5.1 Camp creat per un corrent circular al seu eix:

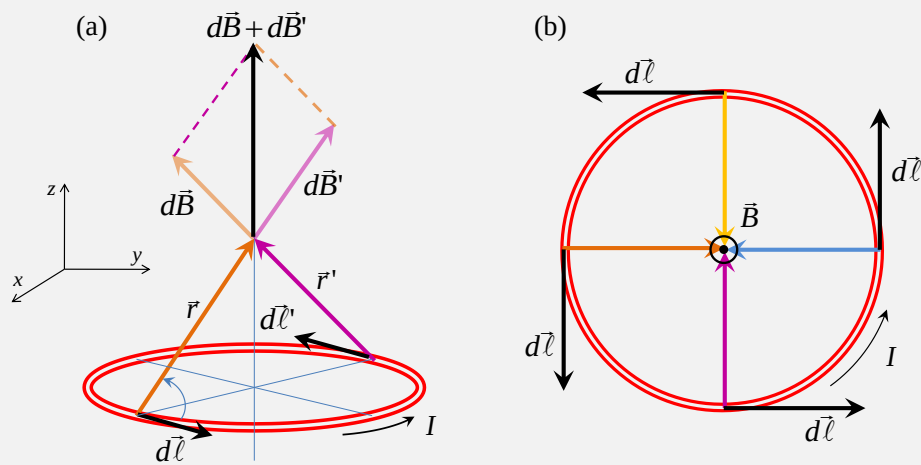


Fig. 4.3. Camp magnètic produït per una espira al seu eix.

$$\begin{aligned}
 d\vec{l} &= (dx, dy, 0) = (-R \sin \theta d\theta, R \cos \theta d\theta, 0) \\
 \vec{r} &= (0, 0, z) - (x, y, 0) = (-x, -y, z) = (-R \cos \theta, -R \sin \theta, z)
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} d\vec{l} &= (dx, dy, 0) \\ \vec{r} &= (0, 0, z) - (x, y, 0) \end{aligned}} \right\} \rightarrow d\vec{l} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -R \sin \theta d\theta & R \cos \theta d\theta & 0 \\ -R \cos \theta & -R \sin \theta & z \end{vmatrix} = \\
 = Rz \cos \theta d\theta \hat{i} + Rz \sin \theta d\theta \hat{j} + (R^2 \cos^2 \theta + R^2 \sin^2 \theta) d\theta \hat{k} = Rz(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) d\theta + R^2 d\theta \hat{k} \rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{Rz(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j})d\theta + R^2 d\theta \hat{k}}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \right] = \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \left[Rz \hat{i} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta}_{=0} + Rz \hat{j} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta}_{=0} + R^2 \int_0^{2\pi} d\theta \hat{k} \right] = \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} R^2 2\pi \hat{k} = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

4.5.1 Camp creat per un corrent circular al seu centre:

Fent $z = 0$ en l'expressió anterior obtenim:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \hat{k} \tag{4.12}$$

4.5.2 Camp creat per un solenoide (bobina)

Si volem calcular el camp creat per un conjunt d'espises, simplement haurem d'aplicar el principi de superposició, tenint en compte que z serà diferent per cadascuna de les espises ja que aquestes estaran situades a una distància diferent del punt P. Podem considerar el solenoid com un conjunt continu de N espises disposades de manera que formen una geometria cilíndrica de longitud L .

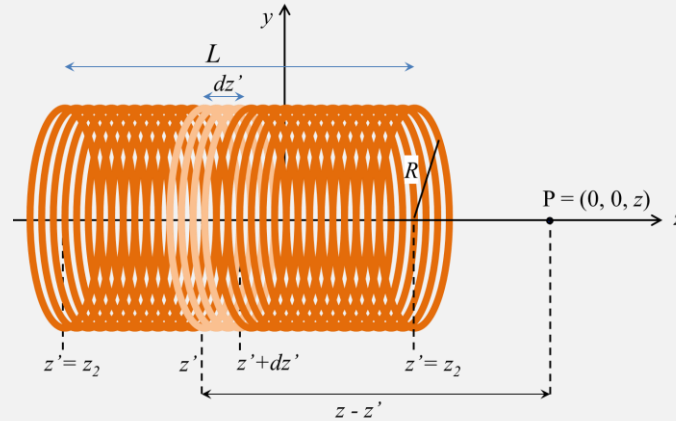


Fig. 4.4. Camp creat per un solenoide llarg.

Si anomenem la densitat d'espises $n = N/L$, llavors el nombre d'espises entre z' i $z' + dz'$ serà ndz' , on hem afegit la $'$ per no confondre la variable "posició de l'espisa" amb la variable "posició del punt on volem calcular el camp", tot respecte un únic sistema de coordenades. D'acord amb aquesta nomenclatura, podem escriure que aquest element del solenoid dz' crea un camp magnètic diferencial igual a:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}} ndz' \hat{k}$$

Llavors, integrant sobre tot el solenoid des de $z' = z_1$ fins a $z' = z_2$ (veure figura) obtindrem:

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{\mu_0 n R^2 I}{2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \hat{k} = \frac{\mu_0 n R^2 I}{2} \left(\frac{z - z'}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}} \right)_{z_1}^{z_2} \hat{k} = \\
&= \frac{\mu_0 n R^2 I}{2} \frac{1}{R^2} \left(\frac{z - z_1}{\sqrt{R^2 + (z - z_1)^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{R^2 + (z - z_2)^2}} \right) \hat{k}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

- Límit de solenoide llarg a punts del seu interior lluny dels extrems: $z_1 \gg R$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 n I}{2} \lim_{|z-z_1| \gg R} \left(\frac{z-z_1}{\sqrt{(z-z_1)^2}} - \frac{z-z_2}{\sqrt{(z-z_2)^2}} \right) \hat{k} = \frac{\mu_0 n I}{2} \left(\frac{z-z_1}{\sqrt{(z-z_1)^2}} - \frac{z-z_2}{\sqrt{(z-z_2)^2}} \right) \hat{k} \underset{\substack{z > z_1 \\ z < z_2}}{=} \frac{\mu_0 n I}{2} (1+1) \hat{k} = \mu_0 n I \hat{k}$$

eq. (4.14)

- Extrem dret: $z = z_2$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 n I}{2} \left(\frac{z_2-z_1}{\sqrt{(z_2-z_1)^2}} \right) \hat{k} \underset{z_2 > z_1}{=} \frac{\mu_0 n I}{2} \hat{k}$$

eq. (4.15)

4.5.2 Espira en un camp magnètic extern. Moment dipolar magnètic d'una espira

A partir de l'equació de Laplace es pot veure que la força neta induïda en una espira en el si d'un camp magnètic uniforme és nula, ja que cada element de corrent patirà una força d'igual mòdul i signe oposat a la força patida per un element de corrent que està situat just al lloc oposat de l'espira degut a que el corrent serà igual però en sentit contrari. Per superposició de forces, la força neta, doncs, serà nula. No obstant, apareixerà un moment de forces no nul. Això es pot veure més senzillament si tenim en compte una espira quadrada en comptes de circular.

$$\vec{F}_1 = iaB\hat{j} = -\vec{F}_3$$

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = iabB \sin \theta$$

$$\mu = iA = iab \rightarrow \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B};$$

eq. (4.16)

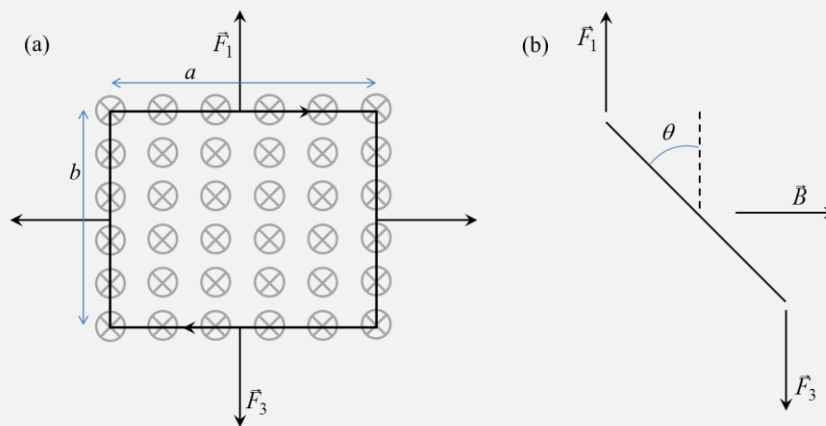


Fig. 4.5 Espira en el si d'un camp magnètic: (a) en un pla perpendicular al camp i (b) en un pla inclinat un cert angle $90^\circ + \theta$.

4.6 Moviment de càrregues puntuals en camps magnètics

4.6.1 $B \perp v$: Moviment circular

Si tenim una partícula amb càrrega elèctrica viatjant a una velocitat perpendicular a un camp magnètic extern uniforme, la força magnètica el farà descriure un moviment circular

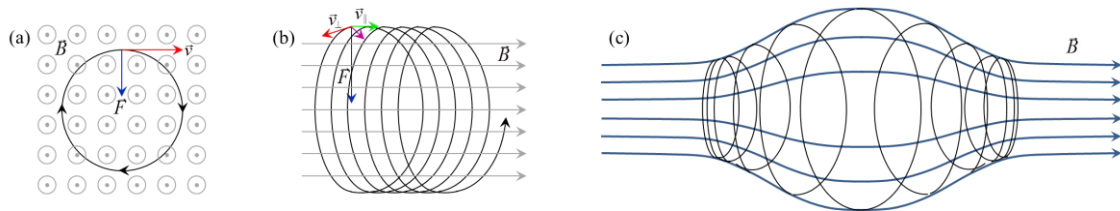


Fig. 4.6. (a) Moviment circular. (b) Moviment helicoïdal. (c) Ampolla magnètica.

Igualant la força magnètica amb l'expressió de la força centrípeta, tenim:

$$\left. \begin{aligned} F &= q\vec{v} \times \vec{B} = qvB \\ F &= m \frac{v^2}{r} \end{aligned} \right\} m \frac{v^2}{r} = qvB \rightarrow r = \frac{mv}{qB} \quad \text{eq. (4.17)}$$

També podem calcular el període i la freqüència del moviment circular com:

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{2\pi r}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} \\ r &= \frac{mv}{qB} \rightarrow v = \frac{rqB}{m} \end{aligned} \right\} \rightarrow T = \frac{2\pi m}{qB} \rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m} \quad \text{eq. (4.18)}$$

que s'anomenen període i freqüència de ciclotró i no depenen ni de v ni r .

4.6.2 Moviment helicoïdal

Si tenim una partícula elèctrica viatjant a una velocitat que forma un cert angle amb un camp magnètic extern uniforme, podem expressar la velocitat com una suma d'una component paral·lela al camp i una perpendicular. La component paral·lela no patirà cap força magnètica mentre que la perpendicular sí, d'acord amb l'apartat anterior. Aquestes components donaran lloc a un moviment rectilini uniforme i un moviment circular respectivament, la suma de les quals donarà lloc a un moviment helicoïdal (veure Fig. 4.6b).

$$\vec{v} = \vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp} \rightarrow \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q(\vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}) \times \vec{B} = q \left(\underbrace{\vec{v}_{||} \times \vec{B}}_{=0} + \vec{v}_{\perp} \times \vec{B} \right) = q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}$$

4.6.3 Confinament magnètic: miralls magnètics i ampolla magnètica. Cinturó de Van Allen, plasma per fusió.

Considerem ara el moviment helicoïdal però en el si d'un camp magnètic no uniforme, sinó que es va intensificant en la direcció del moviment de translació de la partícula, és a dir de $v_{||}$. De l'eq. (4.17) podem deduir que el radi del moviment de rotació de la partícula disminuirà quan B augmenti i la força sobre la partícula adquirirà una component oposada al moviment de translació, és a dir a la velocitat de translació en l'instant just anterior. El resultat d'aquest procés serà una frenada progressiva degut a la pèrdua d'energia cinètica de translació i guany d'energia cinètica de rotació fins al punt que la velocitat de translació s'anularà i en l'instant posterior apareixerà una component oposada a la translació fins aleshores, de manera que la partícula retrocedirà, invertint el procés. Per això una regió de l'espai on s'intensifiqui el camp magnètic s'anomena **mirall magnètic**. Si tenim una partícula entre dos miralls magnètics, aquesta restarà confinada en l'espai entre ells degut al procés descrit anteriorment, i aquesta disposició de camp s'anomenarà **ampolla magnètica**.

4.6.4 Selector de velocitats

La combinació apropiada de camps elèctrics i magnètics també dona lloc a aplicacions importants. Un exemple és el selector de velocitats, existeixen un camp magnètic i elèctric perpendiculars i orientats adequadament i constants (veure Fig. 4.7a). Si considerem una partícula carregada que entri en aquesta regió amb una velocitat constant i perpendicular als camps, la força de Lorentz ens indica que a l'instant

inicial les forces elèctrica i magnètica actuaran en sentit oposat. En funció de la magnitud dels camps, la partícula es desviarà en un sentit o altre en funció de la velocitat que dugui:

$$F = q(E - vB) = ma$$

Cal remarcar que aquesta expressió escalar només serà vàlida a l'instant inicial, ja que un cop la partícula es desvii de la direcció inicial les forces ja no actuaran en sentit oposat (però seguiran desviant la partícula d'acord amb el seu caràcter vectorial).

Un cas particular interessant es dona quan a l'instant inicial per una certa velocitat s'equilibren les forces elèctrica i magnètica, de manera que la força neta sobre la partícula és zero (i per tant la seva acceleració també). En aquest cas la partícula seguirà amb la velocitat inicial constant i no es desviarà, i aquesta condició d'equilibri es seguirà complint durant tot el trajecte de la partícula a través de la regió on hi ha els camps. Per tant, aquesta disposició de camps servirà per, donat un feix entrant de partícules, seleccionar només aquelles que duguin la velocitat que compleixi la condició d'equilibri de forces. És senzill calcular quina serà la velocitat seleccionada, simplement igualant les forces elèctrica i magnètica:

$$qE = qvB \rightarrow v = \frac{E}{B}; \quad \text{eq. (4.19)}$$

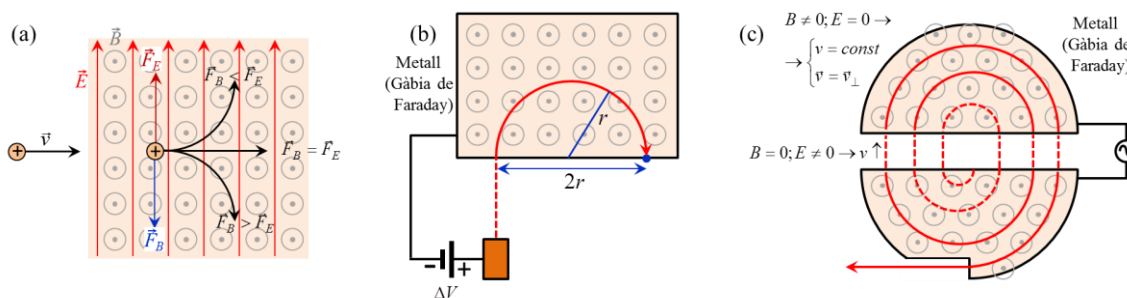


Fig. 4.7. (a) Selector de velocitats. (b) Espectròmetre de masses. (c) Ciclotró.

4.6.5 Espectròmetre de masses

Una altra aplicació dels camps magnètics és l'espectròmetre de masses, que s'utilitza per calcular la massa de les partícules, coneguda la seva càrrega. En aquest cas s'utilitza l'expressió del radi de la trajectòria circular d'una càrrega en el si d'un camp magnètic, que depèn de la massa i la velocitat [eq. (4.X)]. Per tant, conegut el radi de la trajectòria, si en coneixem la velocitat podrem saber la massa de la partícula. Suposant que la partícula ha estat accelerada des del repòs degut a una diferència de potencial ΔV (veure Fig. 4.7b) l'energia cinètica adquirida per la càrrega serà:

$$\frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V$$

Com s'ha comentat, tenint en compte aquesta expressió junt amb l'eq. (4.17):

$$\left. \begin{aligned} v^2 &= \frac{2q\Delta V}{m} \\ r &= \frac{mv}{qB} \rightarrow v^2 = \left(\frac{rqB}{m} \right)^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{2q\Delta V}{m} = \left(\frac{rqB}{m} \right)^2 \rightarrow \frac{m}{q} = \frac{(Br)^2}{2q\Delta V} \quad \text{eq. (4.20)}$$

4.6.5 Ciclotró

El ciclotró és una instal·lació que fa servir camps elèctrics i magnètics per accelerar partícules carregades fins a altes energies cinètiques. Les partícules són accelerades mitjançant una diferència de potencial entre dos discs metàl·lics. Quan entren al disc, es fan girar sense perdre velocitat mitjançant un camp magnètic

constant present només dins del disc, per tal que les partícules en tornin a sortir a la regió on hi ha la diferència de potencial. Aquesta diferència de potencial és alterna, de manera que en aquest moment ha canviat de polaritat i per tant torna a accelerar les partícules, que cada cop van adquirint més velocitat, i per tant segueixen un radi més gran, describint una espiral. Quan adquireixen la velocitat adequada es fan sortir del disc (Fig. 4.7c). Cal recordar que el període del moviment circular no depèn de la velocitat, de manera que es pot utilitzar un potencial altern amb freqüència constant. L'increment d'energia cinètica de les partícules serà:

$$\Delta E_c = nq\Delta V$$

on n serà el nombre de vegades que les partícules creuen el pas entre discs.

4.6.6 Sincrotró

El sincrotró és una instal·lació similar al ciclotró, però allí s'utilitzen camps magnètics també variables per tal que les partícules no segueixin una trajectòria espiral sinó una trajectòria circular, per tant de radi constant.

4.7 Efecte Hall

L'efecte Hall descriu l'acumulació de càrregues a la superfície dels conductors quan s'estableix un corrent I en el si d'un camp magnètic B perpendicular a I . La distribució de les càrregues dependrà del seu signe de manera que apareixerà un camp elèctric resultant perpendicular a la velocitat de deriva dels portadors de càrrega associada a la intensitat de corrent a través del conductor, tal com mostra la Fig 4.8. Aquest camp elèctric *Hall* anirà augmentant a mesura que la càrrega acumulada vagi augmentant, fins que compensi completament la força magnètica, essent la força neta en la direcció perpendicular a la intensitat igual a zero:

$$q(E_x + (\vec{v} \times \vec{B})_x) = 0 \rightarrow E_x = vB$$

En aquest moment les altres càrregues dins del conductor seguiran circulant d'acord amb la intensitat induïda per la diferència de potencial externa. No obstant, les càrregues en repòs notaran el camp E_x :

$$\left. \begin{array}{l} E_x = \frac{V_H}{X} \rightarrow V_H = XvB \\ i = NqXZv \end{array} \right\} \rightarrow V_H = \frac{iB}{qNZ} = R_H i \quad \text{eq. (4.21)}$$

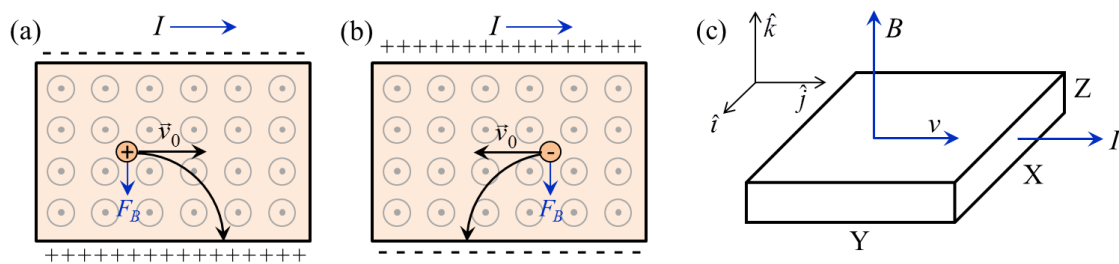


Fig. 4.8. Efecte Hall per conductors amb portadors de càrrega (a) positius i (b) negatius. (c) Geometria tridimensional del conductor.

4.8 Llei d'Ampère

Una diferència fonamental entre el camp elèctric i el camp magnètic és el fet que el camp elèctric és conservatiu i el camp magnètic no. Això es pot veure perquè la circulació del camp magnètic en una trajectòria tancada és no nula, sinó que obeeix la llei d'Ampère (que és la forma integral d'una de les equacions de Maxwell):

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \quad \text{eq. (4.22)}$$

on I és el corrent net que travessa la superfície definida per la corba tancada. La llei d'Ampère ens indica que no podem expressar el camp magnètic com el gradient d'un potencial escalar (en canvi es pot derivar l'existència d'un potencial vector, però que queda fora de l'abast d'aquesta assignatura). Aquest fet està directament relacionat amb el fet que les línies de camp magnètiques són tancades (les de camp elèctric eren obertes). Si poguéssim expressar el camp magnètic com el gradient d'un potencial escalar, el potencial canviaria monòtament en la direcció del camp magnètic (tal com ho fa pel camp elèctric) però s'arribaria a un absurd ja que partint d'un punt i seguint una línia de camp magnètic tornariem arribar al mateix punt (perquè la línia és tancada) de manera que el potencial hauria de ser el mateix, contradient la hipòtesi inicial que suposa que el potencial canvia monòtonament en la direcció del camp.

Podem comprovar la llei d'Ampère, per exemple, pel fil infinit, donat que en coneixem el camp a una distància r calculat a partir de Biot-Savart,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Per calcular la circulació del camp calculem la integral de camí, on tindrem en compte que la corba és una circumferència de radi r centrada en el fil i que per tant un element de la corba $d\ell$ serà paral·lel a B en tot moment [veure Figs 4.9a,b] de manera que el producte escalar serà igual al producte de mòduls:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B d\ell = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} d\ell = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \oint d\ell = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 I$$

de manera que obtenim el resultat de la llei d'Ampère. Ara té interès calcular la circulació del camp elèctric al llarg d'una trajectòria que no conté el fil al seu interior, tal com el mostrat a la Fig. 4.9c:

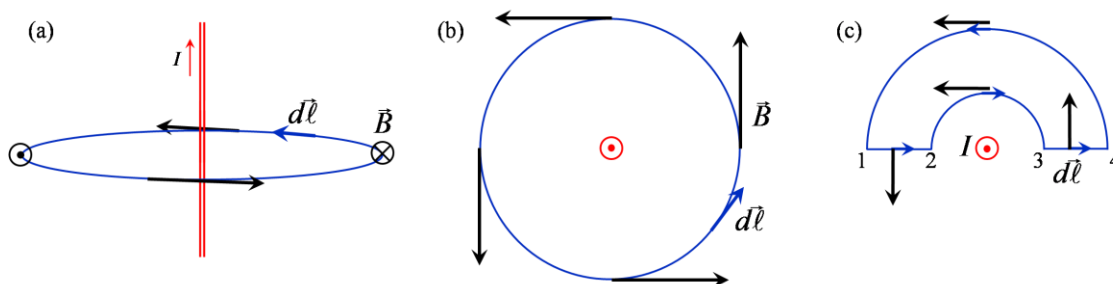


Fig. 4.9. Llei d'Ampère aplicada a fil infinit. La línia blava representa la trajectòria tancada al llarg de la qual es vol calcular la circulació del camp magnètic.

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \int_1^2 \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_2^3 \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_3^4 \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_4^1 \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_2^3 \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_4^1 \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} \int_2^3 d\ell + \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} \int_4^1 d\ell = \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} 2\pi r_2 + \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} 2\pi r_1 = -\mu_0 I + \mu_0 I = 0 \end{aligned}$$

D'altra banda, de la mateixa manera que s'utilitzava la llei de Gauss per a l'electrostàtica per calcular el camp elèctric creat per certes distribucions de càrrega amb alta simetria, en el cas del camp magnètic podem fer servir la llei d'Ampère per calcular el camp magnètic creat per corrents que presenten alta simetria. A continuació en veiem alguns casos.

4.8.1 Fil infinit

Podem comprovar el cas del fil infinit raonant inversament al que hem calculat amb l'eq. anterior:

4.8.2 Interior i exterior d'un fil infinit i gruixut (cilindre)

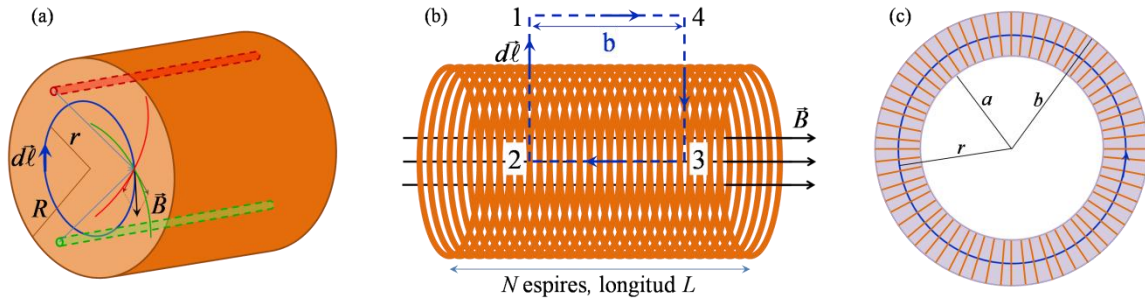


Fig. 4.10. Llei d'Ampère aplicat a (a) un cilindre, (b) un solenoide i (c) un solenoide toroidal.

$$r \leq R \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I = nqv_d A = nqv_d \pi R^2 \\ i = nqv_d A' = nqv_d \pi r^2 \end{array} \right\} \rightarrow i = I \frac{r^2}{R^2}$$

$$\left\{ \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B d\ell = B \oint d\ell = B 2\pi r \underset{\text{Ampère}}{=} \mu_0 i \rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \right\} \rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I \frac{r^2}{R^2} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}; \quad \text{eq. (4.23)}$$

$$r \geq R \rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B d\ell = B \oint d\ell = B 2\pi r \underset{\text{Ampère}}{=} \mu_0 I \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}; \quad \text{eq. (4.24)}$$

4.8.3 Bobina o Solenoide

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_2^3 \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_3^4 \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_4^1 \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_2^3 B d\ell = B \int_2^3 d\ell = Bb \underset{\text{Ampère}}{=} \mu_0 i$$

$$i = nIb \rightarrow B = \mu_0 In \quad \text{eq. (4.25)}$$

4.8.4 Solenoide toroidal

$$b > r > a \rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B 2\pi r \underset{\text{Ampère}}{=} \mu_0 IN \rightarrow B = \frac{\mu_0 IN}{2\pi r} \quad \text{eq. (4.26)}$$

$$\left. \begin{array}{l} r < a \\ r > b \end{array} \right\} \rightarrow B \underset{\text{Ampère}}{=} 0 \quad (I = 0) \quad \text{eq. (4.27)}$$

4.9 Flux magnètic i llei de Gauss pel magnetisme

El Flux magnètic es pot calcular mitjançant la definició de flux que s'ha vist al tema 1, però substituïnt el camp elèctric pel camp magnètic. El significat és el mateix: la quantitat de línies de camp que atravessen una determinada superfície:

$$\varphi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{eq. (4.28)}$$

Si considerem ara una superfície tancada, degut a que les línies de camp magnètic són línies tancades, el flux a través d'aquesta superfície serà sempre zero, ja que la unitat mínima de càrrega magnètica és un dipol magnètic, dit d'una altra manera un conjunt pol nord + pol sud (no s'originen en càrregues individuals o "monopols" magnètics perquè no existeixen):

$$\varphi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{eq. (4.29)}$$

Veiem, doncs, que existeix una assimetria entre el camp elèctric i el camp magnètic en quant a la circulació (nula pel camp elèctric i no nula pel magnètic) i el flux a través d'una superfície tancada (nula pel camp magnètic i en general no nula pel camp elèctric).

(4.10 El magnetisme com a efecte relativista)

Donat que el camp magnètic és creat per càrregues que duen una certa velocitat, és evident que el camp magnètic dependrà del sistema de referència inercial que prenem. Així, si tenim dos sistemes de referència inercials S i S' , tal que S' es mou a una velocitat v_R respecte S i mesurem el camp magnètic que crea una partícula que es mou solidàriament respecte S' , el camp magnètic respecte S' serà nul, però no el camp magnètic creat respecte S .

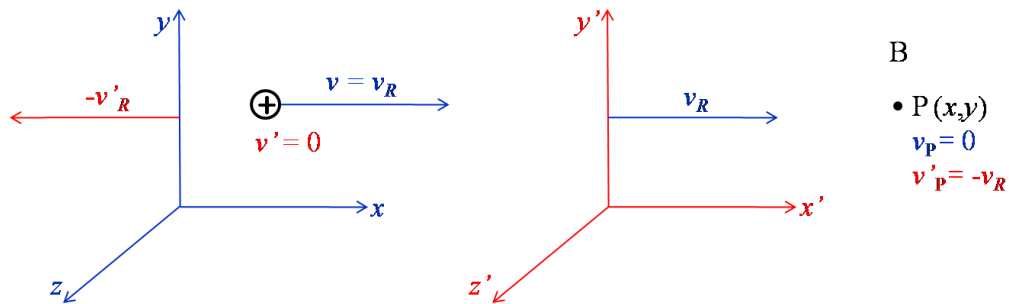


Fig. 4.11. Estat de càrrega en dos sistemes inercials diferents.