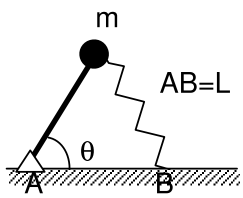
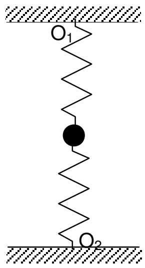
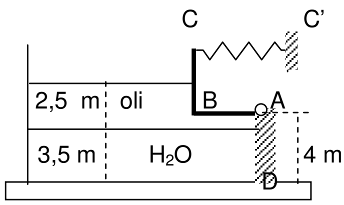
MECÀNICA FONAMENTAL – FÍSICA I GENER 2009



1- La barra de massa negligible i longitud L=2 m, articulada en A, aguanta una massa m subjectada també per una molla de constant elàstica 10 N/m que no està deformada en la posició θ=90º. **a)** Determineu el valor de m que fa que la posició vertical sigui d'equilibri estable **(6 punts)**. **b)** Hi hauria algun valor de m que fes que la posició vertical fos d'equilibri indiferent? **(4 punts) c)** Si la massa m fos de 3 kg, determineu la velocitat mínima que caldria donar-li, quan la barra es trobes en la posició θ=10º, per tal que arribes a la vertical **(5 punts)**.



2- A la figura hi ha representades dues molles idèntiques de constant k=24,5 N/m i longitud natural 25 cm. Les dues molles estan unides a una massa m=200 g essent la distancia entre els punts de subjecció de les molles $\overline{O_1O_2} = 76\,\text{cm}$. **a)** Determineu la distancia de la massa puntual m al punt O_2 quan el sistema es troba en equilibri **(7 punts)**.
Estant el sistema en repòs en la posició d'equilibri anterior, el submergim en un líquid viscós i eliminem la molla unida a O_2. Sabent que la força de fricció generada per el líquid sobre la massa té un coeficient de 3 N·s/m, **b)** determineu l'equació de la velocitat d'oscil·lació, calculant tots els paràmetres que hi intervenen, agafant t=0 l'instant en que s'elimina la molla inferior **(8 punts)**.



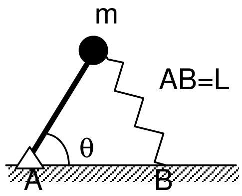
$\overline{BA} = 3\text{m}$ $\overline{CB} = 2{,}5\text{m}$

3- La comporta rígida ABC de pes negligible i 1,5 m d'amplària, articulada en A, es manté en equilibri sota l'acció de la molla CC' horitzontal, fixada a l'extrem superior C de la comporta. El recipient conté oli i aigua de densitats 800 kg/m^3 i 1000 kg/m^3 respectivament. **a)** Calculeu la força que ha de fer la molla per garantir l'equilibri de la comporta **(7 punts)**. **b)** Determineu el valor de la força que generen els líquids sobre una comporta circular de 0,5 m de radi, situada en la paret AD, estant el seu centre a una distancia de 1m del fons del recipient **(4 punts)**.
Tanquem el recipient i fem que l'aire situat sobre la capa d'oli es trobi a una pressió manomètrica de P = 5000 Pa. Mantenint els mateixos nivells dels líquids, substituïm la molla anterior per una altra de manera que la comporta ABC romangui en equilibri en la mateixa posició. **c)** ¿Què val en aquestes condicions la component vertical de la reacció a l'articulació A? **(4 punts)**

4- Un tub d'orgue, obert per un extrem i tancat per l'altre, té una longitud de 1,7 m i està dissenyat per emetre sons de diferents freqüències a una temperatura de 20ºC, sent la velocitat del so a aquesta temperatura de 340 m/s. **a)** Quina és la freqüència de l'harmònic fonamental? **(3 punts)**
Considera el so corresponent al cinquè harmònic emès pel tub. **b)** Sabent que l'amplitud en un ventre és de 10^{-5} m, determineu l'equació de l'ona estacionària, prenent com a origen de coordenades l'extrem obert del tub tenint en compte que, en aquest punt, l'elongació a l'instant inicial és nul·la **(7 punts)**. **c)** Quines son les coordenades dels ventres? **(5 punts)**

1.-

a) Al fer un desplaçament compatible amb els lligams, les úniques forces que treballen són el pes i la força que fa la molla. Donat que són conservatives, per l'estudi de l'equilibri imposarem la condició que la derivada de l'energia potencial és nul·la en dita posició. Agafant origen d'energies potencials gravitatòries en el terra, l'energia potencial del sistema val



$$U = U_g + U_m = mgL\sin\theta + \frac{1}{2}k\left(2L\sin\frac{\theta}{2} - \sqrt{2}\,L\right)^2$$

Hem tingut en compte que el triangle de vèrtexs la massa m i els punts A i B és isòsceles essent el costat mB (longitud actual de la molla) $2L\sin\frac{\theta}{2}$.

En les posicions d'equilibri és compleix

$$\frac{dU}{d\theta} = 0 \;\rightarrow\; mgL\cos\theta + k\left(2L\sin\frac{\theta}{2} - \sqrt{2}\,L\right)L\cos\frac{\theta}{2} =$$
$$= mgL\cos\theta + kL^2\sin\theta - k\sqrt{2}\,L^2\cos\frac{\theta}{2} = 0$$

Si la posició d'equilibri és estable ha de ser la segona derivada positiva pel valor de la variable en dita posició:

$$\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta=90º} > 0 \;\rightarrow\; \left.-mgL\sin\theta + kL^2\cos\theta + \frac{k\sqrt{2}\,L^2}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right|_{\theta=90º} > 0 \;\rightarrow\; \boxed{m < \frac{kL}{2g} = 1{,}02\,kg}$$

b) Si la posició d'equilibri és indiferent, totes les derivades han de ser nul·les pel valor de la variable en dita posició. Per tant, si tornem a derivar:

$$\frac{d^3U}{d\theta^3} = -mgL\cos\theta - kL^2\sin\theta + \frac{k\sqrt{2}\,L^2}{4}\cos\frac{\theta}{2} \text{ que per } \theta = 90º \text{ s'obté}$$

$$\left.\frac{d^3U}{d\theta^3}\right|_{\theta=90º} = -kL^2 + \frac{k\sqrt{2}\,L^2}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{3}{4}kL^2 \neq 0\,.$$

$\boxed{\text{Per tant no hi haurà cap valor de m que faci que la posició } \theta\text{=90º sigui d'equilibri indiferent.}}$

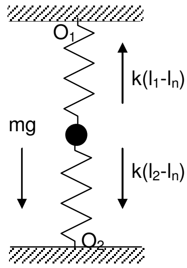
c) Com que les forces que treballen són conservatives, l'energia mecànica s'ha de conservar, i per tant :

$$mgL\sin10º + \frac{1}{2}k\left(2L\sin\frac{10º}{2} - \sqrt{2}\,L\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mgL\sin90º + \frac{1}{2}k\left(2L\sin\frac{90º}{2} - \sqrt{2}\,L\right)^2.$$

Substituint numèricament s'obté $\boxed{v = 3{,}45\, {}^{m}\!/_{s}}$.

2.-

a) Designarem la molla superior com la molla 1 i la inferior com la 2. Si suposem que en la posició d'equilibri les dues molles estan allargades, essent les seves longituds l_1 i l_2 , s'ha de complir:



$$mg + k(l_2 - l_n) = k(l_1 - l_n) \;\rightarrow\; l_2 = \frac{k\overline{O_1O_2} - mg}{2k}$$

La distancia de la massa al terra és $\boxed{l_2 = 0{,}34\,m}$

b) Si eliminem la molla 2, la posició d'equilibri de la massa penjada de la molla 1 és:

$k(l_{1eq} - l_n) = mg \;\rightarrow\; l_{1eq} = 0{,}33\,m$. Això vol dir que la massa m, en la nova posició d'equilibri, ha de estar a 0,76-0,33=0,43 m del terra.

Al tallar la molla 2 el sistema realitzarà un moviment oscil·latori amortit ($b^2 < 4km \;\rightarrow\; 3^2 < 4\cdot 24{,}5\cdot 0{,}2$) d'equació:

$x = A_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi_0)$, essent $\gamma = \dfrac{b}{2m} = 7{,}5\ ^{rad}\!/_{s}$ i $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \gamma^2} = 8{,}14\ ^{rad}\!/_{s}$.

A_0 i φ_0 les determinarem a partir de les condicions inicials. Per això necessitem també l'equació de la velocitat de vibració :

$\dot{x} = -\gamma A_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi_0) - \omega A_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi_0)$. Tenint en compte les condicions inicials:

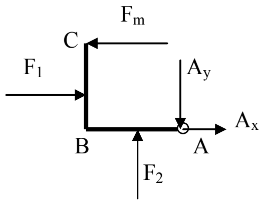
$$t = 0\begin{cases} x(0) = 0{,}34 - 0{,}43 = A_0\cos\varphi_0 \\ \dot{x}(0) = 0 = -A_0\gamma\cos\varphi_0 - A_0\omega\sin\varphi_0 \end{cases}$$ s'obté $\varphi_0 = 2{,}40\,rad$ i $A_0 = 0{,}122\,m$.

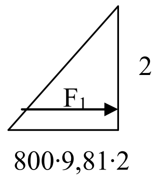
Per tant, l'equació de la velocitat d'oscil·lació és :

$$\boxed{\dot{x} = -0{,}915e^{-7{,}5t}\cos(8{,}14t + 2{,}40) - 0{,}993e^{-7{,}5t}\sin(8{,}14t + 2{,}40)}$$

3-

a) Diagrama del sòlid lliure de la comporta





Forces dels líquids:

Tram CB

$$F_1 = \frac{800\cdot 9{,}81\cdot 2\cdot 2\cdot 1{,}5}{2} = 23544\,\text{N} \text{ aplicada a 2/3 m de A}$$

Tram BA

$$F_2 = P_2\cdot 3\cdot 1{,}5 = 800\cdot 9{,}81\cdot 2\cdot 3\cdot 1{,}5 = 70632\,\text{N} \text{ aplicada a } 1{,}5\,\text{m de A}$$

Equilibri de la comporta:

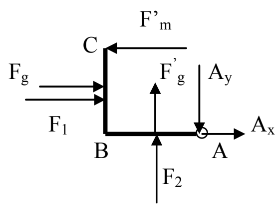
$$\sum M_A = 0 \quad -> \quad F_m\cdot 2{,}5 = F_1\cdot\frac{2}{3} + F_2\cdot 1{,}5$$

S'obté $\boxed{F_m = 48658 \text{ N}}$

b) La força es pot calcular a partir de la pressió en el centroide de la superfície

$$F = \bar{P}\cdot S = \left((800\cdot 9{,}81\cdot 2{,}5 + 1000\cdot 9{,}81\cdot 2{,}5)\cdot\pi 0{,}5^2\right) = \boxed{34671 \text{ N}}$$

c) El diagrama del sòlid lliure de la comporta en la nova situació d'equilibri serà:



Equilibri de la comporta:

$$\sum F_y = 0 \quad F_2 + F_g' = A_y \quad \text{on} \quad F_g' = P\cdot 3\cdot 1{,}5 = 22500\,\text{N}$$

S'obté $\boxed{A_y = 93132 \text{ N}}$

4-

a) Per l'harmònic fonamental es compleix: $L = \frac{\lambda}{4}$. La freqüència f_o d'aquest harmònic serà:

$$f_o = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4L}$$

Amb $L = 1{,}7\ \text{m}$ i $v = 340\ \text{m/s}$ s'obté $\boxed{f_o = 50\ \text{Hz}}$

b) L'ona estacionaria té per equació:

$$y = 2A\sin\left(\frac{\omega x}{v} + \theta_1\right)\sin\left(\omega t + \theta_2\right)$$

La freqüència del cinquè harmònic és $f = 5f_o = 250\ \text{Hz}$ essent la pulsació $\omega = 2\pi f = 500\pi\ \text{rad/s}$ i la velocitat de propagació $v = 340\ \text{m/s}$

Donat que l'origen x=0 s'agafa a l'extrem obert del tub és, a dir en un ventre, s'ha de complir que, per x=0, A'= 2A és a dir $\theta_1 = \frac{\pi}{2}\text{rad}$.

A l'instant t=0 l'elongació de l'extrem obert i de tots els punts a l'interior del tub ha de ser nul·la. Per aquesta raó $\theta_2 = 0$.

L'amplitud en un ventre és $2A = 10^{-5}\ \text{m}$. Substituint aquests valors en l'equació de l'ona resulta:

$$\boxed{y = 10^{-5}\sin\left(4{,}62x + \frac{\pi}{2}\right)\sin 1571\,t = 10^{-5}\cos 4{,}62x\,\sin 1571\,t}$$

c) La longitud d'ona corresponent al cinquè harmònic és $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{250} = 1{,}36\ \text{m}$. Agafant x=0 a l'extrem obert del tub, les coordenades dels ventres seran:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{\lambda}{2} = 0{,}68\ \text{m} \\ x = \lambda = 1{,}36\ \text{m} \end{array}}$$