



# Termodinàmica Fonamental

Luis Carlos Pardo  
EEBE, C2.4

# 1.- Introducció: Propagació de la calor

## 2.- Conducció

2.1.- Equació de Fourier

2.2.- Conducció en règim estacionari

2.2.1.- Exemples: paret, cilindre, esfera

2.3.- Conducció en règim transitori

2.4.- Exemple: procés de trempat

## 3.- Convecció

3.1.- Llei de refredament de Newton

## 4.- Radiació

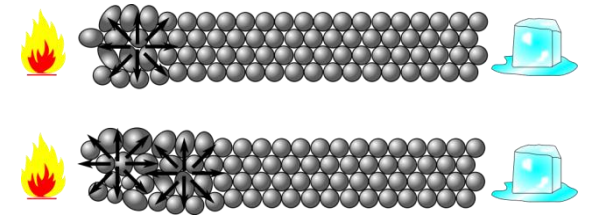
1.1.- Cos negre clàssic: Lleis de Wien i Rayleigh-Jeans

1.2.- Cos negre quàntic: Llei de Planck

## Propagació de la calor

### Conducció:

Per contacte directe  
Sense moviment de matèria



autor: Cdang

### Convecció:

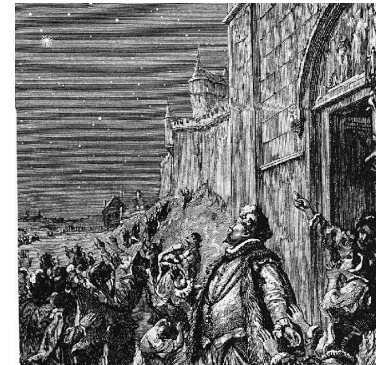
es produeix per moviment de volums de matèria  
es produeix en fluids



Prominència eruptiva al so

### Radiació:

propagació en el buit d'ones electromagnètiques  
no necessita d'un medi material

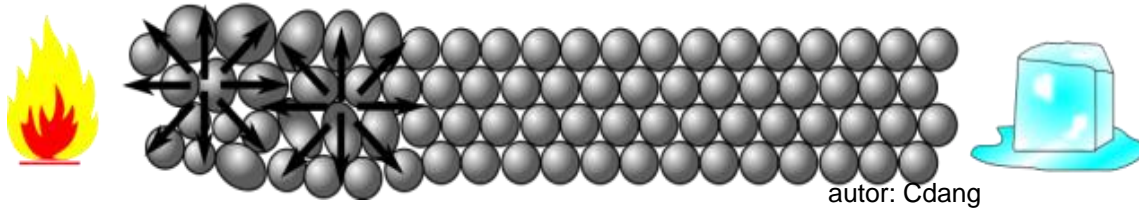
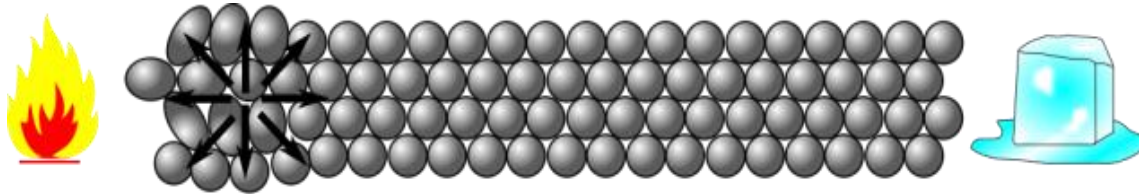


Tycho Supernova 1572

*La conducció pura només es presenta en sòlids*

*La convecció pura no existeix: sempre hi ha conducció*

# Conducció



autor: Cdang

## 1.- Introducció: Propagació de la calor

## 2.- Conducció

### 2.1.- Equació de Fourier

### 2.2.- Conducció en règim estacionari

#### 2.2.1- Exemples: paret, cilindre, esfera

### 2.3.- Conducció en règim transitori

### 2.4.- Exemple: procés de trempat

## 3.- Convecció

### 3.1.- Llei de refredament de Newton

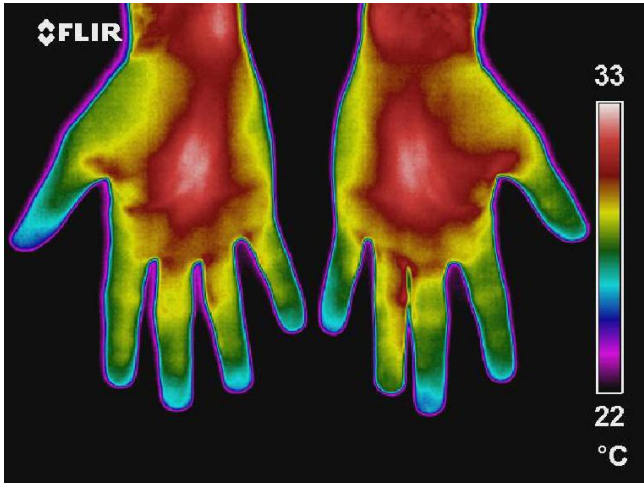
## 4.- Radiació

### 1.1.- Cos negre clàssic: Lleis de Wien i Rayleigh-Jeans

### 1.2.- Cos negre quàntic: Llei de Planck

**Camp de temperatures** com la temperatura a cada punt de l'espai depenent del temps

$$T(x, y, z, t)$$



$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Estacionari  
no depèn del temps

$$\frac{\partial T}{\partial t} \neq 0$$

Transitori  
Varia amb el temps

**Superfície isoterma** lloc geomètric amb els punts amb igual temperatura

Les superfícies isotermes no es poden tallar  
(hi ha un valor de temperatura en cada punt)

Poden variar de forma amb el temps

*Definim:*

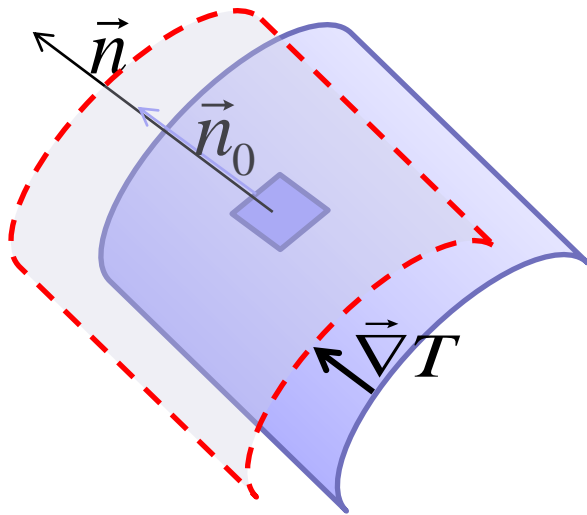
- Un vector  $\mathbf{n}$  normal a la superfície isoterma i en sentit creixent de temperatura
- El vector  $\mathbf{n}_0$  com el vector unitari de  $\mathbf{n}$

El gradient de temperatures es pot escriure com:

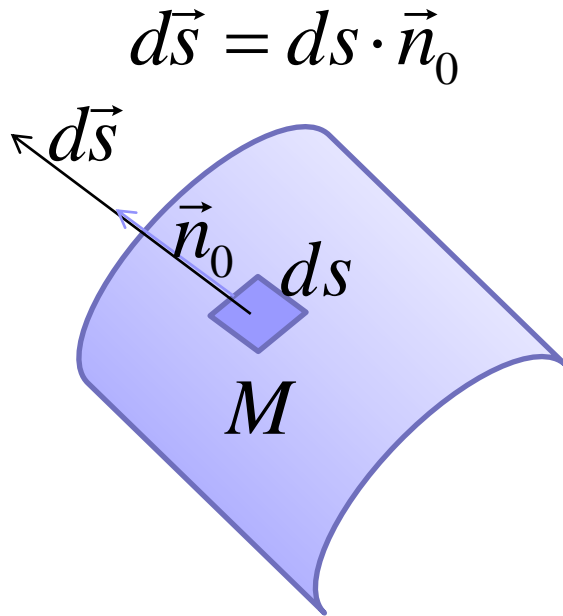
$$\text{grad } T = \underline{\Delta} T = \underline{n}_0 \frac{\partial T}{\partial n}$$

i compleix les següents propietats:

- És normal a la superfície isoterma
- El seu mòdul es la derivada de T en la direcció de la normal



Superfícies isotermes



Definim:

- Un vector **densitat de flux** de calor  $\vec{q}$  com la quantitat de calor  $dq$  que travessa la unitat de superfície per unitat de temps.

- El seu mòdul serà:

$$q = \frac{d^2 Q}{dt ds} = \frac{d\dot{Q}}{ds}$$

I per tant

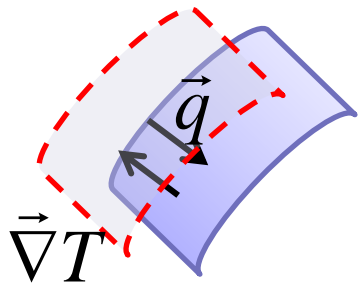
$$d\dot{Q} = \vec{q} \cdot d\vec{s}$$

i compleix les següents propietats:

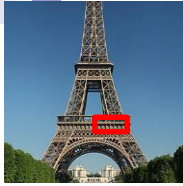
- Està dirigit cap a temperatures baixes
- És més gran quant més gran sigui el gradient de temperatura

- Unitats

$$[q] = \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2}$$







**Jean-Baptiste-Joseph  
Fourier**  
(1768-1830)

Suposem (hipòtesi més senzilla):

**Llei de Fourier**

$$\vec{q} = -\lambda \cdot \vec{\nabla} T$$

...i per tant  $\dot{Q} = -\lambda S \cdot \vec{\nabla} T$

Essent  $\lambda$  la conductivitat tèrmica.

Deduïm ara l'equació de Fourier. Suposarem el següent:

- El medi és homogeni i isòtrop
- Els paràmetres físics (com  $\lambda$ ) no varien amb la temperatura
- Els canvis de volum deguts a la temperatura seran petits ( $\alpha$  petit)
- No existeixen fonts internes de calor

Definició densitat de flux de calor  $d\dot{Q} = \vec{q} \cdot d\vec{s}$

$$\dot{Q} = \int_S \vec{q} \cdot d\vec{s} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{q} dV$$

Teorema de la divergència

Definició densitat de flux de calor  $d\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$

(el flux de calor es invers al dT)

$$dQ = -c_e dm dT = -c_e \rho dV dT$$

$$\frac{dQ}{dt} = d\dot{Q} = -c_e \rho dV \frac{dT}{dt} \Rightarrow \dot{Q} = -\int_V c_e \rho \frac{dT}{dt} dV$$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{q} dV = -\int_V c_e \rho \frac{dT}{dt} dV$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = -c_e \rho \frac{dT}{dt}$$

De les definicions de densitat de flux de calor

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = -c_e \rho \frac{dT}{dt}$$

Llei de Fourier

$$\vec{q} = -\lambda \cdot \vec{\nabla} T$$

$$\vec{\nabla} \vec{q} = -\lambda \cdot \nabla^2 T$$

$$-c_e \rho \frac{dT}{dt} = -\lambda \nabla^2 T$$

$$\nabla^2 T = \frac{c_e \rho}{\lambda} \frac{dT}{dt}$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{dT}{dt}$$

Difusivitat tèrmica del medi

$$\alpha = \frac{\lambda}{c_e \rho}$$

Equació de Fourier o Equació diferencial de la conducció

## 1.- Introducció: Propagació de la calor

## 2.- Conducció

2.1.- Equació de Fourier

2.2- Conducció en règim estacionari

2.2.1- Exemples: paret, cilindre, esfera

2.3- Conducció en règim transitori

2.4- Exemple: procés de temple

## 3.- Convecció

3.1.- Llei de refredament de Newton

## 4.- Radiació

1.1.- Cos negre clàssic: Lleis de Wien i Rayleigh-Jeans

1.2- Cos negre quàntic: Llei de Planck

Règim estacionari

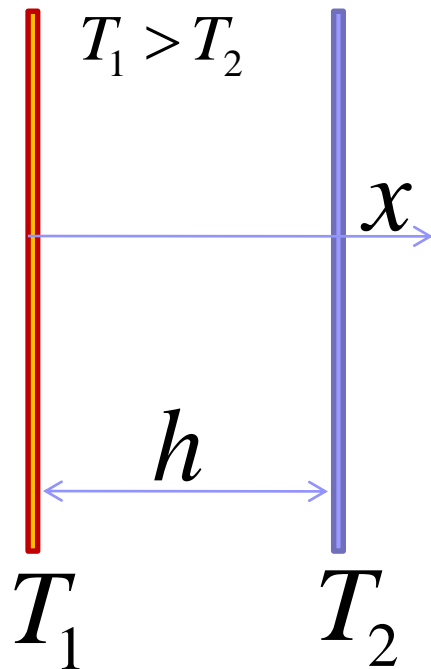
$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$



Equació de Fourier

$$\nabla^2 T = 0$$

Un cas senzill... Gradient de temperatures entre parets planes



Equació de Fourier

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = C = \frac{T_2 - T_1}{h}$$

$$T = \frac{T_2 - T_1}{h} x + C'$$

$$T = \frac{T_2 - T_1}{h} x + T_1$$

$T(x=0) = T_1$   
Condicció de contorn

Per tant el perfil de temperatures és lineal si no hi ha pèrdues

...si hi ha pèrdues es comprova experimentalment que  $T = T_1 \exp(-bx)$

Règim estacionari

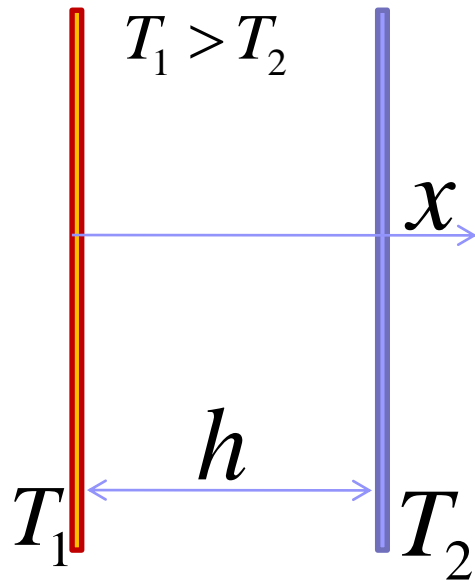
$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$



Equació de Fourier

$$\nabla^2 T = 0$$

Podem calcular el flux de calor



Resultat anterior

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_2 - T_1}{h}$$

$$\dot{Q} = \int_S \vec{q} \cdot d\vec{s} = q \cdot S = -\lambda \frac{dT}{dx} S = \lambda S \frac{T_1 - T_2}{h}$$

Llei de Fourier

$$q = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx}$$

(El signe negatiu indica que la propagació de la calor és contrària al gradient de temperatures)

El gradient de temperatures recorda a la diferència de potencial, i  $dQ/dt$  a la intensitat!!!!

$$\left( I = \frac{V_2 - V_1}{R} \right)$$

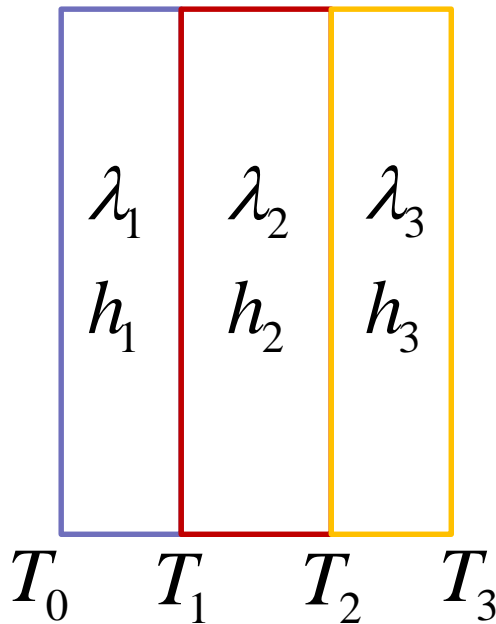
$$\dot{Q} = \frac{\lambda S}{h} (T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{R_T}$$

Resistència tèrmica

$$R_T = \frac{h}{\lambda S}$$

## Composició de parets planes

Suposem n parets planes amb conductivitats diferents



Utilitzarem la definició de resistència tèrmica  $R_i = \frac{h_i}{\lambda_i S}$

El flux de calor serà el mateix per totes les parets, per tant

$$\dot{Q} = \frac{T_0 - T_1}{R_1} = \frac{T_1 - T_2}{R_2} = \dots$$

Aïllant cada gradient de temperatura

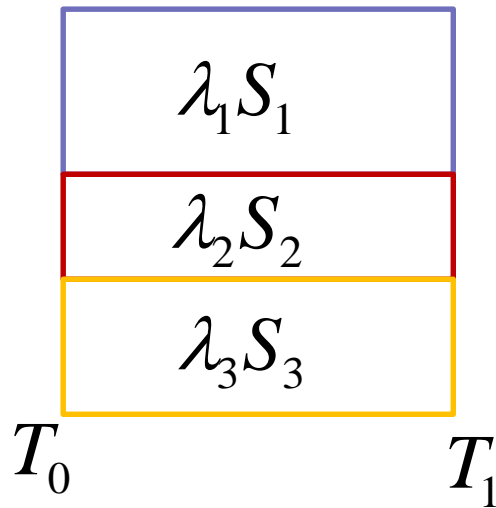
$$\begin{aligned} T_0 - T_1 &= \dot{Q}R_1 \\ T_1 - T_2 &= \dot{Q}R_2 \\ + \quad T_2 - T_3 &= \dot{Q}R_3 \\ \hline T_0 - T_3 &= \dot{Q}(R_1 + R_2 + R_3) \end{aligned}$$

Per tant no es cap sorpresa que, com en el cas de les resistències elèctriques, es pugui definir una resistència equivalent

$$R_e = R_1 + R_2 + R_3$$

## Composició de parets planes

Suposem n parets planes amb conductivitats diferents



Utilitzarem la definició de resistència tèrmica  $R_i = \frac{h_i}{\lambda_i S}$

El flux de calor serà diferent, però el gradient serà igual

$$\frac{T_0 - T_1}{R_1} = \dot{Q}_1$$

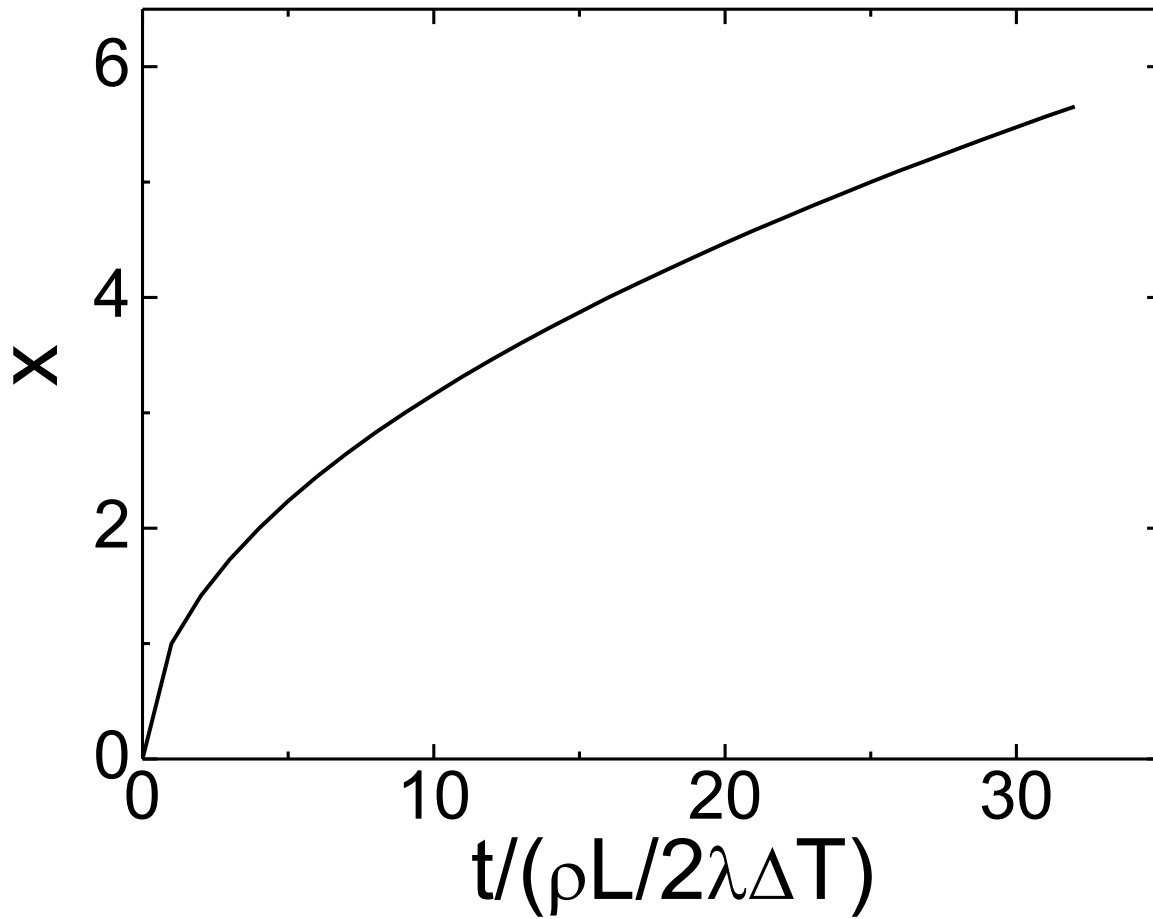
$$\frac{T_0 - T_1}{R_2} = \dot{Q}_2$$

$$+ \frac{T_0 - T_1}{R_3} = \dot{Q}_3$$

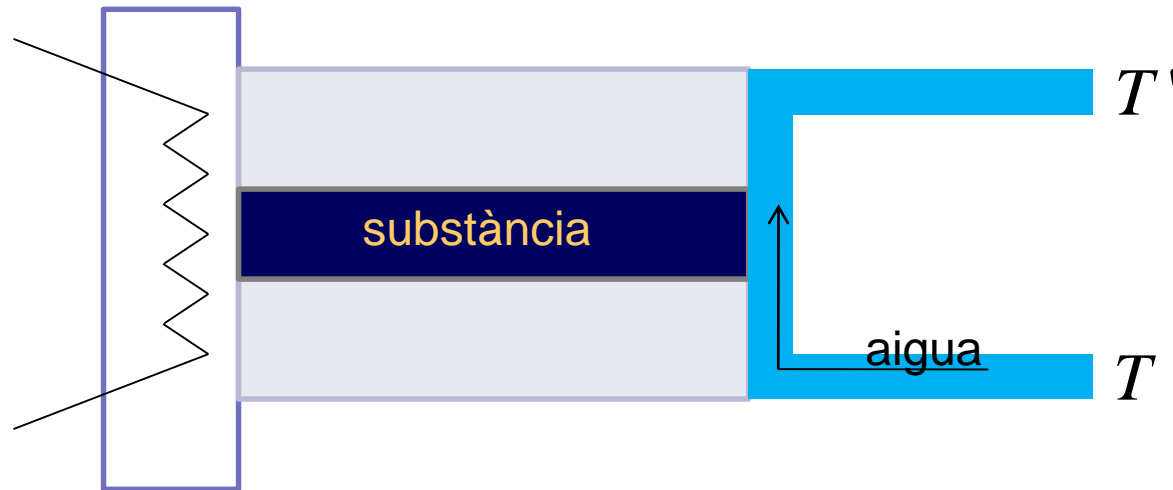
$$T_0 - T_1 \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right] = \dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2 + \dot{Q}_3$$

I de nou podem definir una resistència equivalent  $\frac{1}{R_e} = \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right]$





## Mesura experimental de la conductivitat



Es dona una quantitat de calor

- en forma de resistència elèctrica
- en forma de corrent de vapor

Es mesura l'increment de temperatura d'un fluid com l'aigua  
A partir el cabdal se sap la quantitat de calor per unitat de temps que arriba

Determinem  $\lambda$  a partir d'aquesta expressió

$$\dot{Q} = -\lambda S \frac{dT}{dx}$$

# Exemple: cilindre

Com en el cas de la paret, determinem el flux de calor

$$\dot{Q} = \int_S \vec{q} \cdot d\vec{s} = q \cdot S = -\lambda \frac{dT}{dr} S = -\lambda 2\pi r h \frac{dT}{dr}$$

Llei de Fourier

$$q = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx}$$

Separem variables

$$\frac{\dot{Q}}{\lambda 2\pi h} \frac{dr}{r} = -dT$$

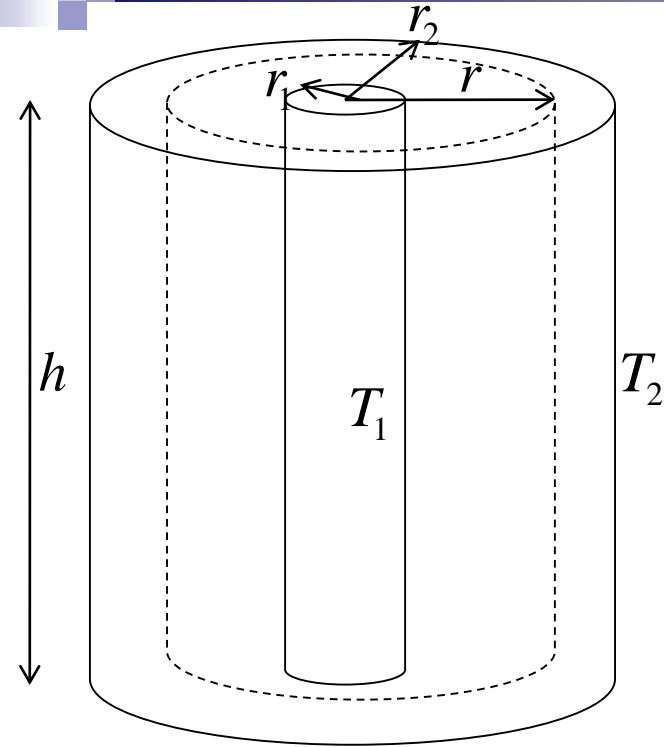
Integrem entre  $r_1$  i  $r$  i entre  $T_1$  i  $T$  a una distància arbitrària

$$T = T_1 - \frac{\dot{Q}}{\lambda 2\pi h} \ln \frac{r}{r_1}$$

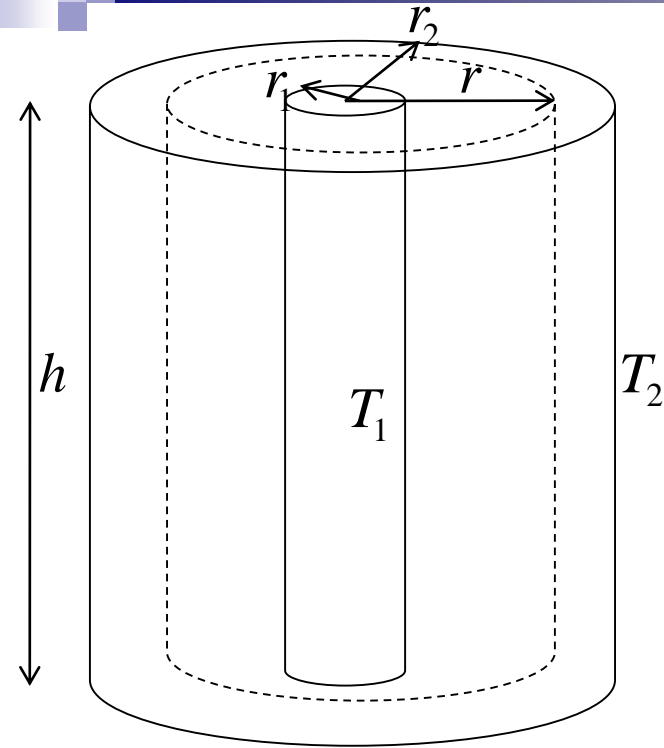
Integrem entre  $r_1$  i  $r_2$  i entre  $T_1$  i  $T_2$  a la paret i extraiem  $dQ/dt$

$$T_2 = T_1 - \frac{\dot{Q}}{\lambda 2\pi h} \ln \frac{r_2}{r_1}$$
$$\dot{Q} = (T_1 - T_2) \frac{\lambda 2\pi h}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1}$$



Com en el cas de la paret, determinem el flux de calor



$$\dot{Q} = -\lambda 2\pi r h \frac{dT}{dr} = \frac{\lambda 2\pi h}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (T_1 - T_2)$$

derivant ...o recordant

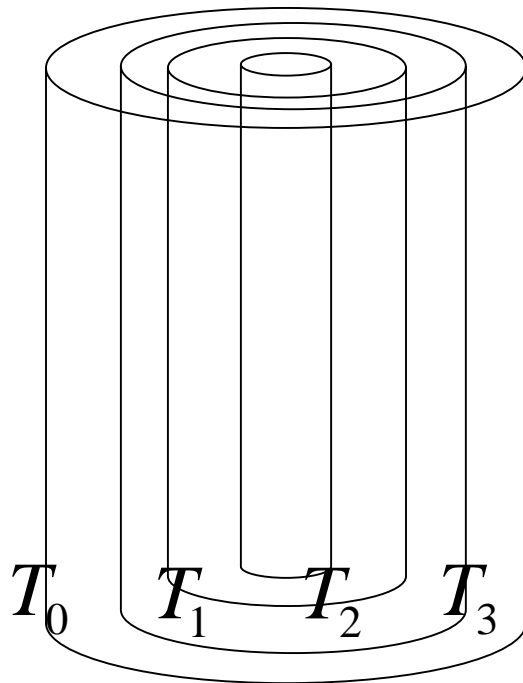
$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1}$$

Podem definir una resistència tèrmica

$$R = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\lambda 2\pi h}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{R}$$

Si tenim cilindres concèntrics, com en el cas de les resistències en sèrie, tenim que el flux que travessa tots els cilindres és el mateix



$$\dot{Q} = \frac{T_0 - T_1}{R_1} = \frac{T_1 - T_2}{R_2} = \dots$$

Aïllant cada gradient de temperatura

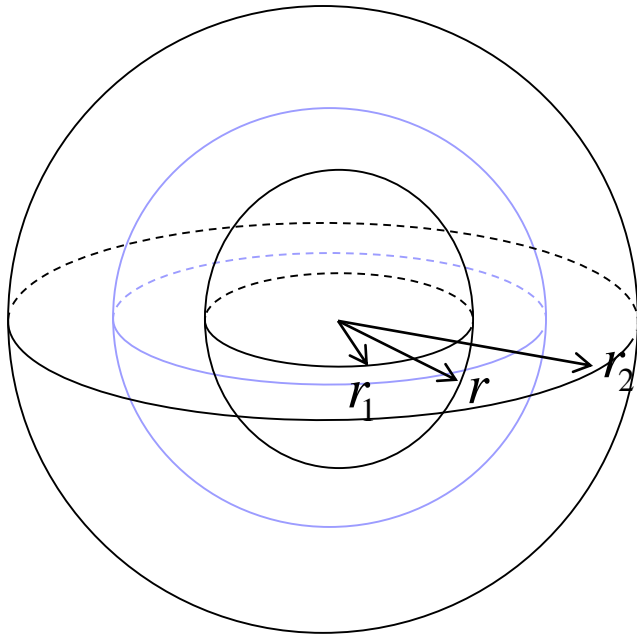
$$\begin{aligned}
 T_0 - T_1 &= \dot{Q}R_1 \\
 T_1 - T_2 &= \dot{Q}R_2 \\
 + \quad T_2 - T_3 &= \dot{Q}R_3 \\
 \hline
 T_0 - T_3 &= \dot{Q}(R_1 + R_2 + R_3)
 \end{aligned}$$

Que no és més que l'equació de resistències en sèrie

$$R_e = R_1 + R_2 + R_3$$

## Exemple: esfera

Com en el cas del cilindre, determinem el flux de calor



$$\dot{Q} = \int_S \vec{q} \cdot d\vec{s} = q \cdot S = -\lambda \frac{dT}{dr} S = -\lambda 4\pi r^2 \frac{dT}{dr}$$

Llei de Fourier

$$q = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx}$$

Separem variables

$$\frac{\dot{Q}}{\lambda 4\pi r^2} dr = -dT$$

Integrem entre  $r_1$  i  $r$  i entre  $T_1$  i  $T$  a una distància arbitrària

$$T = T_1 + \frac{\dot{Q}}{4\lambda\pi} \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right]$$

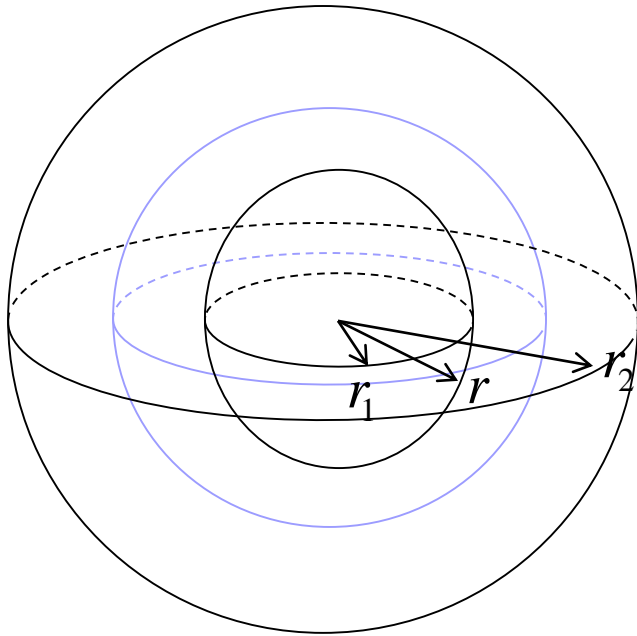
Integrem entre  $r_1$  i  $r_2$  i entre  $T_1$  i  $T_2$  a la paret i extraiem  $dQ/dt$

$$T_2 = T_1 - \frac{\dot{Q}}{4\lambda\pi} \left[ \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right]$$

$$\dot{Q} = (T_1 - T_2) \frac{4\lambda\pi}{\left[ \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right]}$$

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\left[ \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right]} \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right]$$

Com en el cas del cilindre, determinem el flux de calor



$$\dot{Q} = (T_1 - T_2) \frac{4\lambda\pi}{\left[ \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right]}$$

Podem definir una resistència tèrmica

$$R = \frac{\left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]}{4\lambda\pi}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_2}{R}$$

En el cas d'esferes concèntriques...

$$R_e = R_1 + R_2 + R_3$$

## 1.- Introducció: Propagació de la calor

## 2.- Conducció

2.1.- Equació de Fourier

2.2.- Conducció en règim estacionari

2.2.1.- Exemples: paret, cilindre, esfera

2.3.- Conducció en règim transitori

2.4.- Exemple: procés de temple

## 3.- Convecció

3.1.- Llei de refredament de Newton

## 4.- Radiació

1.1.- Cos negre clàssic: Lleis de Wien i Rayleigh-Jeans

1.2.- Cos negre quàntic: Llei de Planck



## Equació de Fourier o Equació diferencial de la conducció

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{dT}{dt}$$

- Equació diferencial en derivades parcials lineal i homogènia
- Les combinació lineal de solucions son solucions també
- Es necessiten condicions inicials i de contorn

Condicions inicials  $T(x, y, z, t = 0) = T_0(x, y, z)$

Condicions de contorn

- Temperatura a Superfícies límit

$$T_s(x, y, z, t)$$

- Continuitat del flux de calor en la separació de medis

$$(\vec{q}_1)_s = (\vec{q}_2)_s \rightarrow \lambda_1 \left( \frac{\partial T_1}{\partial n} \right)_s = \lambda_2 \left( \frac{\partial T_2}{\partial n} \right)_s$$

- Expressió de pèrdues per convecció o radiació

$$(\vec{q})_s = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_s = a(T_s - T_m)$$

On  $T_s$  es la temperatura a la superfície i  $T_m$  la temperatura del medi  
 Si no hi ha pèrdues  $(q)_s=0$

# Soluciones normales a l'equació de Fourier

Trobem les solucions a l'equació de Fourier  $\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{dT}{dt}$  que seran del tipus:

$$T(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z)\psi(t)$$

Substituïm en l'equació de Fourier:

$$\begin{aligned}\nabla^2 [\varphi(x, y, z)\psi(t)] &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} [\varphi(x, y, z)\psi(t)] \\ \psi(t)\nabla^2 \varphi(x, y, z) &= \frac{1}{\alpha} \varphi(x, y, z) \frac{d\psi(t)}{dt}\end{aligned}$$

Separem variables:

$$\varphi^{-1}(x, y, z)\nabla^2 \varphi(x, y, z) = \frac{1}{\alpha} \psi^{-1}(t) \frac{d\psi(t)}{dt}$$

L'única forma de que hagi solució és que aquesta sigui una constant que anomenarem  $-\omega^2$

$$\frac{1}{\alpha} \psi^{-1}(t) \frac{d\psi(t)}{dt} = -\omega^2$$

$$\varphi^{-1}(x, y, z)\nabla^2 \varphi(x, y, z) = -\omega^2$$

## 1.- Introducció: Propagació de la calor

## 2.- Conducció

2.1.- Equació de Fourier

2.2.- Conducció en règim estacionari

2.2.1- Exemples: paret, cilindre, esfera

2.3.- Conducció en règim transitori

2.4- Exemple: procés de trempat

## 3.- Convecció

3.1.- Llei de refredament de Newton

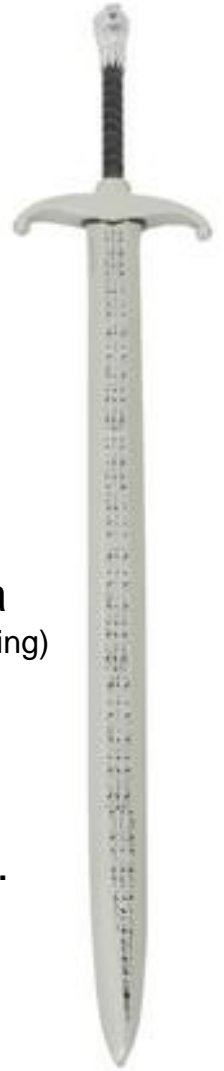
## 4.- Radiació

1.1.- Cos negre clàssic: Lleis de Wien i Rayleigh-Jeans

1.2.- Cos negre quàntic: Llei de Planck

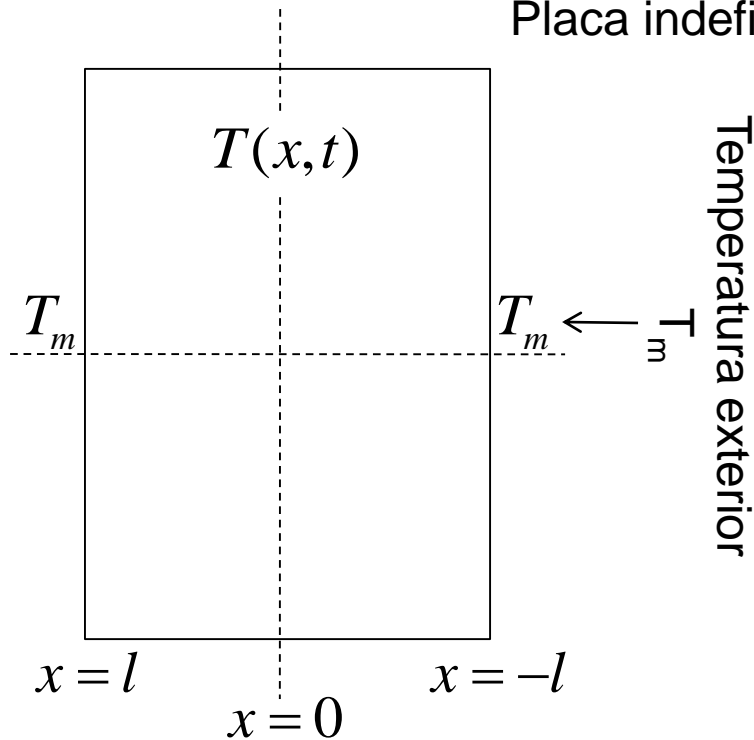
Situació física:

- Tinc una paret (una espasa, per exemple) a una temperatura  $T_0$
- De sobte la introdueixo en un medi (aigua) a una temperatura  $T_m$
- La temperatura final serà, per tant  $T_m$ , i també constant en tota l'espasa  
(equilibrium is coming)
- Per poder fer càlculs suposo que la calor que surt és proporcional a la diferència entre la temperatura de l'espasa i la temperatura del medi.



## Exemple: procés de trempat

Placa indefinida en les direccions y i z: problema unidimensional



Condicció inicial  $T(x, t = 0) = T_0$

Condicció de contorn  $T(x = \pm l, t) = T_s$

Pèrdues:  $(\vec{q})_s = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_s = a(T_s - T_m)$

Resolent per la variable  $\theta = (T - T_m)$ , les solucions normals en aquest cas son:

$$\frac{1}{\alpha} \psi^{-1}(t) \frac{d\psi(t)}{dt} = -\omega^2$$

per la part temporal

$$\varphi^{-1}(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = -\omega^2$$

per la part espacial

Suposarem que  $w \neq 0$ , si  $w = 0$  tenim l'estat estacionari...

# Exemple: procés de trempat

Placa indefinida en les direccions y i z: problema unidimensional



Condicció inicial  $T(x, t = 0) = T_0$

Condicció de contorn  $T(x = \pm l, t) = T_s$

Pèrdues:  $(\vec{q})_s = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_s = a(T_s - T_m) = a\theta$

Resolent per la variable  $\theta(x,t) = (T(x,t) - T_m)$ , les solucions normals en aquest cas son:

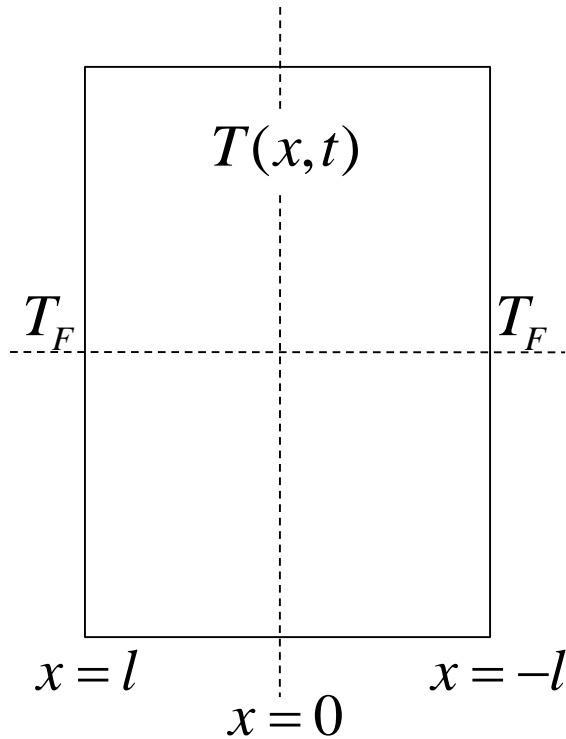
$$\frac{1}{\alpha} \psi^{-1}(t) \frac{d\psi(t)}{dt} = -\omega^2$$

per la part temporal

$$\varphi^{-1}(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = -\omega^2$$

per la part espacial

Suposarem que  $w \neq 0$ , si  $w = 0$  tenim l'estat estacionari...



Les solucions son del tipus:

per la part espacial

$$\varphi^{-1}(x) \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} = -\omega^2$$

$$\varphi(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x)$$

per la part temporal

$$\frac{1}{\alpha} \psi^{-1}(t) \frac{d\psi(t)}{dt} = -\omega^2$$

$$\psi(t) = C \exp(-\alpha \omega^2 t)$$

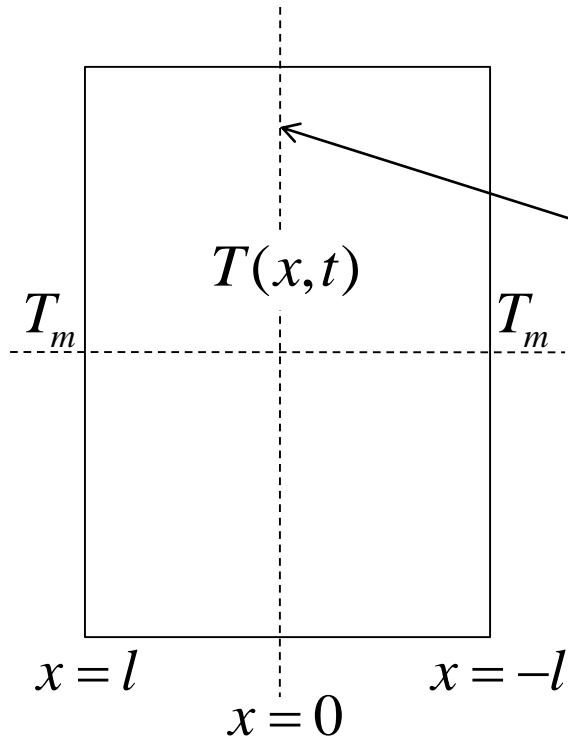
$$\tau = \frac{1}{\alpha \omega^2}$$

Per tant la solució més general serà:

$$\theta(x, t) = C [A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x)] \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Imposem ara les condicions de contorn

Condicions de contorn:



$$\varphi(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x)$$

Imposem simetria  $\rightarrow A = 0$  per tant:

$$\varphi(x) = B \cos(\omega x)$$

Les pèrdues a la superfície son Newtonianes  $\dot{q} = \mp \lambda \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=\pm l} = a\theta_{x=\pm l}$

$$\pm \lambda C [-B\omega \sin(\omega x)] \cdot \exp(-\alpha \omega^2 t) = aC [B \cos(\omega x)] \cdot \exp(-\alpha \omega^2 t)$$

$$x = l \quad -\lambda [-B\omega \sin(\omega l)] = aB \cos(\omega l)$$

$$x = -l \quad \lambda [+B\omega \sin(\omega l)] = aB \cos(\omega l)$$

Són la mateixa equació

$$\tan^{-1}(\omega l) = \frac{\omega \lambda}{a} = \frac{\omega l}{a l / \lambda} = \frac{\omega l}{B_i}$$

Anomenem nombre de Biot  $B_i = a l / \lambda$



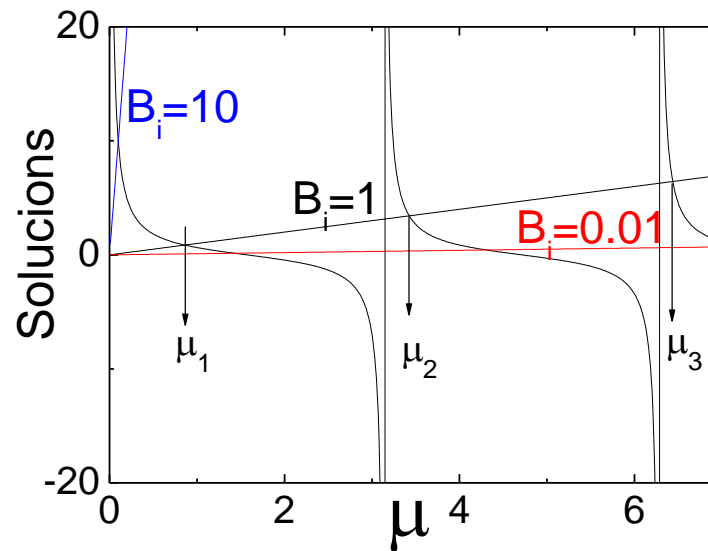
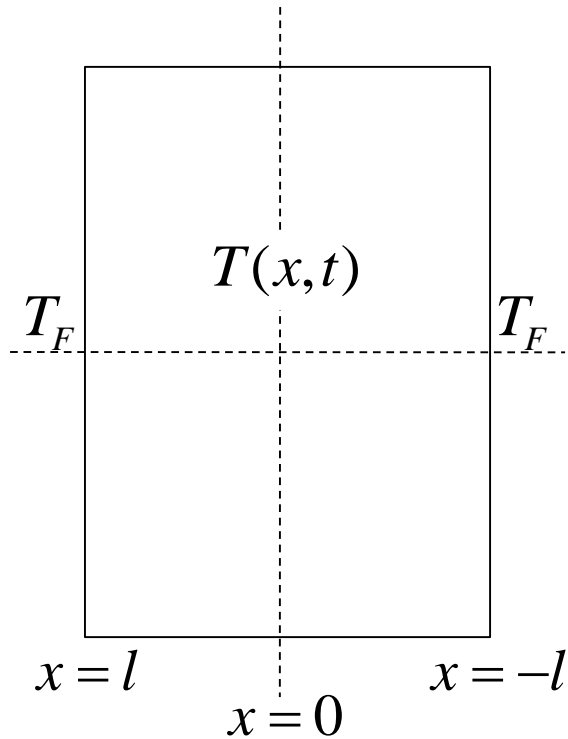
Solució:

$$\theta(x, t) = BC \cos(\omega x) \cdot \exp(-\alpha \omega^2 t)$$

i  $\omega$  ha de complir la condició

$$\tan^{-1}(\omega l) = \frac{\omega \lambda}{a} = \frac{\omega l}{al/\lambda} = \frac{\omega l}{B_i} = \frac{\mu}{B_i} \leftarrow \mu = \omega l$$

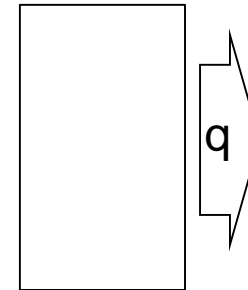
Però això te infinites solucions  $\mu_i!!!$  (argh!)



Significat físic del nombre de Biot  $B_i = al/\lambda$

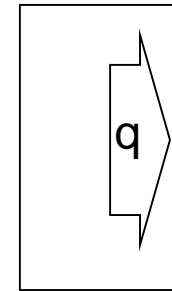
$$B_i = \frac{al}{\lambda}$$

$a \cdot l$ : Representa les pèrdues de calor  
Per les parets exteriors  
 $q = a(T_S - T_F)$



calor bescanviat amb l'exterior

$\lambda$ : Representa la conductivitat



calor bescanviat en l'interior

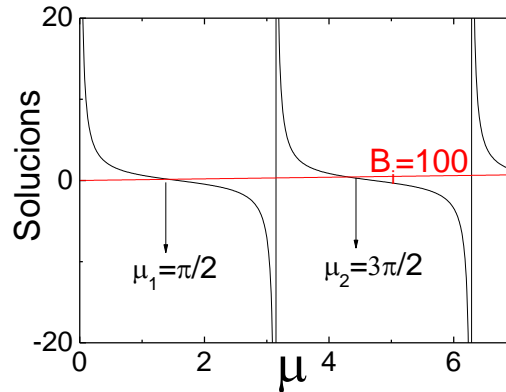
# Exemple: procés de trempat

Analitzem les solucions límit, tenint en compte  $a$ =pèrdues,  $\lambda$ =conductivitat:

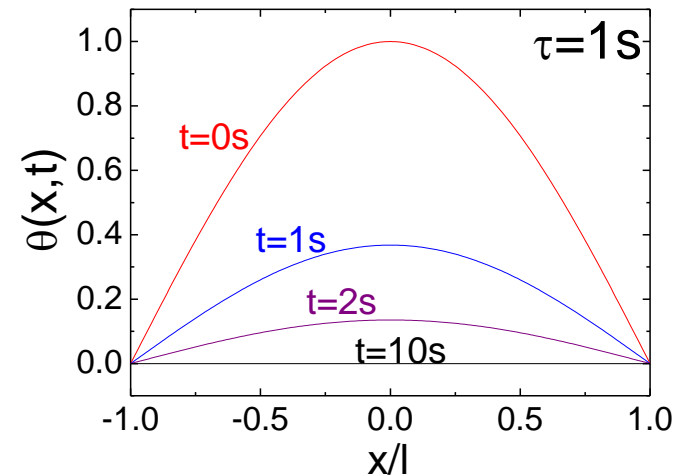
*Pèrdues molt més grans que la conductivitat*

$$B_i = \frac{al}{\lambda} \rightarrow \infty$$

$$\mu_n = (2n-1) \frac{\pi}{2}$$



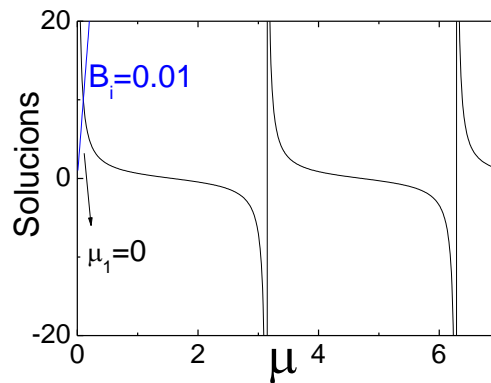
$$\theta(x,t) = BC \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$



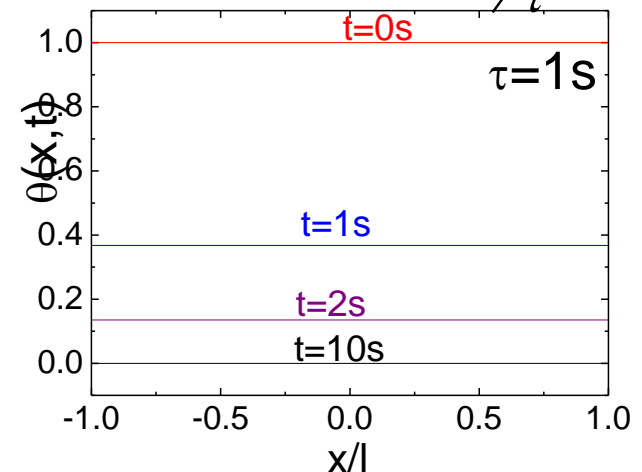
*Conductivitat molt més grans que les pèrdues*

$$B_i = \frac{al}{\lambda} \rightarrow 0$$

$$\mu = 0$$



$$\theta(x,t) = BC \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$



Per casos intermitjos, la solució més general serà

$$0 < B_i = \frac{al}{\lambda} < \infty$$

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(x, t)$$

Imposem la condició inicial  $T(x, 0) = T_0 \rightarrow \theta_0 = T_0 - T_F$

$$\theta(x, 0) = \theta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_j \cos(x\omega_n)$$

Calculem ara els coeficients  $B_n$  multiplicant per  $\cos(\omega_i x)$  i integrem entre  $-l$  i  $l$  (el que volem és, de fet, carregar-nos tots els terme menys el terme  $i$ )

$$\int_{-l}^l \theta_0 \cos(x\omega_i) dx = \int_{-l}^l \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} C_j \cos(x\omega_n) \cos(x\omega_i)}_{}$$

Aquesta integral només és diferent de zero quan  $n=i$ , i per tant

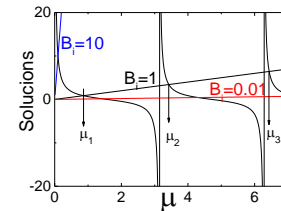
$$C = \frac{2\theta_0 \sin(\omega_j l)}{\omega_n l + \sin(\omega_j l) \cdot \cos(\omega_j l)} \quad \text{yujuuuu!}$$

i la solució final serà...

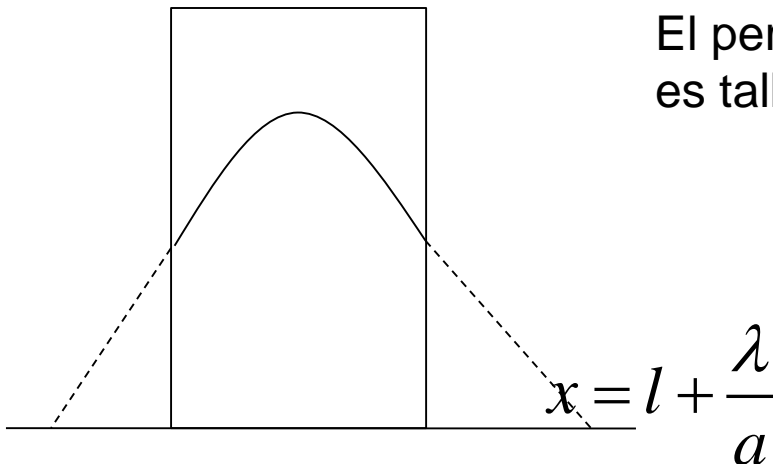
I la solució final serà:

$$\theta(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\theta_0 \sin(\omega_j l)}{\omega_j l + \sin(\omega_j l) \cdot \cos(\omega_j l)} \cos(\omega_j x) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

recordem que  $\omega_j$  surt de solucionar l'equació transcendent...



Suposem que només el primer coeficient és important, llavors:



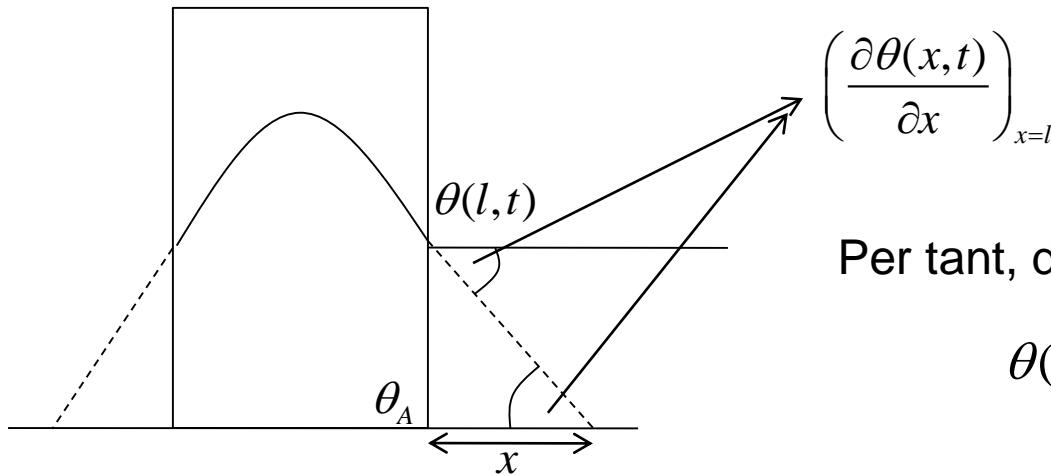
El perfil de temperatures és tal que es tallen al eix d'abscisses a :

$$x = l + \frac{\lambda}{a}$$

# Exemple: procés de trempat

Si només ens quedem amb el primer terme  $\theta(x,t) = \frac{2\theta_0 \sin(\omega_1 l)}{\omega_1 l + \sin(\omega_1 l) \cdot \cos(\omega_1 l)} \cos(\omega_1 l) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

La seva derivada, calculada a  $x=l$   $\left(\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right)_{x=l} = -\frac{2\theta_0 \sin(\omega_1 l)}{\omega_1 l + \sin(\omega_1 l) \cdot \cos(\omega_1 l)} \sin(\omega_1 l) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$



Per tant, del dibuix:

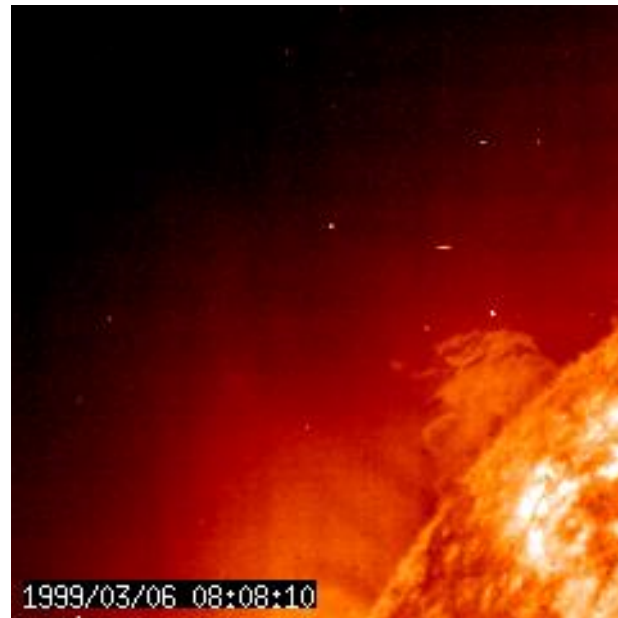
$$\theta(l,t) = -\left(\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right)_{x=l} \cdot x$$

~~$$\frac{2\theta_0 \sin(\omega_1 l)}{\omega_1 l + \sin(\omega_1 l) \cdot \cos(\omega_1 l)} \cos(\omega_1 l) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = -\frac{2\theta_0 \sin(\omega_1 l)}{\omega_1 l + \sin(\omega_1 l) \cdot \cos(\omega_1 l)} x \sin(\omega_1 l) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$~~

$$x = \frac{\tan^{-1} \omega_1 l}{\omega_1} = \frac{l}{B_i} = \frac{\lambda}{a}$$

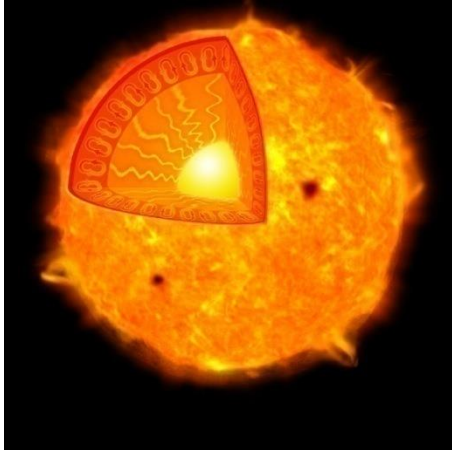
Q.E.D.

# Convecció



Es produeix per les variacions de densitat degudes a la temperatura

Es produeix als estels



Als núvols



Amb la lava



A la cuina





És molt complicada de tractar: depèn del cas particular  
Aproximem tots els processos per la llei de refredament de Newton

$$\dot{Q} = hS (T_s - T_\infty)$$

S = Superfície

← h = coeficient de convecció W/K·m<sup>2</sup>      T<sub>s</sub> = temperatura a la superfície →

h = coeficient de convecció W/K·m<sup>2</sup>      T<sub>s</sub> = temperatura a la superfície

El bescanvi es produeix entre la superfície del cos i el fluid,  
l'energia es transportada posteriorment pel flux de fluid

Per tractar la convecció recordem primer el nombre de Biot B<sub>i</sub> :

$$B_i = \frac{aL}{\lambda} = \frac{hL}{\lambda} \approx \frac{\text{pèrdues}}{\text{conductivitat}}$$

on L és una dimensió característica del cos, per exemple L=V/S

Bi petit:

la conductivitat és alta i els gradients de temperatura seran petits  
podem assumir el model de blocs  
si Bi<0.1 l'error és inferior al 5%

Suposem pèrdues Newtonianes (que compleixen la llei de refredament de Newton)

$$dQ = hS (T_S(t) - T_\infty) dt$$

La calor perduda és, òbviament:

$$dQ = -mc_e dT = -\rho V c_e dT$$

Per tant:

$$hS (T_S(t) - T_\infty) dt = -\rho V c_e dT$$

Introduint la variable  $\theta = T(t) - T_0$ ; i els diferencials  $d\theta = dT$

$$\left[ \frac{d\theta}{\theta} \right]_{\theta_0}^{\theta} = - \left[ \frac{hS}{\rho V c_e} dt \right]_0^t$$

Finalment obtenim:

$$\theta = \theta_0 \exp\left(-\frac{hS}{\rho V c_e} t\right)$$

Podem definir un temps característic:  $\tau = \frac{\rho V c_e}{hS}$   $\longrightarrow$  fa el refredament més lent  
 $\longrightarrow$  fa el refredament més ràpid

$$\theta = \theta_0 \exp\left(-\frac{hS}{\rho V c_e} t\right) = \theta_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Definint un temps adimensional, o nombre de Fourier com

$$F_0 = \frac{\alpha t}{L^2} \quad \alpha = \frac{\lambda}{c\rho}$$

i recordant el nombre de Biot  $B_i = \frac{aL}{\lambda} = \frac{hL}{\lambda}$  podem escriure l'expressió anterior com

$$\theta = \theta_0 \exp\left(-B_i F_0\right)$$

## 1.- Introducció: Propagació de la calor

## 2.- Conducció

2.1.- Equació de Fourier

2.2.- Conducció en règim estacionari

2.2.1- Exemples: paret, cilindre, esfera

2.3.- Conducció en règim transitori

2.4.- Exemple: procés de trempat

## 3.- Convecció

3.1.- Llei de refredament de Newton

## 4.- Radiació

1.1.- Cos negre clàssic: Lleis de Wien i Rayleigh-Jeans

1.2.- Cos negre quàntic: Llei de Planck

# Radiació

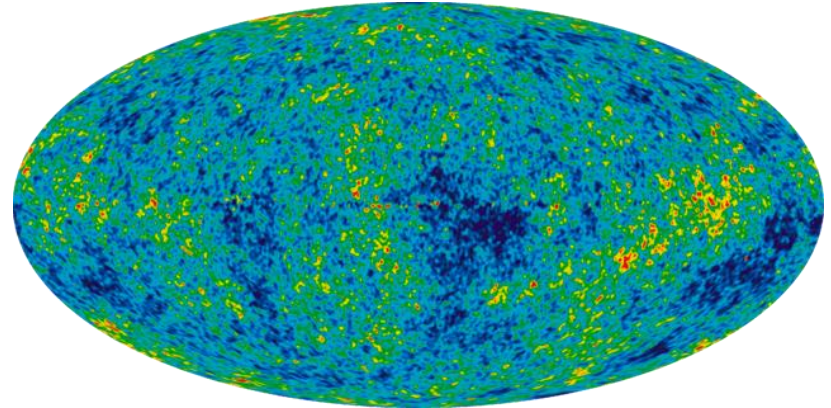


Tycho Supernova 1572

Lava



Radiació de fons còsmica



Cos humà



Teoria quàntica



La longitud d'ona de la radiació emesa/absorbida depèn només de la temperatura

Nom	Definició	Unitats	Comentaris
Energia emesa pel cos		[Q]=J	
Flux radiant	$\Phi = \frac{dQ}{dt}$	[Φ]=Watt	
Poder emissiu o Radiància	$M = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{dQ}{dSdt}$	[M]=Watt/m <sup>2</sup>	
Emitància monocromàtica	$m_\lambda = \frac{dM}{d\lambda}$	[m <sub>λ</sub> ]=Watt/m <sup>2</sup>	$M = \int_0^\infty m_\lambda d\lambda$
Poder absorbent Absorbància	$\alpha = \frac{d\phi_a}{d\phi}$	[α]=S.U.	Relació entre el flux que arriba i el que s'absorbeix. 0<α<1 (cos negre→α=1)
Absorbància monocromàtica	$\alpha_\lambda = \frac{d\alpha}{d\lambda}$	[α <sub>λ</sub> ]=S.U.	$\alpha = \int_0^\infty \alpha_\lambda d\lambda$
Reflectància	$r = \frac{d\phi_r}{d\phi}$		Relació entre el flux que arriba i el que s'absorbeix. 0<r<1. r+α=1
Densitat d'energia	$U = \frac{dQ}{dV}$	[U]=J/m <sup>3</sup>	Energia continguda en un volum V
Densitat d'energia monocromàtica	$U_\lambda = \frac{dU}{d\lambda}$	[U <sub>λ</sub> ]=J/m <sup>3</sup>	$U = \int_0^\infty U_\lambda d\lambda$

L'emitància i l'absorbància monocromàtica depenen exclusivament de la temperatura del cos i de la longitud d'ona

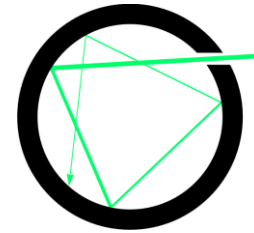
En 1854 Kirchoff va demostrar que,  $\frac{m_\lambda}{\alpha_\lambda} = cte$

Per tant els bons emissors son bons absorbents

## Cos negre

Un cos negre absorbeix tota l'energia que arriba a la seva superfície,

$$\alpha_\lambda = 1, \forall \lambda$$



Per la llei de Kirchoff  $m_\lambda = (m_\lambda)_n cte, \forall \lambda$ , i per tant  $\frac{m_\lambda}{\alpha_\lambda} = (m_\lambda)_n$

La relació entre absorbància i emitància és independent del material.

Els espectre d'emissió i absorció d'un element son iguals

Hydrogen Absorption Spectrum



Hydrogen Emission Spectrum



400nm

700nm

H Alpha Line  
656nm  
Transition N=3 to N=2



La radiació d'un cos negre és independent del material que tinguem en compte  
La radiació emesa es calcula en física clàssica a partir de:

Equació de Rayleigh-Jeans  
(mecànica i l'electrodinàmica)

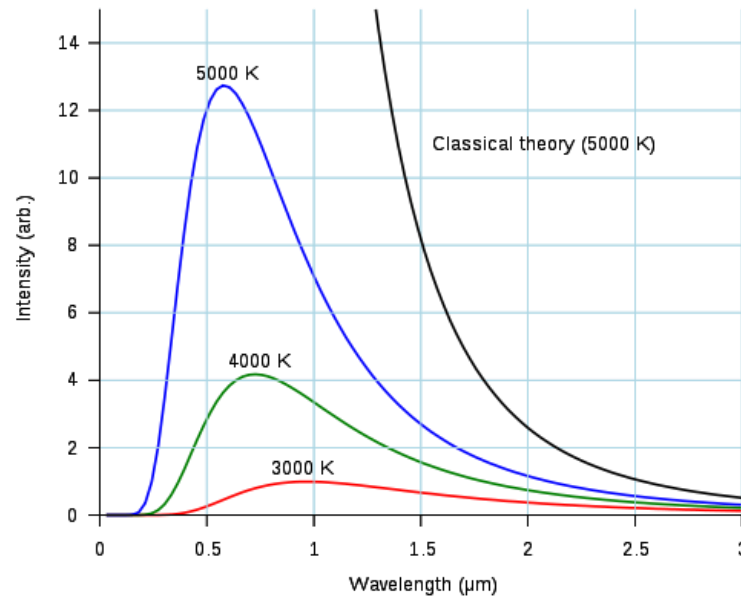
$$u_{\lambda} = 8\pi KT \lambda^{-4}$$

Només correcta per  $\lambda$  gran,  
impossible quan  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $U \rightarrow \infty$

Equació de Wien  
(termodinàmica)

$$u_{\lambda} = A\lambda^{-5} \exp(-B/\lambda T)$$

Correcta per tots  $\lambda$ ,  
però impossible quan  $T \rightarrow \infty$ ,  $U \rightarrow \infty$



## Catàstrofe de l'ultraviolat

(que **només** era un petit problema per explicar-ho TOT amb la física clàssica...)

## 1.- Introducció: Propagació de la calor

## 2.- Conducció

2.1.- Equació de Fourier

2.2.- Conducció en règim estacionari

2.2.1.- Exemples: paret, cilindre, esfera

2.3.- Conducció en règim transitori

2.4.- Exemple: procés de trempat

## 3.- Convecció

3.1.- Llei de refredament de Newton

## 4.- Radiació

1.1.- Cos negre clàssic: Lleis de Wien i Rayleigh-Jeans

1.2.- Cos negre quàntic: Llei de Planck



Max Planck (1858-1947)

- Planck considera la matèria com un conjunt d'oscil·ladors que emeten i absorbeixen en totes les freqüències
- Cada oscil·lador vibra a salts d'energia  $E=h\nu$
- $h=6.62517 \cdot 10^{-34}$  J·s per que coincidís el càlcul i experiment

$$u_{\lambda} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5 \left[ \exp\left(\frac{hc}{kT\lambda}\right) - 1 \right]}$$

A new theory is born: **La física quàntica**

- A l'igual que la matèria l'energia és discreta i se la va anomenar quantum  $E=h\nu$
- $h$  és tan petit que a escala macroscòpica no es veuen "els salts" (com tampoc es veuen els àtoms!!)
- Però a nivell microscòpic és la única que el pot descriure correctament
- La teoria va passar desapercibuda excepte per a un jove físic: Albert Einstein
- Albert Einstein va utilitzar la hipòtesi per explicar l'efecte fotoelèctric i el calor específic dels sòlids

Llei de Planck

$$u_{\lambda} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5 \left[ \exp(hc/kT\lambda) - 1 \right]}$$

Per  $\lambda$  grans es reproduueix la llei de Rayleigh-Jeans

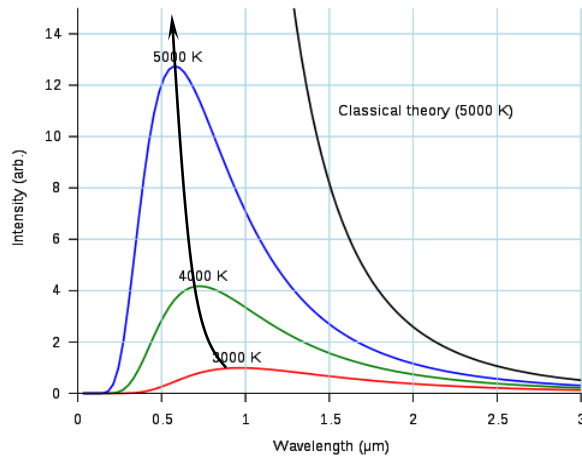
$$u_{\lambda} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5 \left[ \exp(hc/kT\lambda) - 1 \right]} \approx \frac{8\pi KT}{\lambda^4}$$

$\uparrow$   
 $\exp(hc/kT\lambda) \approx 1 + hc/kT\lambda$

Per  $\lambda$  petits (i T no molt grans) llei de Wien

$$u_{\lambda} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5 \left[ \exp(hc/kT\lambda) - 1 \right]} \approx A\lambda^{-5} \exp(-B/\lambda T)$$

$\uparrow$   
 $\exp(hc/kT\lambda) - 1 \approx \exp(hc/kT\lambda)$



Calculem ara el desplaçament del màxim o llei de desplaçament de Wien a partir de

$$\frac{du_{\lambda}}{d\lambda} = 0$$

Obtenim:

$$\lambda_{\max} = \frac{2.896 \cdot 10^{-3}}{T}$$

Podem també calcular l'energia total emesa per totes les  $\lambda$

$$U = \int_0^{\infty} u_{\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{8\pi hc}{\lambda^5 [\exp(hc/kT\lambda) - 1]} d\lambda = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3 c^3} T^4$$

Es pot calcular que l'emitància, és a dir el flux radiant per unitat de superfície és:

$$\left( \frac{d\Phi}{dS} = \frac{dQ}{dSdt} \right) = M = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} T^4 = \sigma T^4 \quad \sigma = 5.66 \cdot 10^{-8} \frac{J}{sm^2 K^4}$$

Que és el flux total que radia un cos negre per unitat de superfície aquesta llei la va deduir J. Stefan de forma empírica a 1879

Ama Dablam 5.563



