MECÀNICA FONAMENTAL – FÍSICA I JUNY 2009

1.- Un disc massís de pes P, radi R i alçaria h, no homogeni, està format per dues parts iguals (1 i 2) de densitats diferents. El posem dins de l'aigua (densitat 1000 kg/m^3), apliquem la força P/8 tal com s'indica a la figura A i el disc roman en equilibri amb la seva meitat submergida. En funció únicament de R,

a) determineu el mòdul de la força que fa l'aigua sobre una de les cares circulars del disc (**5 punts**).

b) i calculeu la posició del centre de masses del disc (**4 punts**).

Submergim totalment el disc en aigua i apliquem les forces F_1 i F_2 indicades a la figura B. Per la nova situació d'equilibri,

c) calculeu en funció de P els valors d'aquestes forces (**6 punts**).

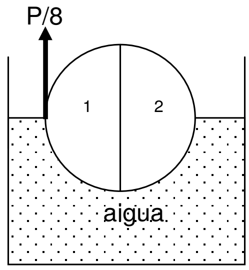


Figura A

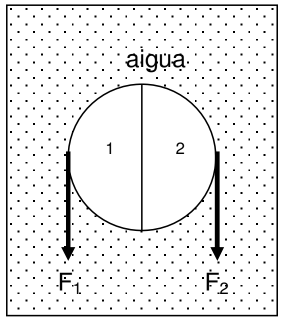


Figura B

2.- La peça rígida de massa 2 kg de la figura està constituïda per un quadrat de costat a=20 cm, de densitat superficial σ_1 i per un triangle isòsceles d'alçària h=9 cm i densitat σ_2. Al posar-la sobre el pla inclinat 30º es troba en condicions de moviment imminent de bolcada. El coeficient de fricció amb el pla és 0,7.

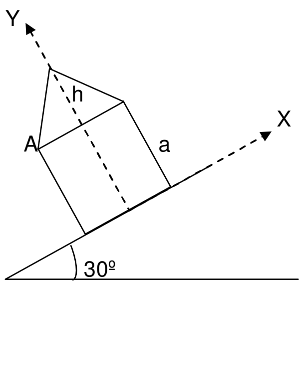
a) Determineu la coordenada Y del centre de masses de la peça (**4 punts**).

b) Determineu la coordenada Y del seu centroide (**4punts**).

Apliquem una força F = 15 N, paral·lela al pla inclinat i sentit ascendent, al punt A de la peça. Per aquesta situació d'equilibri

c) calculeu la força de fricció (**3 punts**).

d) Quin hauria de ser el mòdul d'aquesta força F per tal que la peça estigues en condicions de bolcada imminent en sentit contrari al dels apartats a) i b) ? (**4 punts**).



3.- El cos de massa m= 3 kg situat sobre un pla horitzontal sense fricció està unit a dues molles de constants k_1 =7 N/m i k_2 i a un amortidor de constant b= 10 N·s/m. S'aplica al cos una força harmònica F=4sin2t, unitats S.I. .

a) Determineu el valor de k_2 per tal que en el moviment oscil·latori del cos la diferència de fases entre la força harmònica i l'elongació sigui $\pi/2$ rad (**4 punts**).

Eliminem la molla de constant k_2.

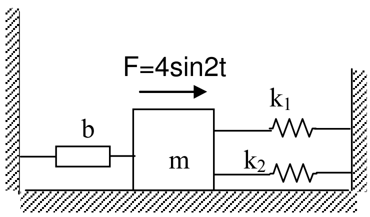
b) Escriviu l'equació de l'elongació en funció del temps, determinant tots els paràmetres que hi intervenen (**4 punts**).

c) Quina és la velocitat màxima que assoleix el cos en la seva oscil·lació? (**2 punts**)

Quan el cos es troba a l'extrem dret de l'oscil·lació eliminem la força harmònica.

d) Quin tipus de moviment amortit realitzarà el cos? (**2 punts**)

e) Determineu la equació que dona la posició del cos en funció del temps, calculant tots els paràmetres que hi intervenen (**3 punts**).



4.- Dos focus emeten en fase ones esfèriques de freqüència 1000 Hz que detecta un observador en el punt P, situat a 5 m de F_1 i a 7 m de F_2. La potència d'emissió de F_1 és de 2 mW essent la de F_2 de 3 mW.

a) Determineu l'amplitud, en el punt P, de l'ona resultant de la interferència de les que provenen dels dos focus (**6 punts**).

En el cas que el focus F_2 comencés a emetre un temps t' abans que el F_1,

b) Determineu t' per tal que en P ambdues ones tinguin la mateixa fase. (**3punts**)

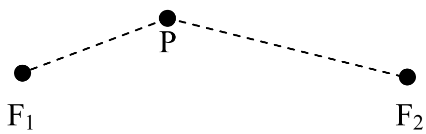
Si el focus F_1 passés a emetre amb una freqüència de 990 Hz,

c) Que passaria amb la intensitat detectada en el punt P? (**3 punts**)

El focus F_1 deixa d'emetre mentre que l'altre focus s'acosta al punt P amb una velocitat de 3 m/s en la direcció F_2P.

d) Quina freqüència detecta l'observador en P? (**3 punts**)

Dades: densitat de l'aire 1,293 kg/m^3. Velocitat del so 340 m/s



MECÀNICA FONAMENTAL – FÍSICA I **JUNY 2009**

Problema 1

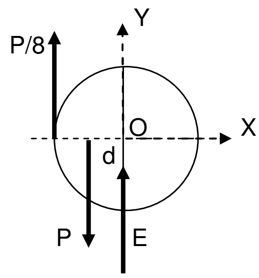
a) La força que fa l'aigua sobre una de les cares circulars del disc (bases) la calculem com la pressió en el centroide de la superfície mullada per l'aigua multiplicada per l'àrea mullada de la superfície:

$$F = \frac{4R}{3\pi}10^3 \cdot 9{,}81\frac{\pi R^2}{2} = 6540R^3$$

b) A la figura es representa el diagrama de forces que actuen sobre el disc; l'empenta E, està aplicada en el centroide del volum submergit i el pes P està aplicat en el centre de masses del disc, desplaçat una distancia d del seu centre geomètric (O) i cap a l'esquerra (zona 1 del disc). En el equilibri es compleix:

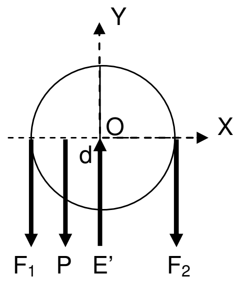
$$\sum \vec{F} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{P}{8} + E = P \rightarrow E = \frac{7P}{8}$$

$$\sum \vec{M}_O = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{P}{8}R - Pd = 0 \rightarrow \boxed{d = \frac{R}{8}}$$



Per tant, el centre de masses del disc té està situat en el punt $\left(-\frac{R}{8}, 0\right)$.

c) Al submergir totalment el disc i aplicar-li les forces F_1 i F_2 per mantenir-lo en equilibri obtenim el següent diagrama de forces:



L'empenta E' val el doble que en la pregunta anterior, ja que els disc estava submergit només fins la meitat $\rightarrow E' = 2E = \frac{7P}{4}$.

Les condicions d'equilibri són:

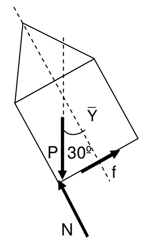
$$\sum \vec{F} = 0 \quad \rightarrow \quad F_1 + F_2 + P = \frac{7P}{4}$$

$$\sum \vec{M}_O = 0 \rightarrow F_1 \cdot R + P\frac{R}{8} - F_2 \cdot R = 0$$

Resolvent el sistema d'equacions s'obté $\boxed{F_1 = \frac{5P}{16}}$ i $\boxed{F_2 = \frac{7P}{16}}$

Problema 2

a) Si la peça està en equilibri en condicions de moviment imminent de bolcada, el diagrama de forces és el representat a la figura. La força que fa el terra, descomposta amb les seves components normal (N) i tangencial (f), està aplicada al vèrtex inferior esquerra i la recta d'acció del pes ha de passar per aquest mateix punt. Donat que l'eix Y és de simetria, la intersecció entre aquest eix i la recta d'acció del pes (vertical) determinarà la posició del centre de masses de la peça, que té per coordenades $\left(0,\overline{Y}\right)$. L'angle que formen l'eix Y i la recta d'acció del pes és 30º. Per tant,

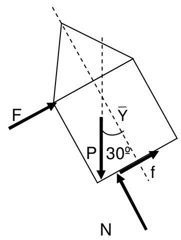


$$\tan 30º = \frac{a/2}{\overline{Y}} \;\rightarrow\; \boxed{\overline{Y} = \frac{a}{2\tan 30º} = 0{,}173\,\mathrm{m}}$$

b) Farem una composició per determinar la posició del centroide de la figura; la seva coordenada y és

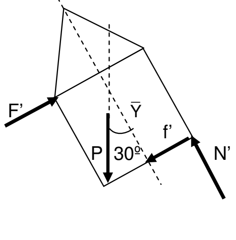
$$\boxed{y = \frac{\frac{ah}{2}\cdot\left(\frac{h}{3}+a\right)+a^2\,\frac{a}{2}}{\frac{ah}{2}+a^2} = 0{,}124\,\mathrm{m}}$$

c) Al aplicar la força F sobre la peça, aquesta deixa de estar en condicions de moviment imminent de bolcada, essent el diagrama de forces el representat a la figura. Imposant les condicions d'equilibri:



$\sum F_X = 0 \;\rightarrow\; F + f - P\sin 30º = 0 \;\rightarrow\; \boxed{f = -5{,}19\,\mathrm{N}}$ Això vol dir que la força de fricció val 5,19 N i té sentit contrari al dibuixat.

d) El diagrama pel sòlid lliure corresponent a aquesta nova situació d'equilibri és el representat a la figura. De les condicions d'equilibri:



$$\sum M = 0 \;\rightarrow\; F'\cdot a = P\cdot a\cdot\cos 30º \;\rightarrow\; \boxed{F' = 16{,}99\,\mathrm{N}}$$

Problema 3

a) Donat que la diferència de fases entre la força harmònica i l'elongació és de $\pi/2$ rad el sistema es troba en condicions de ressonància de velocitat i la pulsació de la força harmònica coincideix amb la natural:

$$\Omega = \omega_n = \sqrt{\frac{k_e}{m}} = 2 \text{ rad/s}$$

La constant elàstica equivalent k_e resulta igual a 12 N/m. Tenint en compte que :

$k_e = k_1 + k_2$

s'obté $\boxed{k_2 = 5 \text{ N/m}}$

b) L'equació de l'elongació en el moviment forçat és de la forma:

$x = A\sin(\Omega t - \theta)$

essent les expressions de l'amplitud A i de la diferència de fases entre la força harmònica i l'elongació θ:

$$A = \frac{F_o}{\sqrt{b^2\Omega^2 + (k_1 - m\Omega^2)^2}} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{b\Omega}{k_1 - m\Omega^2}$$

Amb els valors

$F_o = 4$ N $\quad m = 3$ kg $\quad b = 10\ \frac{N\cdot s}{m}$ $\quad k_1 = 7\ N/m$ $\quad \Omega = 2\ rad/s$ resulta :

$A = 0{,}194$ m $\quad \theta = 1{,}82$ rad $\qquad \boxed{x = 0{,}194\sin(2t - 1{,}82)}$

c) La velocitat màxima assolida pel cos en el moviment, v_{max}, és:

$\boxed{v_{max} = A\Omega = 0{,}388\ m/s}$

d) Donat que el terme $b^2 - 4k_1m = 16\ \frac{N^2\cdot s^2}{m^2}$ és positiu el sistema està <u>sobreamortit</u>.

e) L'equació de l'elongació és de la forma:

$$x = C_1e^{\alpha_1 t} + C_2e^{\alpha_2 t}$$

essent:

$$\alpha_1 = -\frac{b}{2m} + \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k_1}{m}} \qquad \alpha_2 = -\frac{b}{2m} - \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k_1}{m}}$$

Els valors obtinguts són $\alpha_1 = -1\ \text{s}^{-1}$ i $\alpha_2 = -\frac{7}{3}\ \text{s}^{-1}$

A l'instant inicial $x_o = A = 0{,}194\ \text{m}$ i $v_o = 0$. Fent t=0 en l'equació de l'elongació i en la de la velocitat, $v = \alpha_1 C_1 e^{\alpha_1 t} + \alpha_2 C_2 e^{\alpha_2 t}$, s'obté:

$$x_o = C_1 + C_2 \qquad v_o = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2$$

Al resoldre el sistema d'equacions resulta $C_1 = 0{,}340\ \text{m} \quad C_2 = -0{,}146\ \text{m}$.
L'equació de l'elongació obtinguda és:

$$\boxed{x = 0{,}340\, e^{-t} - 0{,}146 e^{-2{,}33t}}$$

Problema 4

a) L'amplitud A de les ones esfèriques en un punt situat a una distancia r del focus es calcula a partir l'equació:

$$I = \frac{1}{2}\rho v \omega^2 A^2$$

on ρ és la densitat del medi, v la velocitat de propagació de l'ona, ω la pulsació i I la intensitat del moviment ondulatori en el punt, que és igual a:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Amb les dades de l'enunciat,

$P_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ W $\quad P_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ W $\quad r_1 = 5$ m $\quad r_2 = 7$ m

$\omega = 2\pi f = 2000\pi$ rad/s $\quad \rho = 1{,}293$ kg/m^3 $\quad v = 340$ m/s

s'obtenen uns valors $A_1 = 2{,}71 \cdot 10^{-8}$ m $\quad A_2 = 2{,}37 \cdot 10^{-8}$ m.

L'amplitud resultant de l'interferència, A_R ,s'obté de l'equació:

$$A_R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\alpha}$$

La diferència de fase α entre les dues ones en el punt P té per expressió:

$$\alpha = \frac{\omega}{v}(r_2 - r_1) = 11{,}76\pi \text{ rad}.$$

El valor de l'amplitud obtingut és $\boxed{A_R = 4{,}74 \cdot 10^{-8} \text{m}}$

b) Les fases d'ambdues ones en P han de ser iguals. Donat que el focus F_2 està avançat un temps t' respecte a l'altre focus, les equacions corresponents a aquestes fases serien:

$$\varphi_2 = \omega\left(t + t' - \frac{r_2}{v}\right) \qquad \varphi_1 = \omega\left(t - \frac{r_1}{v}\right)$$

Imposant $\varphi_2 = \varphi_1$ s'obté $\boxed{t' = 5{,}89 \cdot 10^{-3} \text{ s}}$

c)Al arribar al punt P dues ones de freqüències diferents la intensitat que es detectaria en aquest punt variaria en el temps. S'aniria repetint (1000-990) vegades per segon, és a dir, es detectarien 10 pulsacions en un segon.

d) Donat que disminueix la distancia entre el focus i l'observador, aquest detecta una freqüència f_o superior a la que emet el focus, f. Tenint en compte l'equació corresponent a l'efecte Doppler:

$$\frac{v - v_f}{f} = \frac{v}{f_o}$$

Amb $v_f = 3$ m/s s'obté $\boxed{f_o = 1008{,}9 \text{ Hz}}$