Mecànica Fonamental

Luis Carlos Pardo
Despatx C2.4, EEBE

1.- Forces sobre un sistema de partícules

2.- Centre de masses

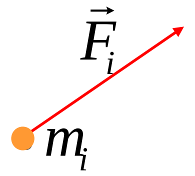
3.- Quantitat de moviment en un sistema de partícules

4.- Energia d’un sistema de partícules

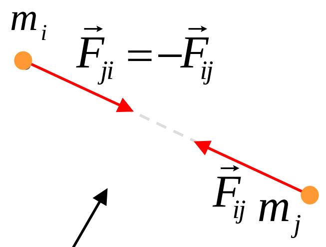
5.- Xocs

Forces sobre un sistema de N partícules

Forces externes
són causades per agents físics
que no pertanyen al sistema considerat



Forces internes
són causasdes per les forces que es fan
entre les partícules dins el sistema



Apliquem la segona llei

Per a cada partícula i es cumpleix :

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ji} = m_i \vec{a}_i$$

Si ara sumem per TOTES les partícules i :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ji} \right) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Per la tercera llei $F_{ij}=-F_{ji}$

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ji} \right) = \sum_{i,j=1}^{N} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \sum_{i,j=1}^{N} \vec{F}_{ij} - \vec{F}_{ij} = 0$$

1.- Forces sobre un sistema de partícules

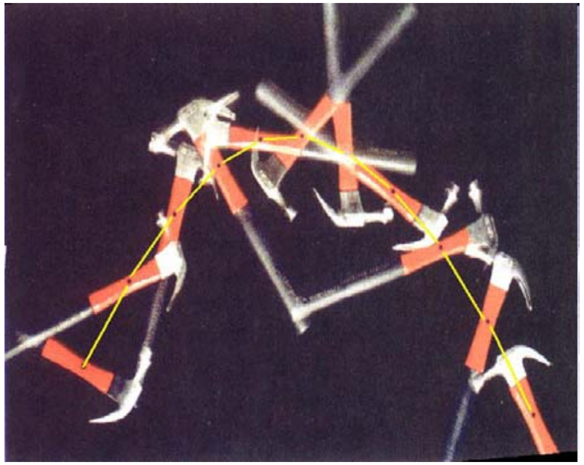
2.- Centre de masses

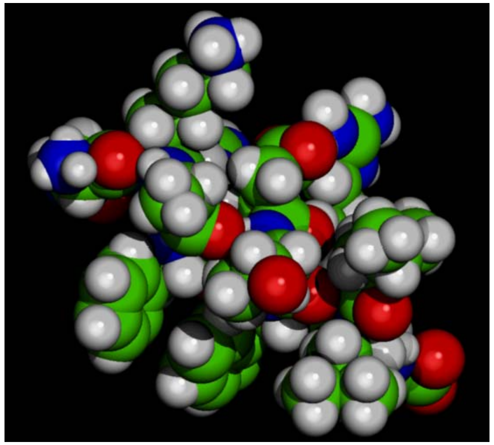
3.- Quantitat de moviment en un sistema de partícules

4.- Energia d’un sistema de partícules

5.- Xocs

Ens diu el centre de gravetat
condicions d'equilibri





Ens permet dividir els moviments en
Centre de masses + moviments interns

(MOLT important per estudiar moviments moleculars)

Centre de Masses (CM)

$$\vec{F}_{ext} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{a}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_{CM} = M\vec{a}_{CM}$$

$$\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM}$$

Definim per tant:

$$\vec{a}_{CM} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{a}_i$$

Acceleració del CM

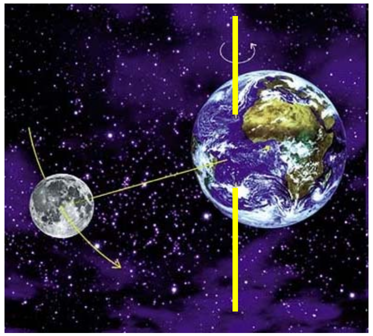
$$\vec{v}_{CM} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{v}_i$$

Velocitat del CM

$$\vec{R}_{CM} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i$$

Posició del CM

La lluna NO orbita al voltant de la terra!!! Orbiten tots dos al voltant del CM



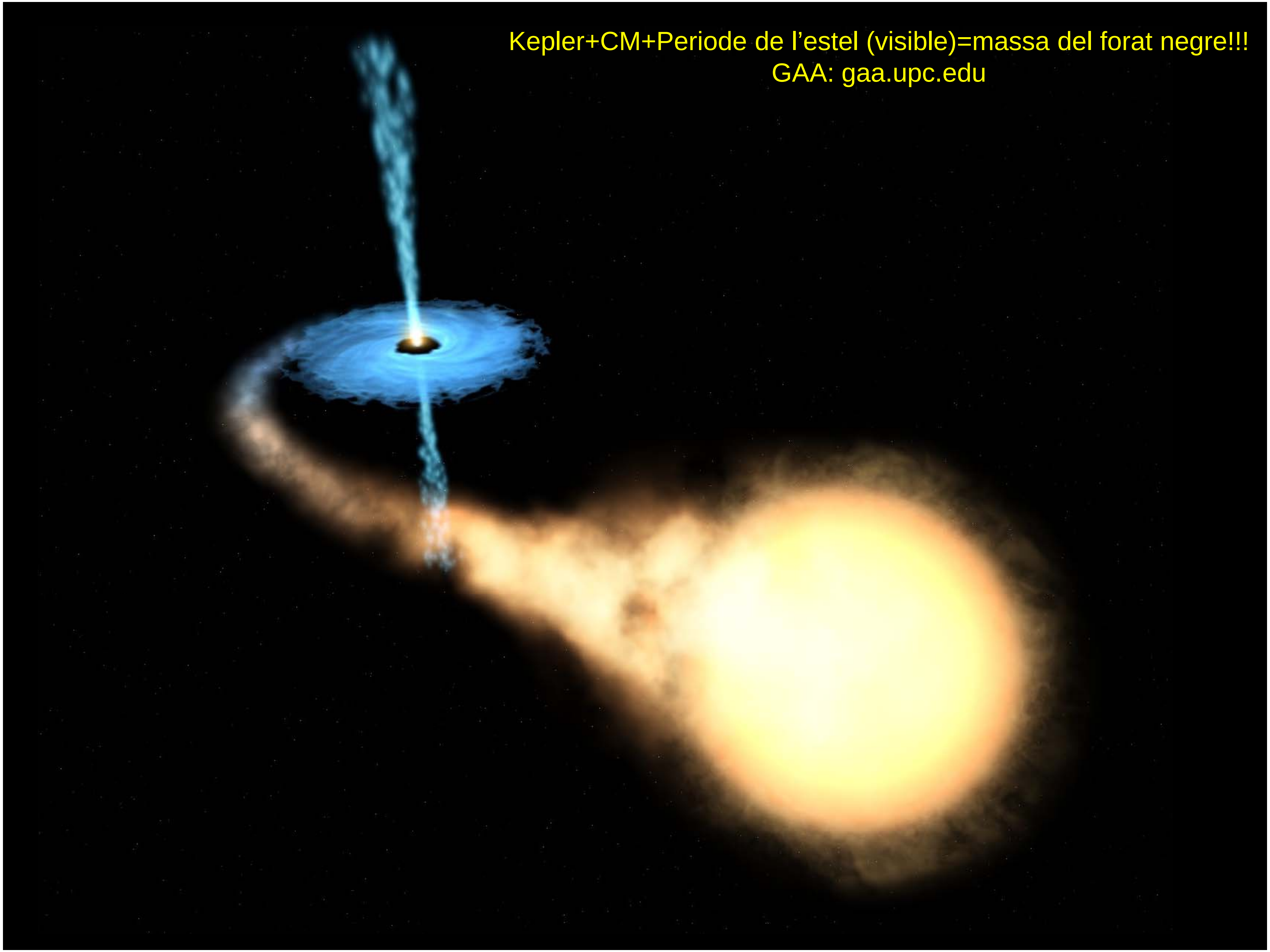
$M_{lluna}=7 \cdot 10^{22}$kg

$d_{t-ll}=3.84 \cdot 10^{5}$ km

$M_{terra}=6 \cdot 10^{24}$kg

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{m_{terra} \cdot 0 + m_{lluna} \cdot d_{t-ll}}{m_{terra} + m_{lluna}} \vec{i} \approx \frac{1}{100} d_{t-ll}$$

T11


Kepler+CM+Periode de l'estel (visible)=massa del forat negre!!!
GAA: gaa.upc.edu

1.- Forces sobre un sistema de partícules

2.- Centre de masses

3.- Quantitat de moviment en un sistema de partícules

4.- Energia d’un sistema de partícules

5.- Xocs

Quantitat de moviment per un sistema de partícules:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = M\vec{v}_{CM} = \vec{P}_{CM}$$

$$\boxed{\vec{F}_{externa} = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt}}$$

(recordem:F_{int}=0 per la 3ª llei de Newton!)

Si la **força externa** es nul·la el **moment linial** es conserva

$$\boxed{\frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} = 0}$$

Exemple

El centre de masses es mou
amb el moment de la bola inicial!!!

$$m_{blanca}\vec{v}_{blanca} = \sum_{i=totselscolors} m_i \vec{v}_i$$

Quantitat de moviment total respecte el centre de masses

Sabem (hem demostrat) : $$\vec{P}_{CM} = \vec{P}_{TOTAL}$$

La posició del CM respecte del CM es (0,0,0) SEMPRE.
(és la posició d'ell respecte a ell mateix)
Per tant no es mou i la velocitat del CM respecte al CM és (0,0,0)

$$\vec{V}_{CM \to CM} = 0$$

Per tant, el moment TOTAL respecte al CM és:

$$\vec{P}_{CM \to TOTAL} = \vec{P}_{CM \to CM} = M\vec{V}_{CM \to CM} = 0$$

El moment total P_{TOTAL} respecte al CM es ZERO

P1, P3, T1, **T4, T5**, T6, **T12**, **T14**, T18

1.- Forces sobre un sistema de partícules

2.- Centre de masses

3.- Quantitat de moviment en un sistema de partícules

4.- Energia d’un sistema de partícules

5.- Xocs

Estenem les defincions d'un cos a N cossos

un cos		**n cossos**
$E_{c,i} = \frac{1}{2} m \; v^2$	Energia cinètica Si el moviment és de translació!	$\boxed{E_c = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \, v_i^2 = \frac{1}{2} M \, v_{CM}^2}$
$U_{i=1} = \sum_{j=1}^{N} U_{i=1,j}$	Energia Potencial "interna" $W = -\Delta U$	$\boxed{U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} U_{ij} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j>i}^{N} U_{ij}}$ **Si F_{ext}=0!!!!**
$E = \frac{1}{2} m v^2 + U$	Energia Mecànica Si el moviment és de translació $\frac{dE}{dt} = 0$	$\boxed{E = \frac{1}{2} m \, v_{CM}^2 + U}$

1.- Forces sobre un sistema de partícules

2.- Centre de masses

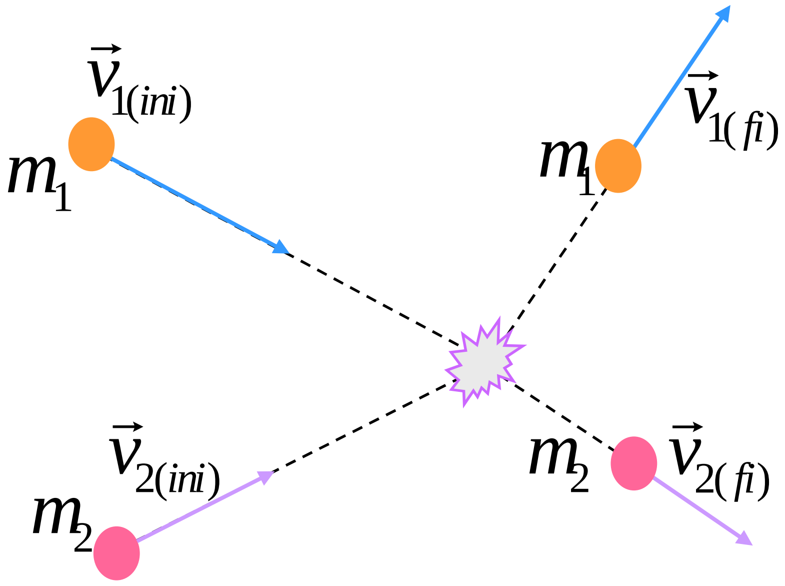
3.- Quantitat de moviment en un sistema de partícules

4.- Energia d’un sistema de partícules

5.- Xocs

Xoc

Un **xoc** és el procés en el que dos o més partícules només interactuen **molt intensament i a molt curta distància**: això implica que F_{ext} es pot considerar zero.



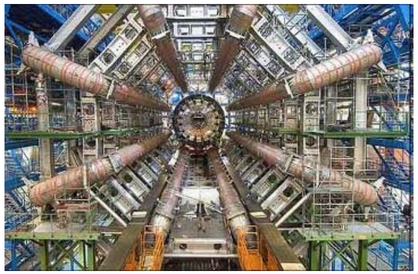
$$\boxed{\vec{P}_{(ini)} = \vec{P}_{(fi)}}$$

Si F_{ext}=0!!!!!!

$$m_1\vec{v}_{1,ini} + m_2\vec{v}_{2,ini} = m_1\vec{v}_{1,fi} + m_2\vec{v}_{2,fi}$$

TOFTOF en FRMII

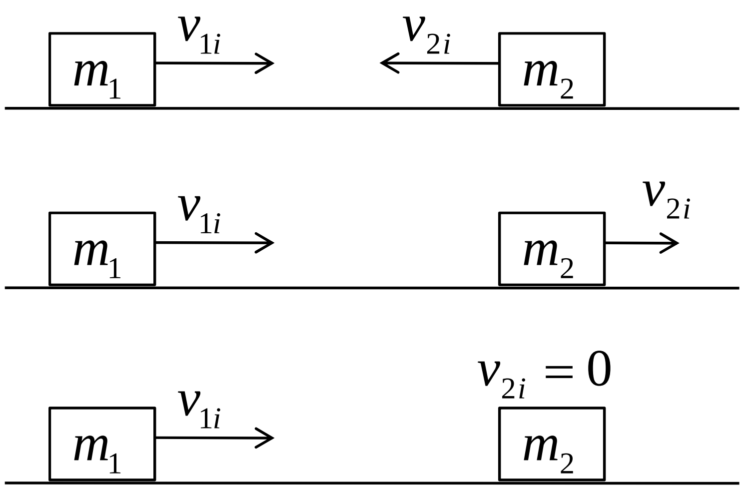
www.frm2.tum.de/en/science/spectrometry/toftof/index.html



Large Hadron Collider

http://lhc.web.cern.ch/lhc/

Suposem un xoc elàstic unidimensional



Per exemple un xoc frontal
$v_{1i}>0$; $v_{2i}<0$

Per exemple un xoc per darrera
$v_{1i}>0$; $v_{2i}>0$ i $v_{1i}>v_{2i}$

Per exemple un xoc amb m_2 quieta
$V_{2i}=0$

Elàstic➔Conservació de energia

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2i}^2=\frac{1}{2}m_1v_{1f}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2f}^2$$

Fext=0➔Conservació del moment

$$m_1v_{1i}+m_2v_{2i}=m_1v_{1f}+m_2v_{2f}$$

Calculem la velocitat final... Però el sistema és horrible

Objectiu: canviar l'equació de conservació per una sense quadrats

Simplifiquem el “1/2”
i
Agrupem termes amb
m_1 i m_2

$$\begin{cases} m_1 v_{1i}^2 - m_1 v_{1f}^2 = m_2 v_{2f}^2 - m_2 v_{2i}^2 \\ m_1 v_{1i} - m_1 v_{1f} = m_2 v_{2f} - m_2 v_{2i} \end{cases}$$

Apliquem:

$$(a+b)(a-b) = (a^2 - b^2)$$

$$\begin{cases} m_1 \left(v_{1i} - v_{1f}\right)\left(v_{1i} + v_{1f}\right) = m_2 \left(v_{2f} - v_{2i}\right)\left(v_{2f} + v_{2i}\right) \\ m_1 \left(v_{1i} - v_{1f}\right) = m_2 \left(v_{2f} - v_{2i}\right) \end{cases}$$

Dividim la primera equació
entre la segona

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

I ja està...
Però normalment agrupem
Les velocitats inicials i finals

$$\boxed{v_{2f} - v_{1f} = -\left(v_{2i} - v_{1i}\right)}$$

Per tant tenim una nova equació de “conservació” de l’energia que és lineal en v

Què significa això:

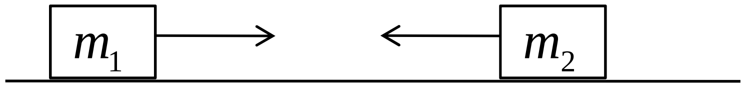
SI EL XOC ÉS ELÀSTIC

Per exemple

INICIAL

Velocitat relativa d'aproximació inicial $v_{2i} - v_{1i}$

$$v_{1i} = 2 \, {}^{m}\!/_{s} \qquad v_{2i} = -3 \, {}^{m}\!/_{s}$$

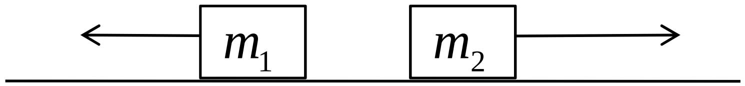


$$v_{2i} - v_{1i} = -5 \, {}^{m}\!/_{s}$$

FINAL

Velocitat relativa d'allunyament final $v_{2f} - v_{1f}$

$$v_{1i} = -? \, {}^{m}\!/_{s} \qquad v_{2i} = +? \, {}^{m}\!/_{s}$$



$$v_{2f} - v_{1f} = -\left(v_{2i} - v_{1i}\right) \Rightarrow v_{2f} - v_{1f} = 5 \, {}^{m}\!/_{s}$$

No sabem les velocitats finals, però s'allunyaran a la mateixa velocitat relativa

Calculem, per fi, les velocitats finals

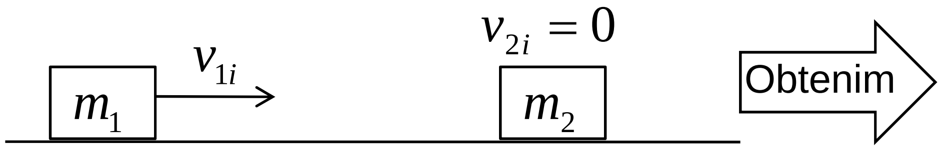
Elàstic➔Conservació de energia $\qquad v_{2f} - v_{1f} = -\left(v_{2i} - v_{1i}\right)$

Fext=0➔Conservació del moment $\qquad m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$

Aïllant:

$$v_{1f} = \frac{2m_2 v_{2i} + \left(m_1 - m_2\right) v_{1i}}{m_1 + m_2} \qquad v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i} + \left(m_1 - m_2\right) v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

Suposem que v_{2i}=0



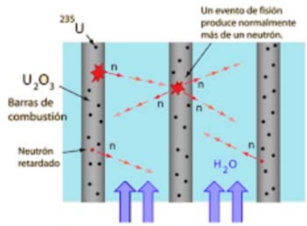
$$v_{1f} = \frac{\left(m_1 - m_2\right) v_{1i}}{m_1 + m_2} \qquad v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2}$$

Si volem que la segona partícula tingui velocitat màxima: m_2 mooolt petita

$$v_{1f} = \frac{\left(m_1 - m_2\right) v_{1i}}{m_1 + m_2} \approx v_{1i} \qquad v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2} \approx 2v_{1i}$$

Si m1=m2: transferència total de moment! Moderador en centrals nuclears

$$v_{1f} = \frac{\left(m_1 - m_2\right) v_{1i}}{m_1 + m_2} = 0 \qquad v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2} \approx v_{1i}$$



El agua como refrigerante y moderador fluye entra las barras de combustible.

... I si el xoc NO es elàstic

~~Elàstic➔Conservació de energia~~ $\cancel{v_{2f} - v_{1f} = -(v_{2i} - v_{1i})}$ No es cumpleix

Fext=0➔Conservació del moment $m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$

Si el xoc no és elàstic i es perd energia: la velocitat relativa final serà més petita que la inicial

$$\left\| v_{2f} - v_{1f} \right\| < \left\| v_{2i} - v_{1i} \right\|$$

Si el xoc no és elàstic i es guanya energia: la velocitat relativa final serà més gran que la inicial

$$\left\| v_{2f} - v_{1f} \right\| > \left\| v_{2i} - v_{1i} \right\|$$

En qualsevol cas no es igual la velocitat relativa inicial i final
Definim el coeficient de restitució per quantificar la pèrdua “de velocitat relativa”

$$e = -\frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{2i} - v_{1i}}$$

Coeficient de restitució

Classificació dels xocs

Elàstics $e=1$ El sistema és conservatiu	Inelàstics $e \neq 1$ El sistema no és conservatiu

No hi ha forces externes

$$\vec{P}_{ini} = \vec{P}_{fi}$$

El moment es conserva

L'energia cinètica es conserva	L'energia cinètica no es conserva
$E_{c(ini)} = E_{c(fi)}$	$E_{c(ini)} \neq E_{c(fi)}$

Completament inelàstics

Implosió	**Explosió**
les partícules queden unides	una partícula dona lloc a més partícules
$v_{1(fi)} = v_{2(fi)}$	$v_{1(ini)} = v_{2(ini)}$
$e = -\dfrac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{2i} - v_{1i}} = 0$	$e = -\dfrac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{2i} - v_{1i}} = -\infty$

P5, P9, P14, P19, P24, t2, t3

Xocs de dues partícules des del sistema centre de masses:

$$\vec{v}_{CM} \equiv \frac{m_1\vec{v}_2 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

La velocitat de la partícula 1, respecte al CM:

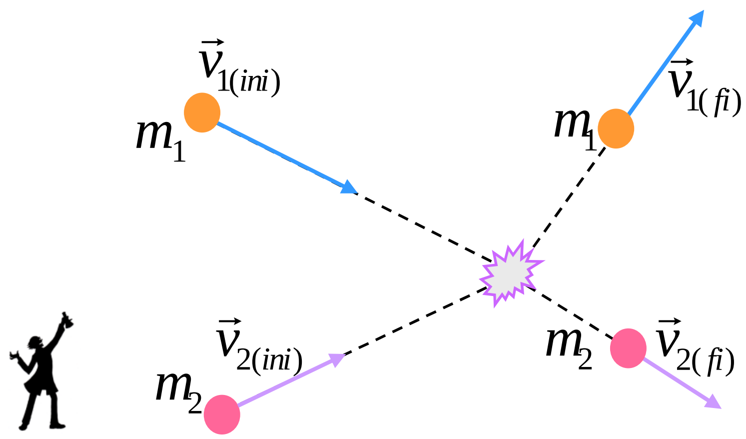
$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)$$

La velocitat de la partícula 1, respecte al CM:

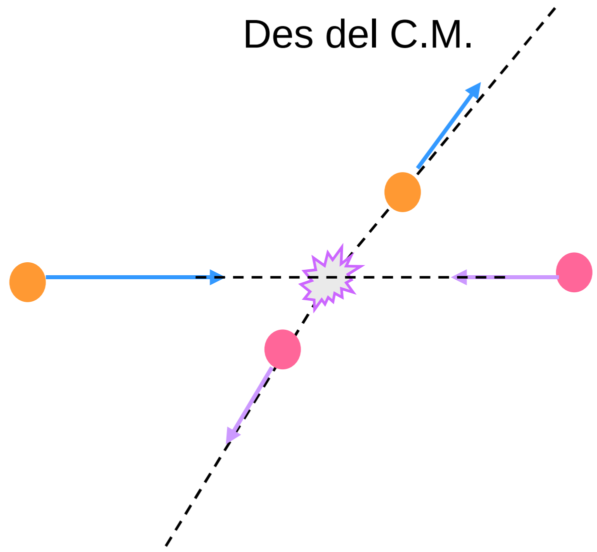
$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM} \equiv -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)$$

Les dues partícules es mouen en la mateixa direcció però en sentit contrari!!!!

Des de “fora”



Des del C.M.



El Jardin de las delicias, El bosco, 1480