Fisica I

Luis Carlos Pardo
Planta 2, edifici C, Despatx C2.4

CINEMÀTICA DEL PUNT

1.- Breu repàs de càlcul vectorial

2.- Breu repàs de derivades

3.- Cinemàtica del punt

3.1.- Cinemàtica en una dimensió
3.1.1.- Velocitat i acceleració (mitjana i instantànies)
3.1.2.- Equacions del moviment

3.2.- Cinemàtica en dues dimensions (vectors ***r***,***v***, i ***a***)

3.3.- Moviment parabòlic

3.3.- Components intrínseques de l'acceleració: normal i tangencial

3.4.- Moviment circular

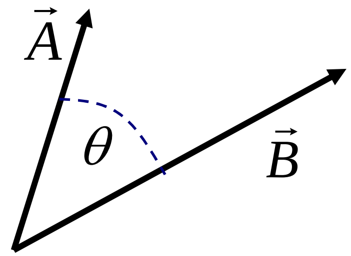
4.- Transformacions de Galileu

CINEMÀTICA DEL PUNT

Producte escalar

El **producte escalar** de dos vectors és l'escalar $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

$\vec{A}\cdot\vec{B}$ pot ser expressat com $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta \quad 0 \le \theta \le \pi$



Per calcular una **projecció** de A en la direcció de U

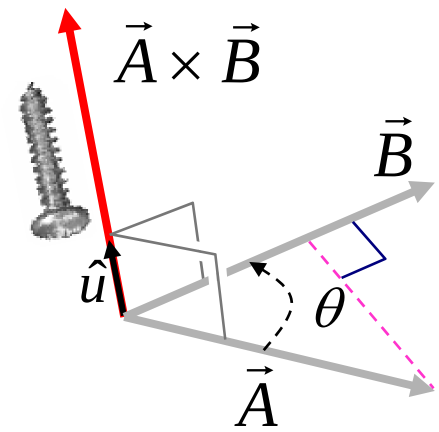
$$\vec{A}\cdot\vec{U} = A\cos\theta$$

Producte vectorial

El **producte vectorial** de dos vectors és el vector

$$\vec{A}\times\vec{B} \equiv \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \left(A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x\right)$$

té la propietat $\vec{A}\times\vec{B} \perp \vec{A}$ i $\vec{A}\times\vec{B} \perp \vec{B}$



CINEMÀTICA DEL PUNT

1.- Breu repàs de càlcul vectorial

2.- Breu repàs de derivades

3.- Cinemàtica del punt

3.1.- Cinemàtica en una dimensió

3.1.1.- Velocitat i acceleració (mitjana i instantànies)

3.1.2.- Equacions del moviment

3.2.- Cinemàtica en dues dimensions (vectors ***r***,***v***, i ***a***)

3.3.- Moviment parabòlic

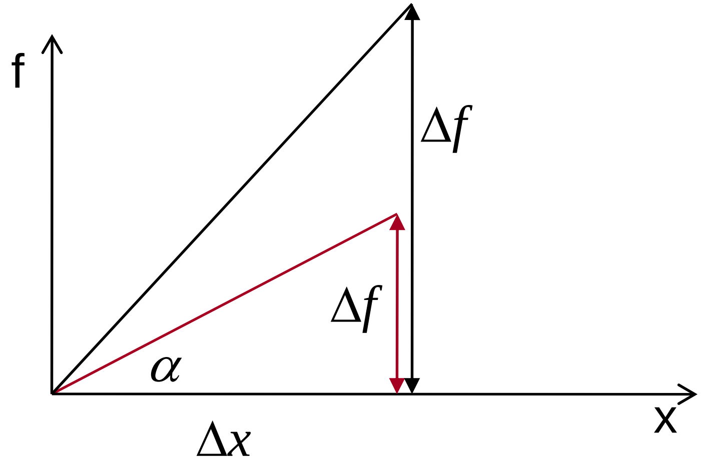
3.3.- Components intrínseques de l'acceleració: normal i tangencial

3.4.- Moviment circular

Derivades en una dimensió

Derivada = canvi

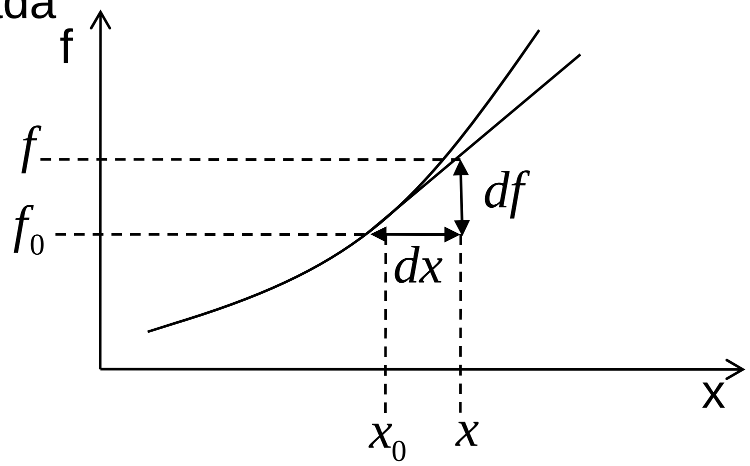
$$tg\alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$



Si els canvis son petits, la tangent es una derivada

$$tg\alpha = \frac{df}{dx} = f'$$

$$df = \frac{df}{dx}dx = f'dx$$



Si volem obtenir un canvi "gran" de la derivada: integrem

$$\int_{f_0}^{f} df = \int_{x_0}^{x} f'dx \Rightarrow f - f_0 = \int_{x_0}^{x} f'dx \Rightarrow f = f_0 + \int_{x_0}^{x} f'dx \xrightarrow{\text{Si f'=cte}} \boxed{f = f_0 + f'(x - x_0)}$$

(integral definida, no cal constant d'integració)

CINEMÀTICA DEL PUNT

1.- Breu repàs de càlcul vectorial

2.- Breu repàs de derivades

3.- Cinemàtica del punt

3.1.- Cinemàtica en una dimensió

3.1.1.- Velocitat i acceleració (mitjana i instantànies)

3.1.2.- Equacions del moviment

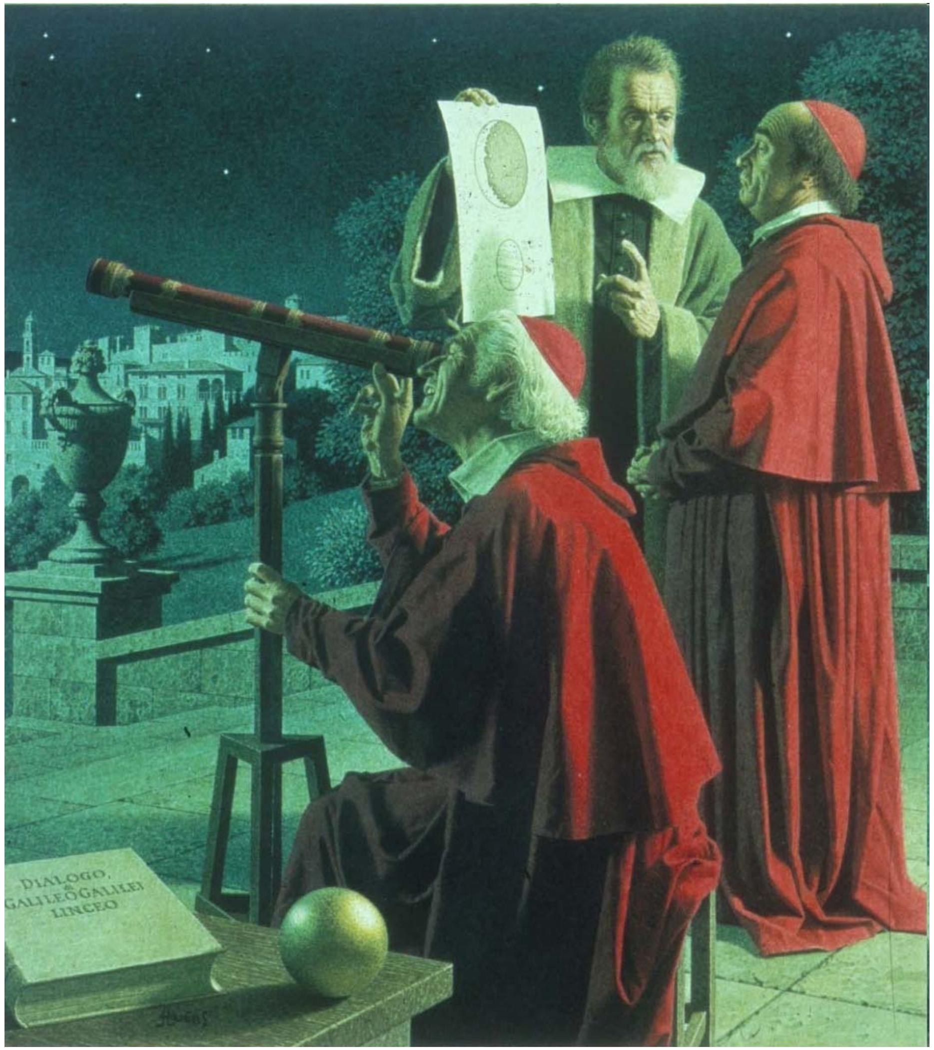
3.2.- Cinemàtica en dues dimensions (vectors ***r***,***v***, i ***a***)

3.3.- Moviment parabòlic

3.3.- Components intrínseques de l'acceleració: normal i tangencial

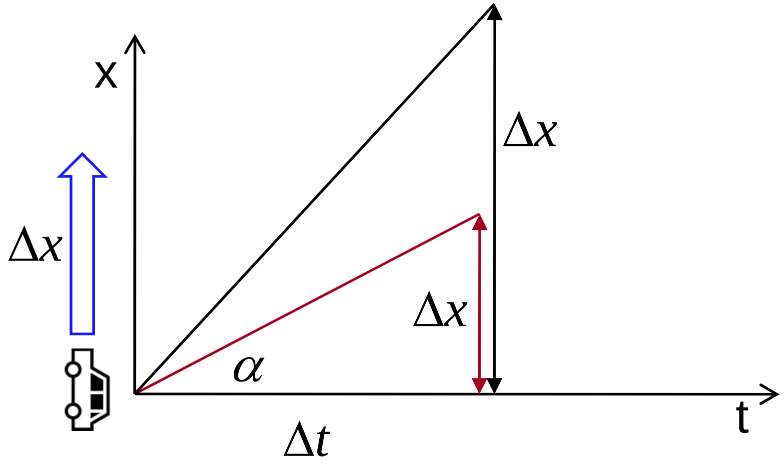
3.4.- Moviment circular

Cinemàtica del punt



Galileo Galilei… eppur si muove

Si f=posició i x=temps

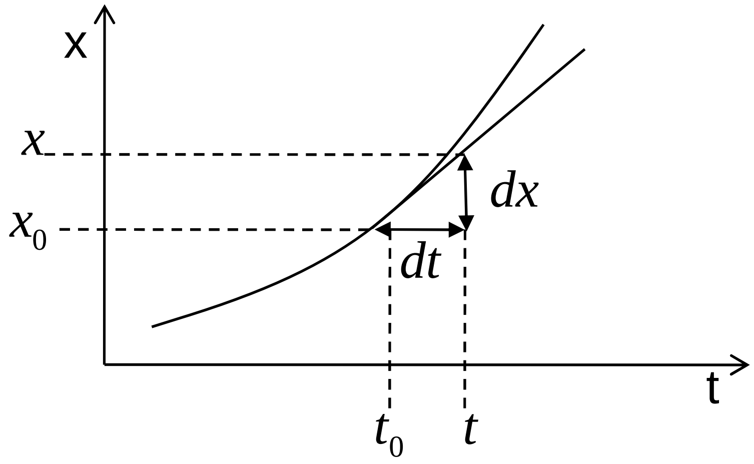


Velocitat mitjana

$$tg\,\alpha = \overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Calculem un desplaçament $\Delta x = \overline{v}\,\Delta t$

Si els canvis son petits➔velocitat en un punt



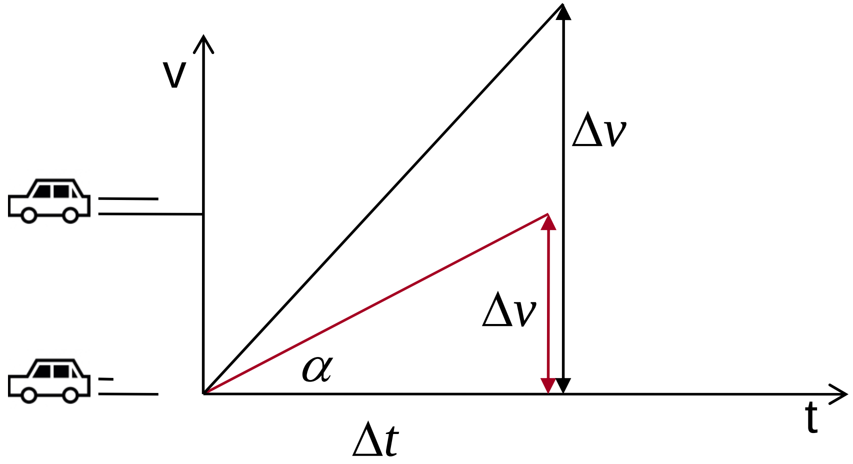
Velocitat instantània

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Si f=velocitat i x=temps

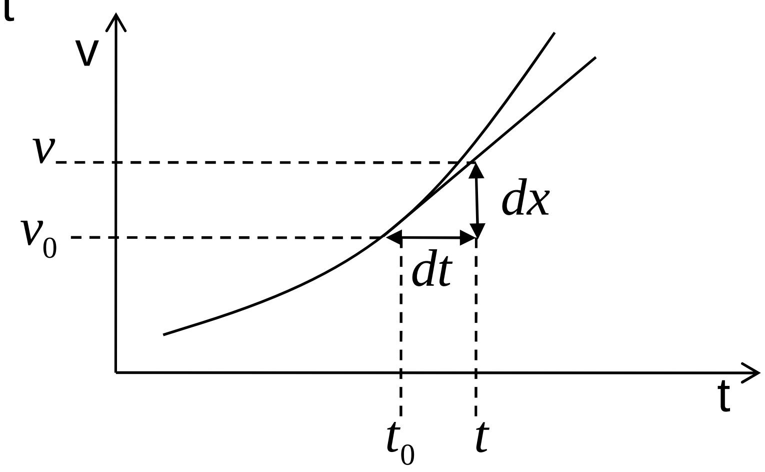
Acceleració mitjana $tg\,\alpha = \overline{a} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$

Calculem un increment de velocitat $\Delta v = \overline{a}\,\Delta t$



Si els canvis son petits➔acceleració en un punt

Velocitat instantània $a = \dfrac{dv}{dt}$



CINEMÀTICA DEL PUNT

Obtenim la posició en funció del temps

VELOCITAT CONSTANT (MRU)

$$v = \frac{dx}{dt} = cte \quad \text{Integrem} \quad \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v dt \quad v = cte \quad x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = x_0 + v(t - t_0)}$$

(integral definida, no cal constant d'integració)

ACCELERACIÓ CONSTANT (MRU)

(segona llei de Newton)

$$a = \frac{dv}{dt} = cte \quad \text{Integrem} \quad \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a dt \quad a = cte \quad v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = v_0 + a(t - t_0)}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + a(t - t_0) \quad \text{Integrem} \quad \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t - t_0)] dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2}$$

$v \neq cte!!!!$

1, 2, 5, t7, t14

CINEMÀTICA DEL PUNT

1.- Breu repàs de càlcul vectorial

2.- Breu repàs de derivades

3.- Cinemàtica del punt

3.1.- Cinemàtica en una dimensió

3.1.1.- Velocitat i acceleració (mitjana i instantànies)

3.1.2.- Equacions del moviment

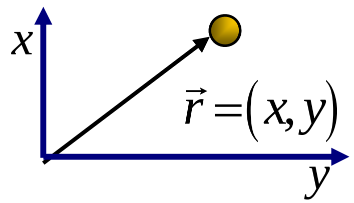
3.2.- Cinemàtica en dues dimensions (vectors r,v, i a)

3.3.- Moviment parabòlic

3.3.- Components intrínseques de l'acceleració: normal i tangencial

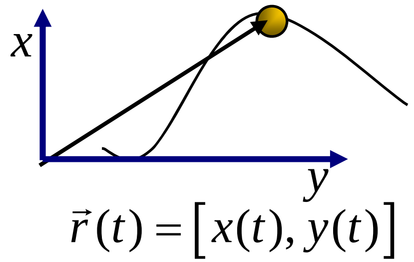
3.4.- Moviment circular

Vector Posició $\vec{r} = (x, y)$



Pot variar amb el temps!! $\vec{r}(t) = [x(t), y(t)]$

$\vec{r}(t) = [2t, t^2]$

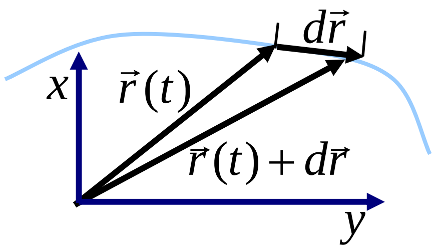


Vector desplaçament $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

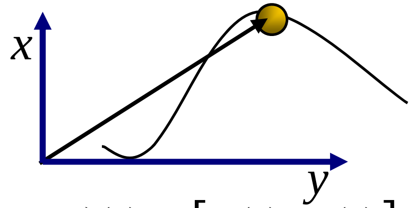
Desplaçament "petit" = diferencial

... és a dir quan a passat un dt

$$d\vec{r} = (dx, dy)$$



$$\vec r(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$



$$\vec r(t) = \left[x(t), y(t)\right]$$

Vector posició

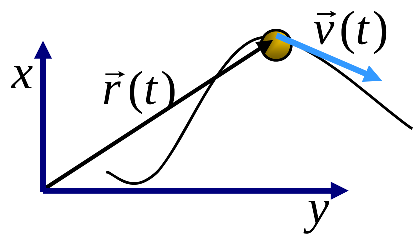
$$\vec r(t) = [2t, t^2]$$

derivant ↓ ↑ integrant

Vector velocitat

$$\vec v(t) = [2, 2t]$$

$$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \dot{\vec r} = \left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right]$$



Tangent a la trajectòria!!!

El podem fer unitari dividint pel seu mòdul

$$\vec v(t) = [2, 2t]$$

$$\left\|\vec v(t)\right\| = \sqrt{2^2 + (2t)^2} = \sqrt{4 + 4t^2} = 2\sqrt{1+t^2}$$

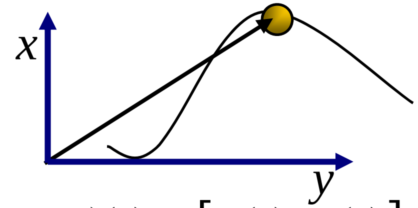
$$\hat v(t) = \frac{[2, 2t]}{2\sqrt{1+t^2}} = \frac{[1, t]}{\sqrt{1+t^2}}$$

Útil per projectar l'acceleració en la direcció de la trajectòria

Vector posició

$$\vec{r}(t)=[2t,t^2]$$

$$\vec{r}(t)=[x(t),y(t),z(t)]$$



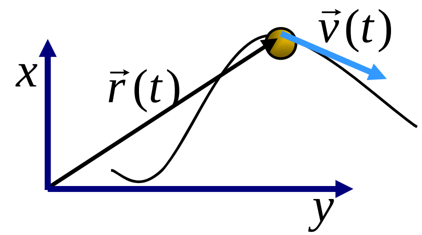
$$\vec{r}(t)=[x(t),y(t)]$$

derivant ↓ ↑ integrant

Vector velocitat

$$\vec{v}(t)=[2,2t]$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{\vec{r}}=\left[\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right]$$



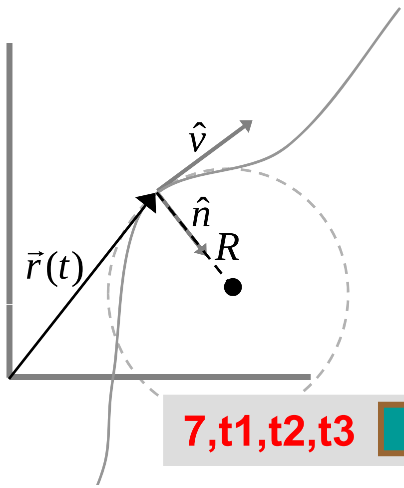
derivant ↓ ↑ integrant

Tangent a la trajectòria!!!

Vector acceleració

$$\vec{a}(t)=[0,2]$$

$$\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\ddot{\vec{r}}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$



7,t1,t2,t3

CINEMÀTICA DEL PUNT

1.- Breu repàs de càlcul vectorial

2.- Breu repàs de derivades

3.- Cinemàtica del punt

3.1.- Cinemàtica en una dimensió

3.1.1.- Velocitat i acceleració (mitjana i instantànies)

3.1.2.- Equacions del moviment

3.2.- Cinemàtica en dues dimensions (vectors r,v, i a)

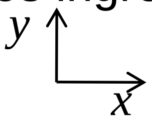
3.3.- Moviment parabòlic

3.3.- Components intrínseques de l'acceleració: normal i tangencial

3.4.- Moviment circular

Moviment parabòlic

Dos ingredients:



Agafant aquest
Sistema de referència

velocitat inicial

$$\vec{v} = \left(v_{0x}, v_{0y}\right)$$

+

gravetat

$$\vec{a} = \left(0, -g\right)$$

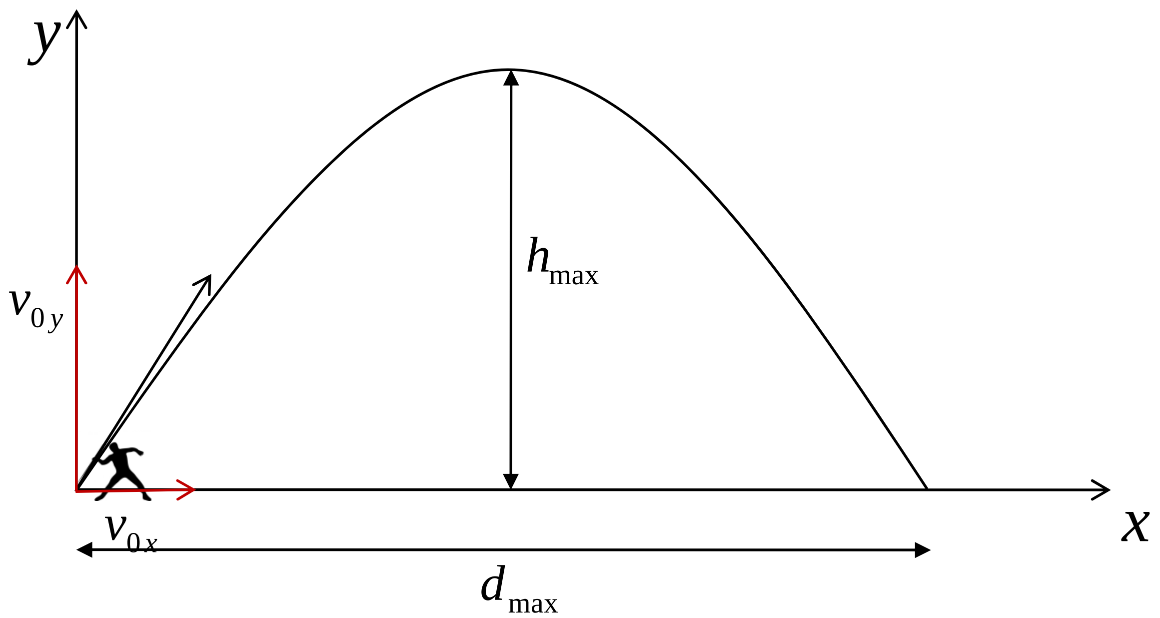
Escrivim les equacions en x i en y:

posició

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \\ y = y_0 + v_{0y}\left(t - t_0\right) - \dfrac{1}{2} g \left(t - t_0\right)^2 \end{cases}$$

velocitat

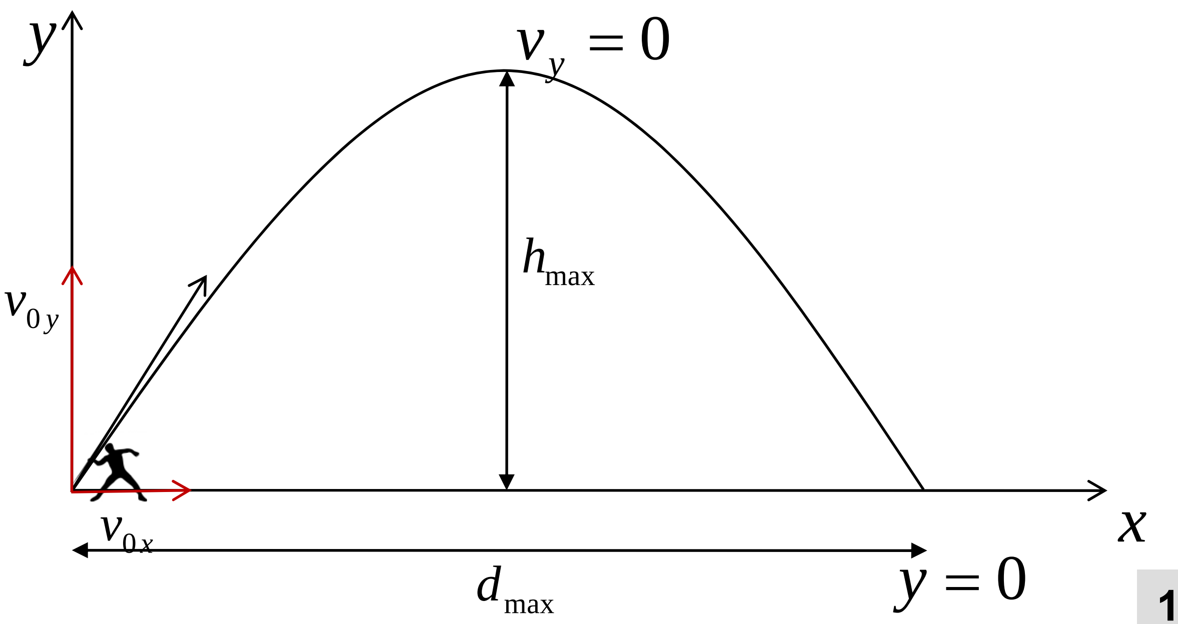
$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - g\left(t - t_0\right) \end{cases}$$



Suposem $t_0=0$, $y_0=0$ i $X_0=0$ per simplificar

Condició h_{max} $v_y = 0$ → $t = \frac{v_{0y}}{g}$ → $h_{max} = v_{0y}\frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 = \frac{v_{0y}^2}{g}$

Condició d_{max} $y = 0$ → $t = \frac{2v_{0y}}{g}$ → $d_{max} = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$



11, 18, t5, t12

CINEMÀTICA DEL PUNT

1.- Breu repàs de càlcul vectorial

2.- Breu repàs de derivades

3.- Cinemàtica del punt

3.1.- Cinemàtica en una dimensió

3.1.1.- Velocitat i acceleració (mitjana i instantànies)

3.1.2.- Equacions del moviment

3.2.- Cinemàtica en dues dimensions (vectors r,v, i a)

3.3.- Moviment parabòlic

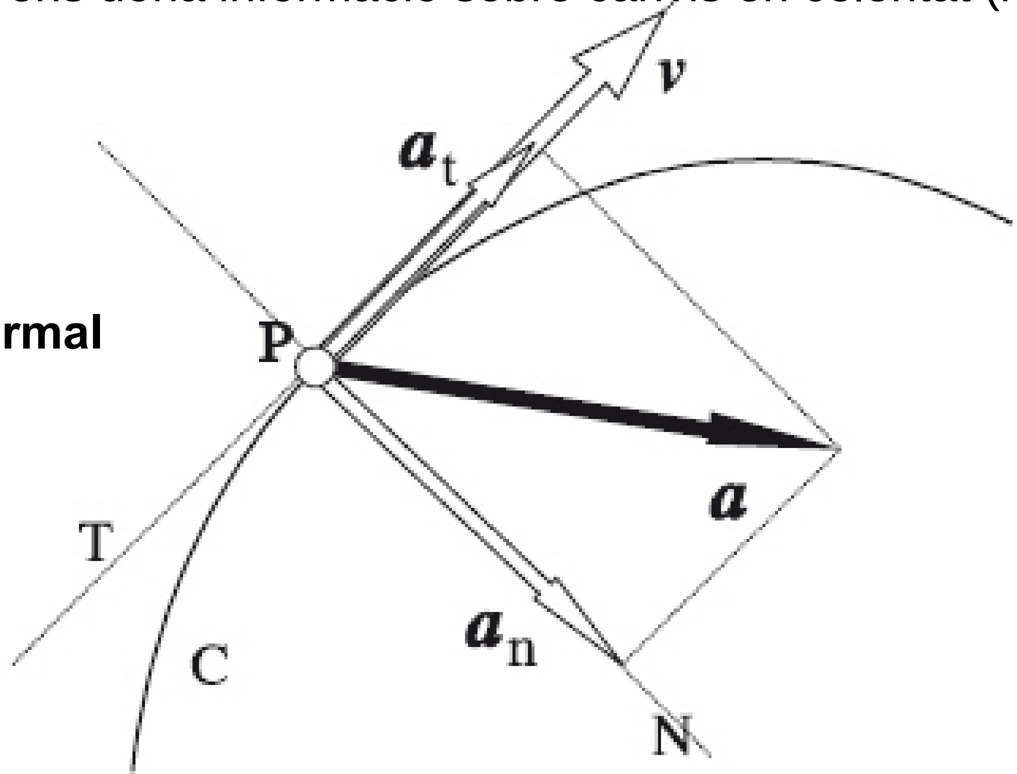
3.3.- Components intrínseques de l'acceleració: normal i tangencial

3.4.- Moviment circular

Objectiu:
Separar els canvis en la direcció dels canvis en la celeritat

Acceleració tangencial (a_t):
ens dona informació sobre canvis en celeritat (mòdul de velocitat)

component binormal cap a on gira



Acceleració normal (a_n):
ens dona informació sobre canvis en direcció

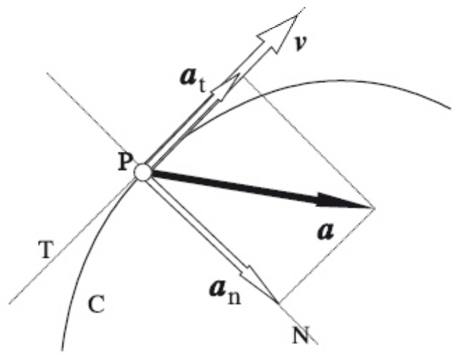
Objectiu:
Separar els canvis en la direcció dels canvis en la celeritat

Matemàticament

$$\vec{v} = v\hat{v}$$

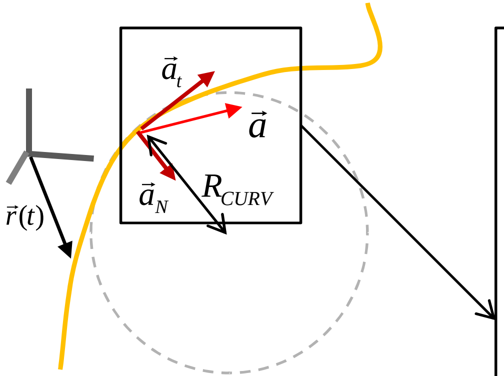
Celeritat

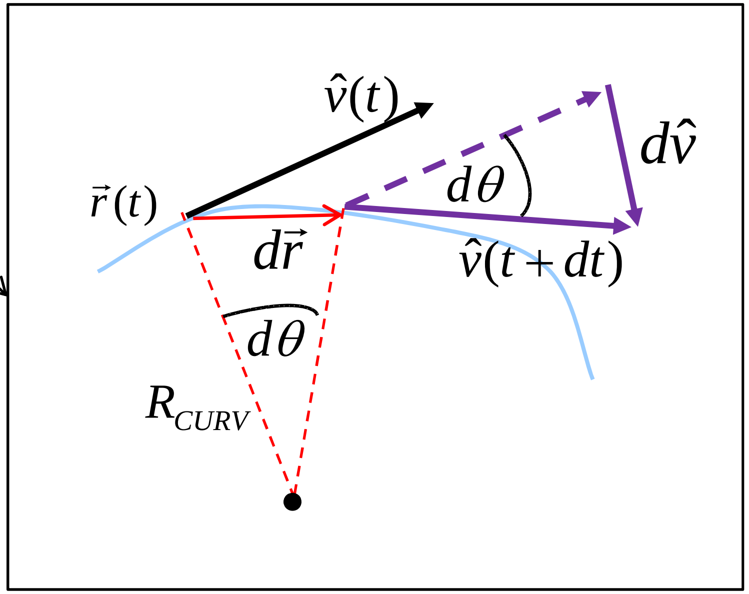
Direcció



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(v\hat{v}\right)}{dt} = v\frac{d\hat{v}}{dt} + \frac{dv}{dt}\hat{v} = v\left|\frac{d\hat{v}}{dt}\right|\frac{\dfrac{d\hat{v}}{dt}}{\left|\dfrac{d\hat{v}}{dt}\right|} + \frac{dv}{dt}\hat{v} = v\left|\frac{d\hat{v}}{dt}\right|\hat{u}_n + \frac{dv}{dt}\hat{u}_t$$

Objectiu:
Relacionar a_n amb el radi de curvatura





Per semblança de triangles

$$\boxed{\frac{|d\hat{v}|}{|\hat{v}|}} = \boxed{\frac{|d\vec{r}|}{R_{CURV}}}$$

$$\left(|\hat{v}| = 1\right)$$

$$\left|\frac{d\hat{v}}{dt}\right| = \frac{1}{R_{CURV}}\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{v}{R_{CURV}}$$

$$R_{CURV} = v \Big/ \left|\frac{d\hat{v}}{dt}\right|$$

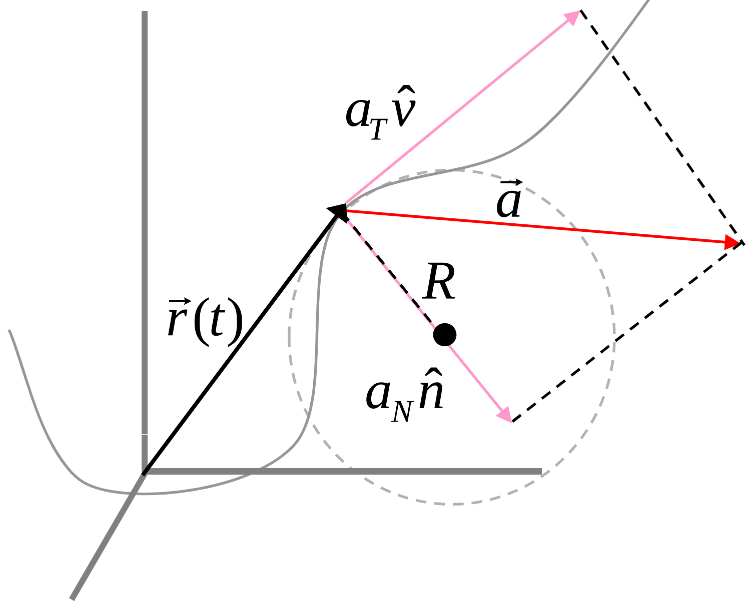
$$\boxed{\vec{a}_N = \frac{v^2}{R_{CURV}}\hat{u}_N}$$

Dividint per dt... i definint Radi de curvatura

Les components tangent i normal $=\{\hat{v},\hat{n}\}$ es calculen com

$$\boxed{\vec{a}=a_T\hat{v}+a_n\hat{n}}$$

	tangencial (a_t)	**normal (a_n)**
component	$a_T=\vec{a}\cdot\hat{v}=\dfrac{dv}{dt}$	$a_N=\lvert\vec{a}\times\hat{v}\rvert=\dfrac{v^2}{R_c}$
vector unitari	$\hat{v}=\dfrac{\vec{v}}{v}$	$\hat{n}=\dfrac{d\hat{v}}{dt}\Big/\left\lvert\dfrac{d\hat{v}}{dt}\right\rvert$



CINEMÀTICA DEL PUNT

1.- Breu repàs de càlcul vectorial

2.- Breu repàs de derivades

3.- Cinemàtica del punt

3.1.- Cinemàtica en una dimensió

3.1.1.- Velocitat i acceleració (mitjana i instantànies)

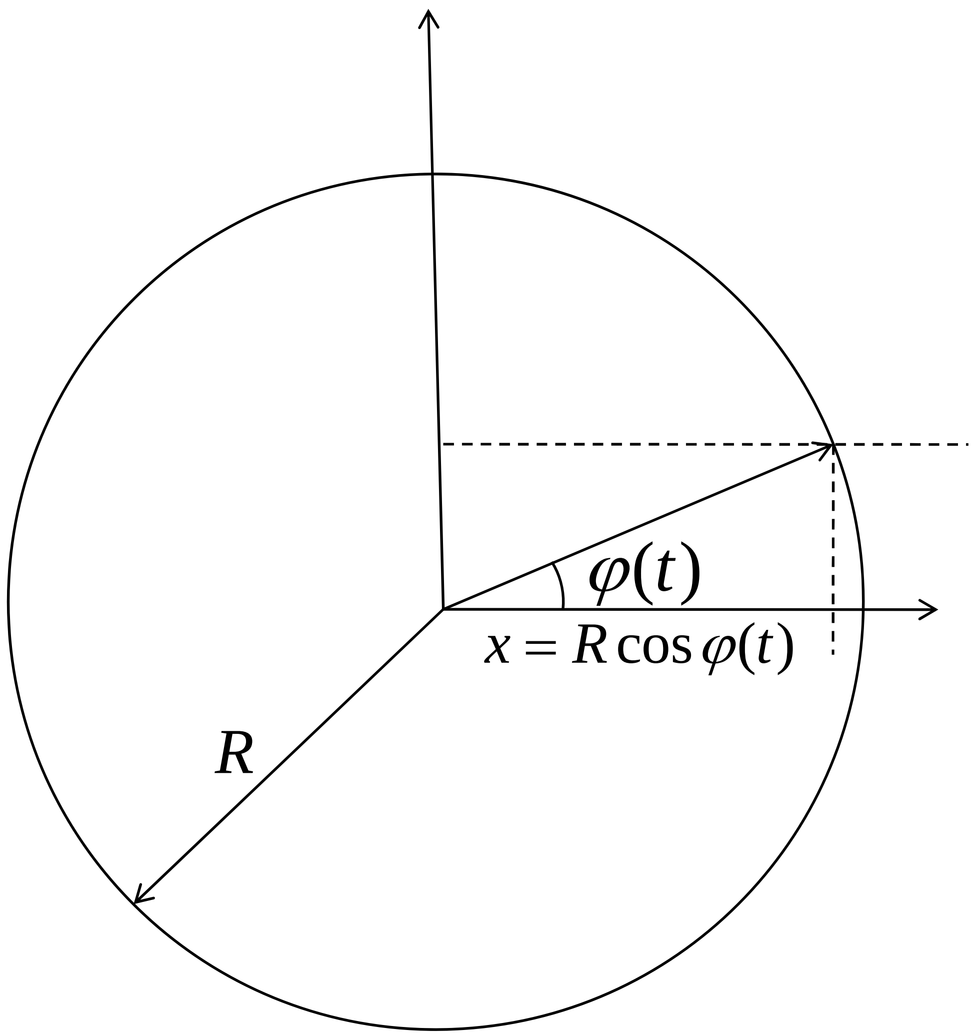
3.1.2.- Equacions del moviment

3.2.- Cinemàtica en dues dimensions (vectors r,v, i a)

3.3.- Moviment parabòlic

3.3.- Components intrínseques de l'acceleració: normal i tangencial

3.4.- Moviment circular



$\varphi(t)$ Angle (en funció del temps)

$\omega(t) = \dfrac{d\varphi}{dt}$ Velocitat angular

$\alpha(t) = \dfrac{d\omega}{dt}$ Acceleració angular

MCU $\omega(t) = \omega_0 = cte$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0)$$

MCUA

$$\omega(t) = \omega_0\left(t - t_0\right)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha\left(t - t_0\right)^2$$

Magnituds lineals

$x(t)$ Posició

$v(t) = \frac{dx}{dt}$ Velocitat

$a(t) = \frac{dv}{dt}$ Acceleració

MRU $v(t) = v_0 = cte$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)$$

MRUA

$$v(t) = v_0\left(t - t_0\right)$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a\left(t - t_0\right)^2$$

Magnituds angulars

$\varphi(t)$ Angle (en funció del temps)

$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}$ Velocitat angular

$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt}$ Acceleració angular

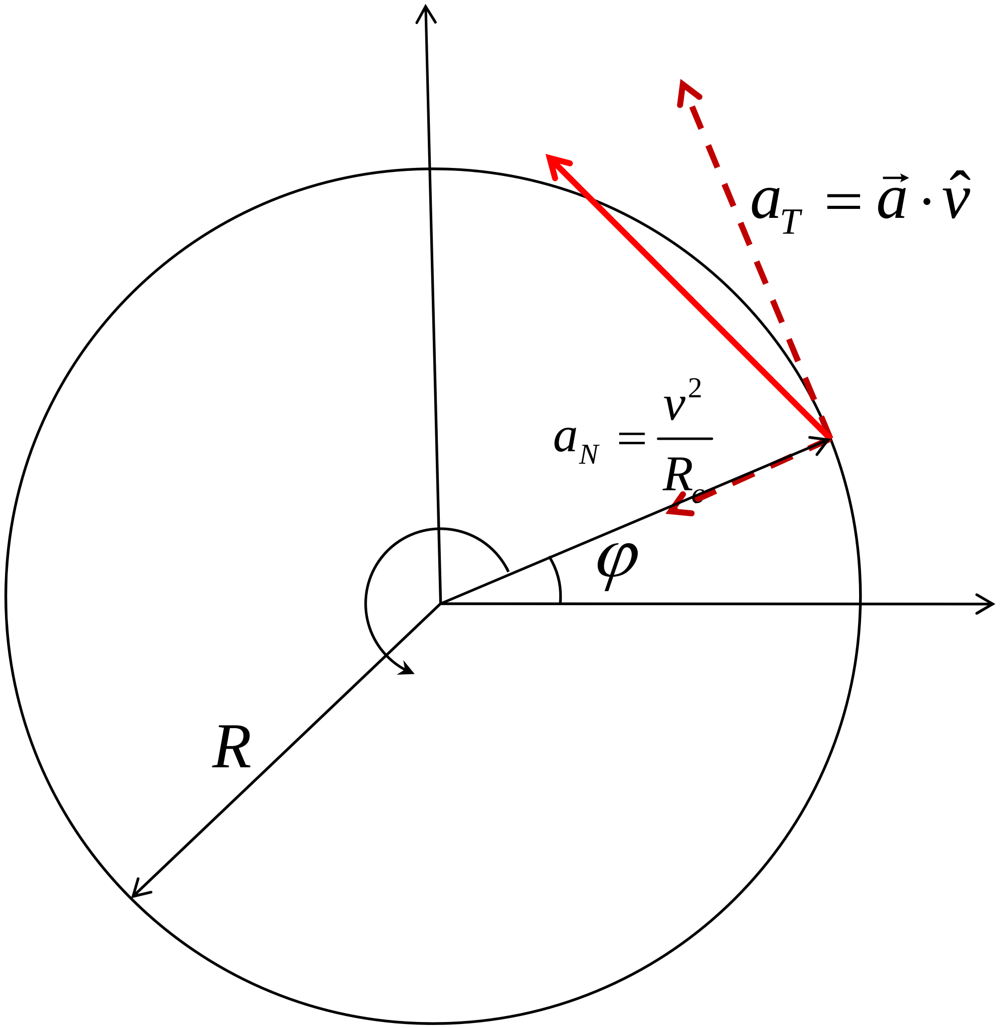
MCU $\omega(t) = \omega_0 = cte$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0)$$

MCUA

$$\omega(t) = \omega_0\left(t - t_0\right)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha\left(t - t_0\right)^2$$



MCU

$$a_N = cte$$

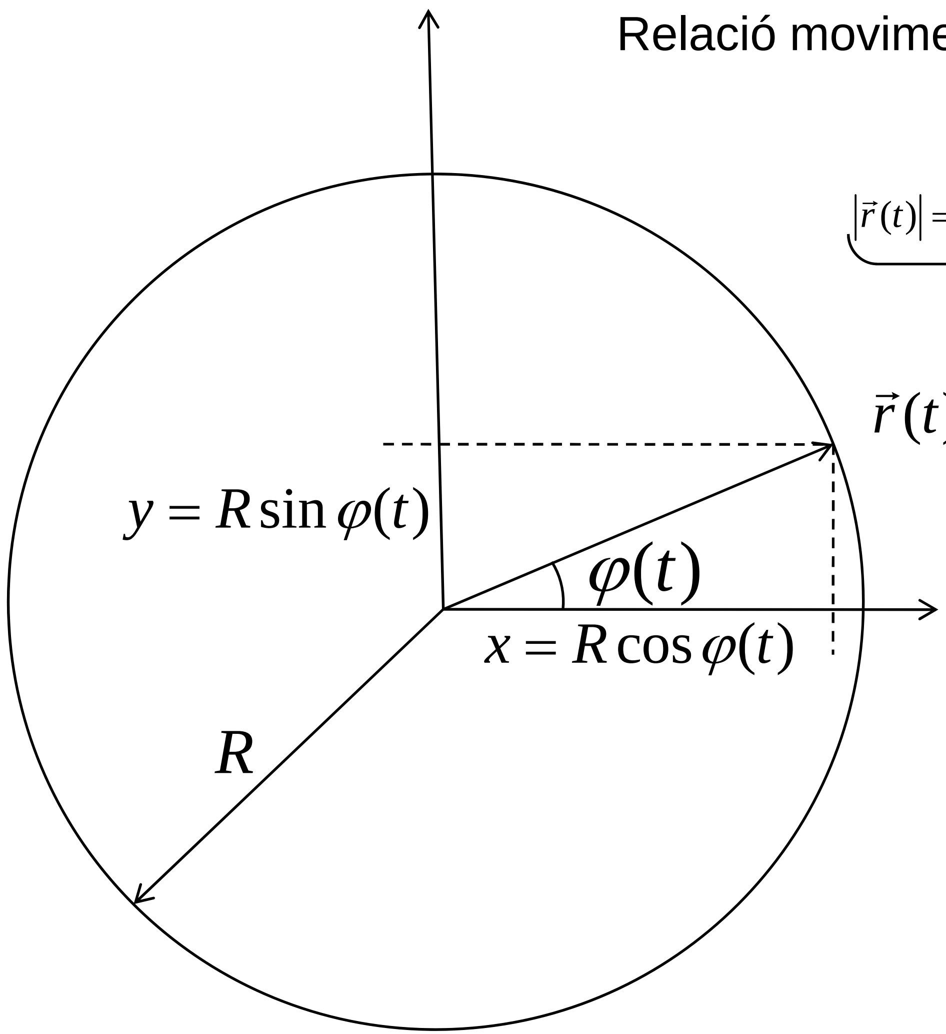
$$a_t = 0$$

MCUA

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \alpha^2 R t^2$$

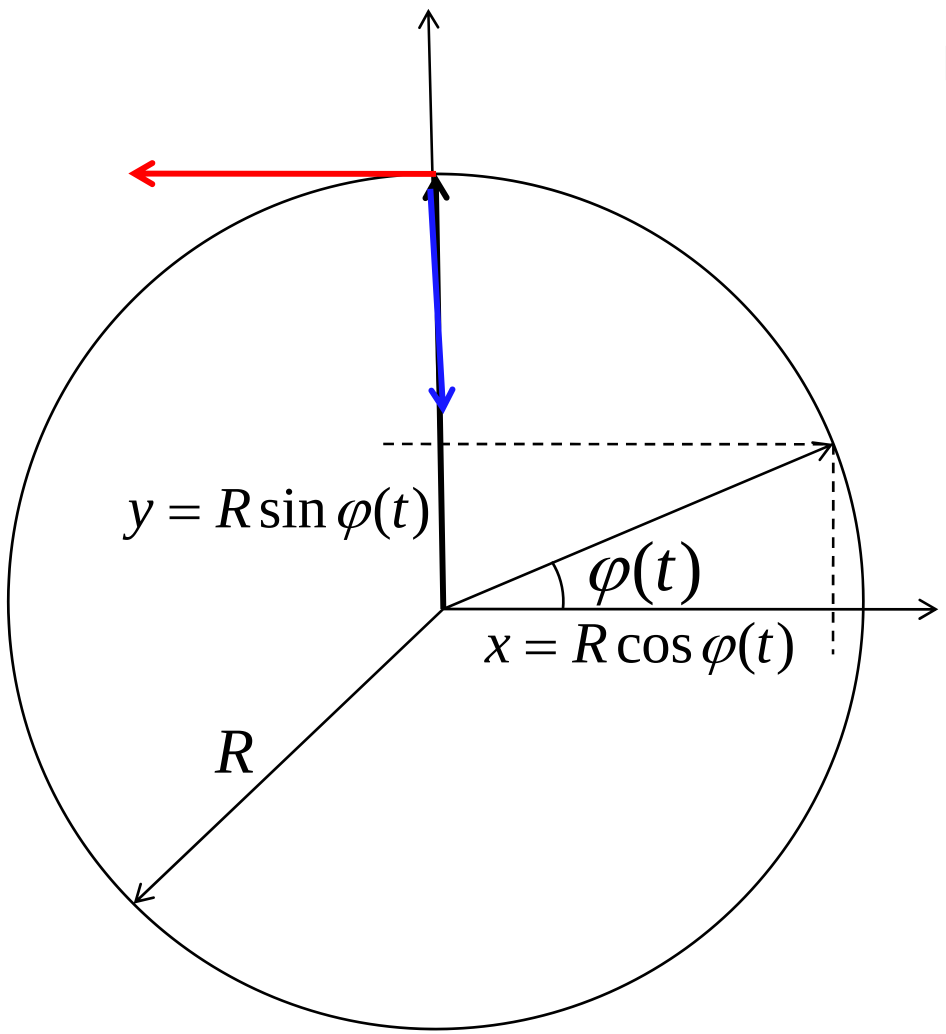
$$a_t = cte$$

Relació moviment circular $\Leftrightarrow$ coordenades cartesianes



$$\left|\vec{r}(t)\right| = \sqrt{R^2\cos^2\varphi(t) + R^2\sin^2\varphi(t)} = R\sqrt{\cos^2\varphi(t) + \sin^2\varphi(t)} = R$$

$$\vec{r}(t) = \left[R\cos\varphi(t), R\sin\varphi(t)\right] \Rightarrow \left|\vec{r}(t)\right| = R$$



Posició

$$\vec{r}(t) = \left[R\cos\varphi(t), R\sin\varphi(t)\right]$$

MCU (t_0=0, φ_0=0) $\Rightarrow$ $\varphi(t) = \omega_0 t$

$$\vec{r}(t) = R\left[\cos\left(\omega_0 t\right), \sin\left(\omega_0 t\right)\right]$$

Velocitat

$$\vec{v}(t) = R\omega_0\left[-\sin\left(\omega_0 t\right), \cos\left(\omega_0 t\right)\right]$$

$|\vec{v}(t)| = R\omega_0$ $\Rightarrow$ La celeritat és constant

Acceleració

$$\vec{a}(t) = R\omega_0^2\left[-\cos\left(\omega_0 t\right), \sin\left(\omega_0 t\right)\right]$$

$|\vec{a}(t)| = R\omega_0^2$ $\Rightarrow$ El mòdul d'acc. és constant

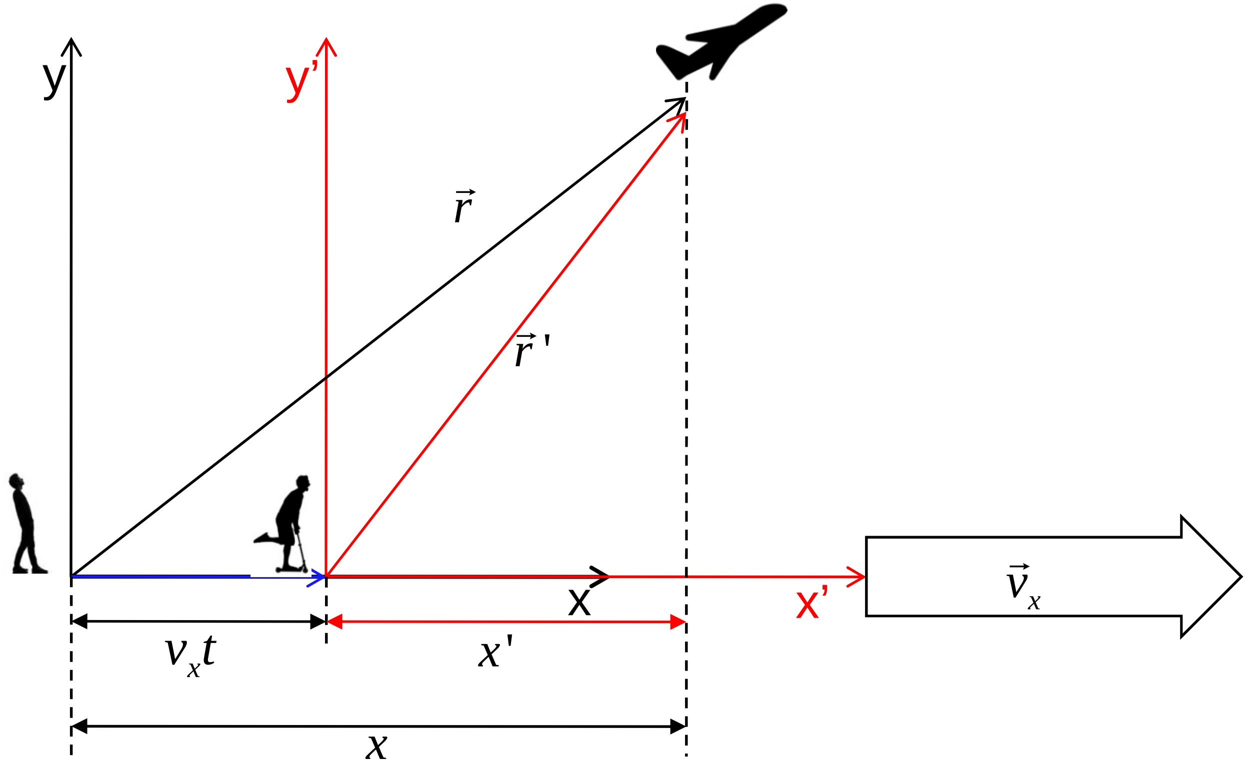
Components de l'acceleració

$$a_n = R\omega_0^2 \qquad a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d\left(R\omega_0\right)}{dt} = 0$$

21, 24, t4, t9

CINEMÀTICA DEL PUNT

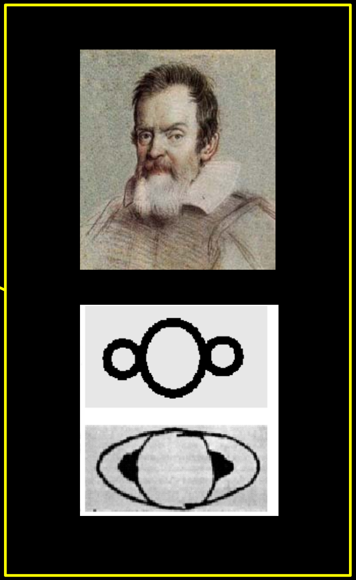
Com veu un observador que es mou un objecte respecte a un que està quiet?



$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{v}_x t \quad \begin{cases} y = y' \\ x = x' + v_x t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = y' \\ x' = x - v_x t \end{cases}$$

Saturn devorant els seus fills

Peter Paul Rubens
1577-1640



Saturn devorant els seus fills

Peter Paul Rubens
1577-1640

Francisco José de Goya
1746 – 1828