FÍSICA 2: FONAMENTS D'ELECTROMAGNETISME

5.- INDUCCIÓ ELECTROMAGNÈTICA

5.1 Llei de Faraday

En el capítol anterior hem vist que les càrregues elèctriques en moviment creen camps magnètics. En aquest capítol veurem la situació contrària: com es poden crear camps elèctrics a partir de camps magnètics. En aquest cas, els experiments van mostrar que si el flux de camp magnètic ϕ_m a través d'una superfície varia en el temps, s'indueix una força electromotriu ε al llarg del perímetre de la superfície que és proporcional al ritme de canvi. Matemàticament:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot \hat{n}dS$$

Aquesta equació es coneix com a llei de Faraday. El signe negatiu es coneix com a llei de Lenz i s'analitzarà més en detall en la secció següent. Com que la fem induïda ε pot fer moure càrregues al llarg d'un circuit tancat, es pot calcular el treball associat a aquest moviment. Com que el camp magnètic no fa treball, l'origen d'aquest treball ha de ser un camp elèctric induït. Per definició d'ε com a treball per unitat de càrrega i E com a força per unitat de càrrega es pot escriure:

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E}_{nc}\cdot d\vec{\ell}$$

Aquesta expressió mostra que aquest **camp elèctric induït no és electrostàtic**, sinó que té les **línies de camp tancades** i per tant **no és conservatiu** (Per això s'ha inclòs un subíndex $_{nc}$ en E). Igualant les dues expressions anteriors tenim:

$$\oint_C \vec{E}_{nc}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

Podem imaginar diferents maneres de tenir un flux magnètic variable en el temps a través d'una superfície per obtenir una f.e.m induïda, per exemple:

- (i) Moure la font d'un camp magnètic fix però no uniforme (per exemple un circuit o un imant), respecte de la superfície.
- (ii) Moure la superfície respecte la font d'un camp magnètic fix però no uniforme (per exemple, un circuit o un imant).
- (iii) Girar la superfície respecte un camp magnètic fix (pot ser uniforme).
- (iv) Sense moure ni superfície ni font de camp magnètic, modificar la intensitat que circula en el circuit que és la font de camp magnètic.
- (v) Modificar la mida de la superfície definida per un circuit.

Per determinar el sentit del corrent induït hem d'establir una relació entre els vectors *dS* i *dl*, ja que aquests no estan definits unívocament. Així, establirem la relació entre *dS* i *dl* segons la regla de la mà dreta, és a dir, associarem la direcció i sentit de *dS* al dit polze i la direcció i sentit de *dl* als dits restants. D'acord amb aquest criteri podem determinar el sentit del camp electric no conservatiu, i per tant del corrent induït tenint en compte el signe negatiu de la llei de Faraday. Veiem-ne un exemple senzill en el cas d'una espira en el si d'un camp magnètic variable:

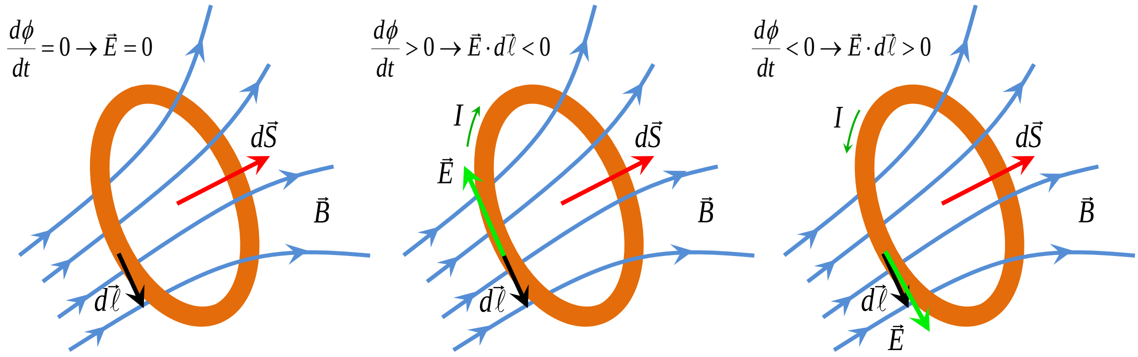

Fig. 5.1. Inducció electromagnètica en una espira en moviment en el si d'un camp magnètic constant en el temps i variable en l'espai. Esquerra: Espira estàtica. Centre: Espira es mou en sentit contrari a *dS*. Dreta: Espira es mou en el mateix sentit que *dS*.

5.2 Llei de Lenz

El signe negatiu de la llei de Faraday es coneix com la llei de Lenz: "la corrent induïda en un circuit tancat té el sentit que s'oposa al canvi que la produeix." Això es pot veure en la figura anterior. Si considerem la situació (b) en què el flux de camp magnètic a través de l'espira està augmentant, el corrent induït crearà un camp magnètic contrari al camp magnètic extern, de tal manera que farà disminuir l'augment de flux provocat pel camp extern. Si per contra considerem la situació en què el flux del camp magnètic extern a través de l'espira disminueix (c), el corrent induït crearà un camp magnètic en la mateixa direcció que el camp magnètic extern, de manera que la disminució del flux degut al camp magnètic extern es veurà parcialment compensat per l'aparició del flux induït. Aquestes situacions es poden interpretar si considerem la font del camp magnètic extern com un imant estàtic (a), que s'apropa (b) o s'allunya (c) de l'espira i el camp magnètic induït com un imant resultant del moment dipolar magnètic que s'orientarà d'acord amb la regla de la mà dreta tenint en compte el sentit del corrent.

5.2.1 Llei de Lenz i conservació de l'energia

La Llei de Lenz també es pot interpretar en termes de la conservació de l'energia. Suposem que no hi ha signe negatiu a la llei de Faraday, en la que tenim un imant apropant-se a l'espira a una certa velocitat, de manera que estem en la situació en que hi ha un augment de flux a l'espira. Aquest augment de flux provocaria un corrent i un flux induït que atrauria (acceleraria) l'imant cap a l'espira de manera que el canvi de flux a través de l'espira s'incrementaria, cosa que faria augmentar encara més el corrent i flux induït. Així tindríem un procés autoalimentat en el que hi ha un increment de l'energia cinètica de l'imant sense cap impuls extern ni pèrdua de cap energia potencial. A més, l'augment progressiu de corrent a l'espira faria aparèixer una energia dissipada per efecte Joule cada vegada major. Evidentment aquest procés està prohibit pel principi de conservació de l'energia.

Si en canvi l'espira té alguna discontinuitat, llavors la intensitat al llarg de l'espira serà zero (tot i que seguirà existint una fem d'acord amb la llei de Faraday) de manera que no hi haurà cap camp magnètic induït que perturbi el camp magnètic extern ni la seva font.

5.3 F.e.m. de moviment

Ara considerem la situació en què tenim un camp magnètic extern uniforme i modifiquem la disposició d'algun material conductor en el seu si.

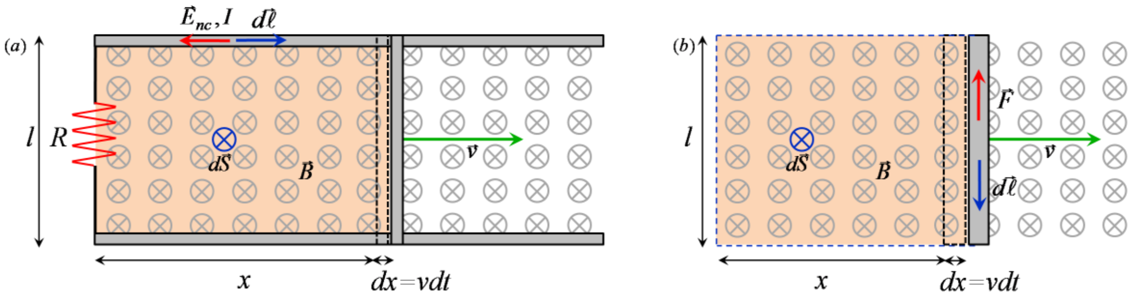

Fig. 5.2. ***Fem*** **de moviment.**

5.3.1 Barra movent-se tancant un circuit

$$\phi = \int \vec{B}\cdot d\vec{S} = B\int dS = Blx \rightarrow \varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F} = -IlB\hat{\imath} \\ I = \dfrac{\varepsilon}{R} = \dfrac{Blv}{R} \end{array}\right\} \rightarrow \vec{F} = -\frac{B^2l^2v}{R}\hat{\imath}$$

El signe negatiu ens indica que la força magnètica que apareix degut a la fem induïda anirà en contra del moviment i per tant frenarà la barra. Podem calcular l'evolució de la velocitat aplicant la segona llei de Newton:

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2l^2v}{R} \rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{B^2l^2}{mR} \rightarrow \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{B^2l^2}{mR}dt \rightarrow \ln\frac{v}{v_0} = -\frac{B^2l^2}{mR}t \rightarrow v = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

on $\tau = \dfrac{mR}{B^2l^2}$. Per tant, per temps llargs la barra s'acabarà frenant totalment.

5.3.2 Barra movent-se lliurement

Com que la superfície a escollir és lliure, podem imaginar-nos el cas en que la barra es mou sense estar en contacte amb cap circuit. En aquest cas, hi haurà la mateixa fem induïda igualment, però no un corrent induït ja que no hi ha circuit tancat. Podem, però analitzar què passarà als portadors de càrrega presents a la barra: degut a la fem induïda apareixerà una força magnètica que empeny els portadors de càrrega positius cap la part superior de la barra i els negatius cap a la part inferior. De manera similar a l'efecte Hall, l'acumulació de càrregues de signe oposat als extrems de la barra farà aparèixer un camp elèctric que en algun moment arribarà a compensar la força del camp magnètic, moment en el qual les càrregues deixaran de notar cap força neta i per tant deixaran de moure's respecte la barra. Cal notar que en aquest cas podem analitzar-ho purament des del punt de vista de la definició de la força de Lorentz, que per condició d'equilibri serà igual a zero i per tant: $E = vB \rightarrow \Delta V = vBl$ que precisament coincideix amb la fem induïda calculada anteriorment per la llei de Faraday.

També cal notar que en aquest cas, com que a l'equilibri no hi ha moviment de càrregues i per tant no hi ha corrent induït, no hi haurà força neta actuant contra el moviment de la barra, i per tant la barra seguirà amb la seva velocitat constant, al contrari que passava en el cas en què la barra tancava un circuit raó per la qual s'acabava frenant.

5.4 Generadors

5.4.1 Alternador

Un exemple

$$\phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_S BdS\cos\theta = B\cos\theta\int_S dS = BS\cos\theta$$

Si tenim una bobina amb N voltes, el flux serà N vegades el calculat anteriorment: $\phi = NBS\cos\theta$.

$$\theta = \omega t \rightarrow \phi = NBS\cos(\omega t) \rightarrow \varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = \omega NBS\sin(\omega t) = \varepsilon_{\max}\sin(\omega t)$$

on $\varepsilon_{max} = \omega NBS$.

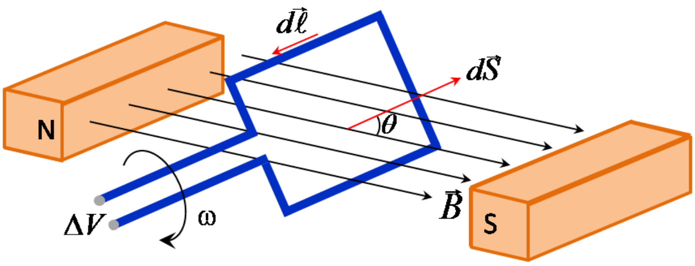

Fig. 5.3. Alternador

5.4.2 Dinamo

$$dS = \frac{r^2}{2}d\theta \rightarrow d\phi = \vec{B}\cdot d\vec{S} = BdS = B\frac{r^2}{2}d\theta \rightarrow \varepsilon = -B\frac{r^2}{2}\frac{d\theta}{dt} = -B\frac{r^2}{2}\omega$$

Veiem que en aquest cas sempre es mantindrà la polaritat entre el centre del disc (positiu) i la perifèria. Com en el cas de la barra, també podem fer una interpretació alternativa considerant directament la força magnètica que actua sobre els portadors de càrrega presents en el disc, de tal manera que apareix una força magnètica radial, que pels portadors de càrrega positius apuntarà cap al centre del disc i pels negatius cap enfora.

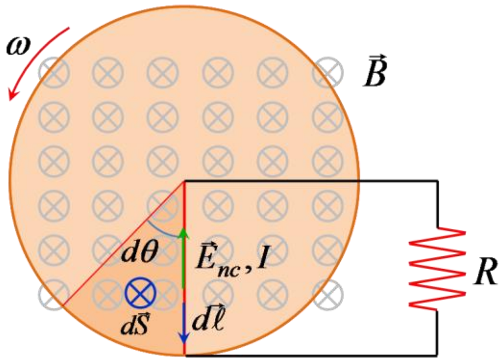

Fig. 5.4. Dinamo

5.5 Corrents de Foucault

Fins ara s'han considerat casos en els que tenim els circuits ben definits per on ha de circular el corrent induït. Però sovint ens trobem amb peces conductores que estan sotmesos a camps magnètics variables (per exemple, en aparells electrònics). En aquests materials s'estableixen uns corrents induïts d'acord amb la llei de Faraday-Lenz per intentar disminuir el ritme de canvi del camp magnètic. Aquests corrents s'anomenen corrents de Foucault (*Eddy currents* en anglès).

L'apariació d'aquests corrents comporta dos **inconventients** basats en el mateix origen d'**efecte Joule**: D'una banda una **pèrdua de potència** i de l'altra la **generació de calor** que s'ha de dissipar i alliberar al medi ambient. Per mninimitzar aquests desavantatges, el que es fa és augmentar la resistència del material, laminant-lo o canviant-li la geometria de manera que els corrents queden en gran mesura interromputs. Un bon exemple d'aquest fenòmen el constitueix un pèndol pla que oscil.la entre els pols d'un imant fort. Si el pèndol és continu, els corrents de Foucault es poden establir sense impediment i el pèndol frena ràpidament. Si el pèndol té forma de pinta, els corrents de Foucault es veuen interromputs i per tant el pèndol només es veu lleugerament esmorteït.

Aquests corrents també presenten **avantatges**, i sovint s'utilitzen com a sistemes d'**esmorteïment** en balances de precisió, o sistemes de **frenada** en trens, on els vagons tenen electroimans sobre els rails que quan s'activen indueixen corrents de Foucault als rails que els fan frenar.

5.6 Inductància

5.6.1 Autoinducció

La bobina té una geometria tal que el corrent que circula a través seu crea un flux magnètic no nul que atravessa la superfície tancada per ella mateixa. Aquest flux es pot calcular com:

$$\left.\begin{aligned} \phi &= \int \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int BdS = NBS \\ B &= \mu_0 nI = \mu_0 \frac{N}{l} I \end{aligned}\right\} \rightarrow \phi = \left(\mu_0 \frac{N^2}{l} S\right) I = \left(\mu_0 n^2 lS\right) I = LI$$

on $L = \mu_0 n^2 lS$ és el **coeficient d'autoinducció**. Per tant, podem escriure la llei de Faraday com:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

Si tenim que la intensitat que circula per la bobina és alterna, dependrà del temps i per tant la fem induïda serà no nula. Això donarà lloc a un desfassament del voltatge total que cau a la bobina respecte la el voltatge del circuit, i a una reactància inductiva, conceptes que s'han desenvolupat al capítol de circuits. La diferència de potencial total entre els extrems serà:

$$\Delta V = \varepsilon - Ir = -L\frac{dI}{dt} - Ir$$

5.6.2 Inducció mútua

De manera similar a l'explicat anteriorment, si tenim dues bobines l'una aprop de l'altra el flux magnètic degut a una d'elles atravessarà la superfície tancada per la bobina (i viceversa) de manera que hi haurà un fenòmen d'inducció mútua:

$$\phi_{12} = M_{12} I_1$$

En el cas de dues bobines concèntriques, tenim que:

$$\phi_{12} = B_1 N_2 S_1 = B_1 N_2 \pi r_1^2 = B_1 n_2 l \pi r_1^2 = \mu_0 n_1 I_1 n_2 l \pi r_1^2 \rightarrow M_{12} = \frac{\phi_{12}}{I_1} = \mu_0 n_1 n_2 l \pi r_1^2$$

S'ha de tenir en compte que els fenòmes d'autoinducció i d'inducció mútua no només tenen lloc quan hi ha bobines als circuits sinó que en general sempre apareixeran aquests fenòmens. No obstant és en el cas de les bobines on aquests fenòmens prenen més rellevància.

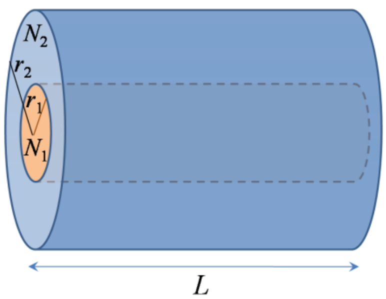

Fig. 5.5. Inducció mútua en bobines llargues concèntriques.

5.6.3 Transformador

Un transformador és un dispositiu format per dues bobines 1i 2, amb N1 i N2 espires respectivament, que estan atravessades per un nucli de ferro que serveix per conduir i augmentar la inducció magnètica B creada per un corrent, de tal manera que el flux magnètic que surt d'una de les bobines és el mateix que entra a l'altra (veure Fig. 5.6)

Una de les bobines està connectada a una font de corrent alterna i s'anomena circuit primari. L'altra bobina patirà un corrent induït i s'anomena circuit secundari.

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = -\dfrac{d\phi_1}{dt} = -N_1\dfrac{d\phi}{dt} \\ V_1 = -\dfrac{d\phi_2}{dt} = -N_2\dfrac{d\phi}{dt} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{V_2}{N_2} = \frac{V_1}{N_1} \rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \rightarrow V_2 = V_1\frac{N_2}{N_1}$$

Per la mateixa raó que hem considerat que el flux magnètic es manté, podem considerar que les pèrdues d'energia són petites i per tant igualar les potències del circuit primari i secundari, amb el que obtenim:

$$P_1 = P_2 \rightarrow I_1V_1 = I_2V_2 \rightarrow I_2 = I_1\frac{N_1}{N_2}$$

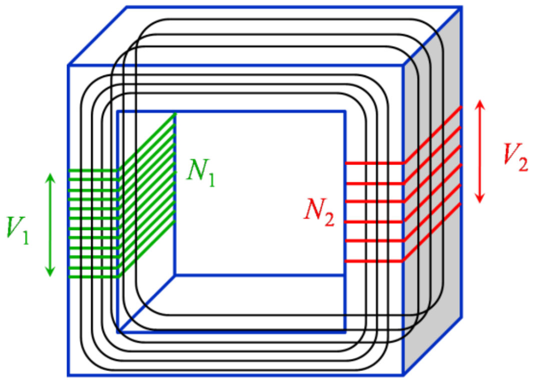

Fig. 5.6. Transformador

5.6.3. Circuit RL

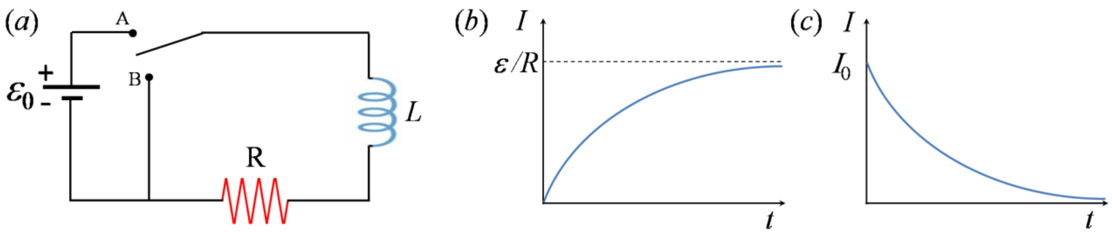

Fig. 5.7. Circuit RL: Quan l'interruptor A està tancat (B obert) s'estableix un corrent a la bobina. Quan l'interruptor B està tancat (A obert) el corrent a la bobina es suprimeix.

Interruptor en A: **Establiment d'un corrent en una bobina**:

$$\varepsilon_0 - IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon_0 - IR}{L} \rightarrow \int \frac{dI}{\varepsilon_0 - IR} = \int \frac{dt}{L} \rightarrow -\frac{1}{R}\ln(\varepsilon_0 - IR) = \frac{t + C}{L} \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln(\varepsilon_0 - IR) = -\frac{Rt}{L} + C' \rightarrow (\varepsilon_0 - IR) = C''e^{-(R/L)t} \rightarrow I = \frac{\varepsilon_0}{R} - \frac{C''}{R}e^{-(R/L)t}$$

Considerant que a $t = 0$, $I = 0$:

$$\frac{\varepsilon_0}{R} = \frac{C''}{R} \rightarrow C'' = \varepsilon_0 \rightarrow I = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_0}{R} e^{-(R/L)t} \rightarrow I = \frac{\varepsilon_0}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right) = I_f\,(1 - e^{-t/\tau})$$

on $\tau = L/R$.

Interruptor en B: **Supressió d'un corrent en una bobina**:

$$-IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \rightarrow I = I_0 e^{-t/\tau}$$

on hem suposat que a $t = 0$, $I = I_0$.

5.7. Energia Magnètica

Si recuperem l'equació diferencial per l'establiment d'un corrent a la bobina i la multipliquem per la intensitat obtindrem:

$$\varepsilon_0 - IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \rightarrow \times I \rightarrow \varepsilon_0 I - I^2 R - LI\frac{dI}{dt} = 0$$

Cada terme de l'última expressió la podem interpretar en termes de potència, és a dir d'energia per unitat de temps. Així el primer terme $\varepsilon_0 I$ correspon a la potència subministrada per la bateria (suposant resistència interna nula). El segon terme és la potència dissipada a la bateria I^2R. L'últim terme es pot interpretar com l'energia per unitat de temps que va a parar a la bobina

$$\frac{dU_m}{dt} = LI\frac{dI}{dt} \rightarrow dU_m = LIdI$$

Integrant podem calcular l'energia emmagatzemada a la bobina:

$$U_m = \int LIdI = \frac{1}{2}LI^2 + C = \frac{1}{2}LI^2$$

on hem assumit la constant d'integració $C = 0$ si prenem $U = 0$ quan $I = 0$. Com que aquest terme prové de la llei de Faraday, podem interpretar aquesta energia com l'energia deguda al camp magnètic. Per una bobina tenim $B = \mu_0 nI$ i $L = \mu_0 n^2 Al$, de manera que si introduïm aquestes expressions a l'equació anterior:

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 = \mu_0 n^2 Al\left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}Al$$

Donat que Al és el volum tancat per la bobina, si dividim tota l'eequació per aquest terme, obtindrem la densitat d'energia magnètica com:

$$u_m(\vec{r}) = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

Tot i que aquest resultat l'hem trobat per una bobina, es pot demostrar que el resultat és general i es pot aplicar en qualsevol cas. Cal notar la similaritat de l'expressió amb la densitat d'energia elèctrica trobat anteriorment:

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Cal notar que ε_0 és ara la permitivitat elèctrica!!!