Mecànica Fonamental

Luis Carlos Pardo
Despatx C2.4, EEBE

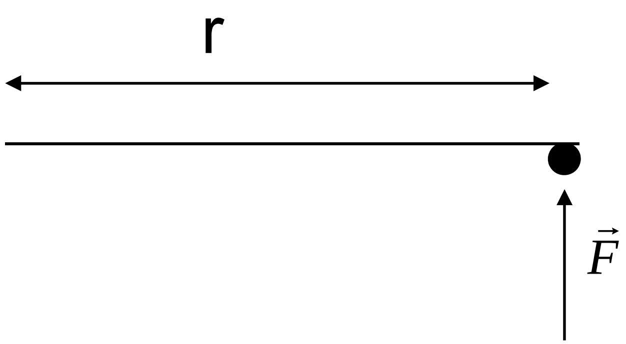
1.- Defincions en sistems en rotació
- 1.1.- Moment d’una força
- 1.2.- Moment angular
- 1.3.- Lleis de Kepler

2.- Estàtica dels sòlids rígids

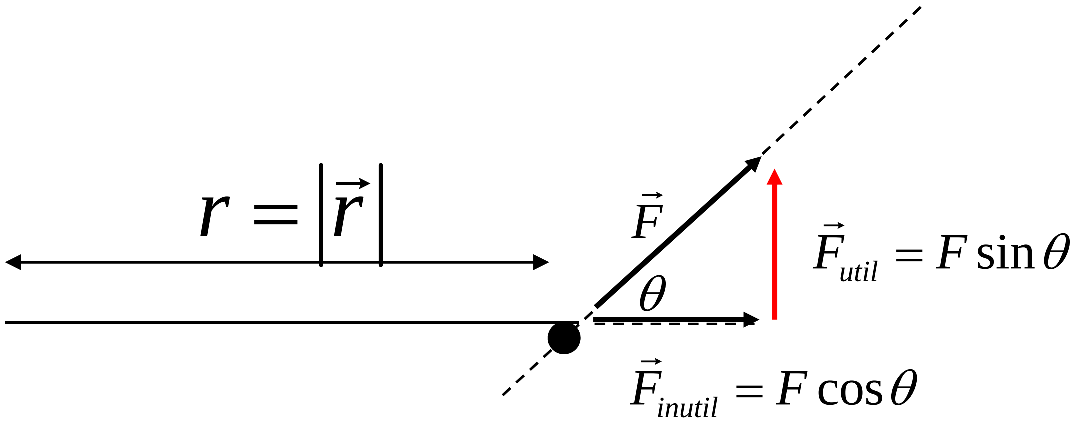
3.- Segona llei de Newton per a la rotació

4.- Treball de sistemes en rotació
- 4.1.- Energia cinètica i potencial

Com obrir una porta? (definir "facilitat per fer girar")



"Facilitat per fer girar" = r·F

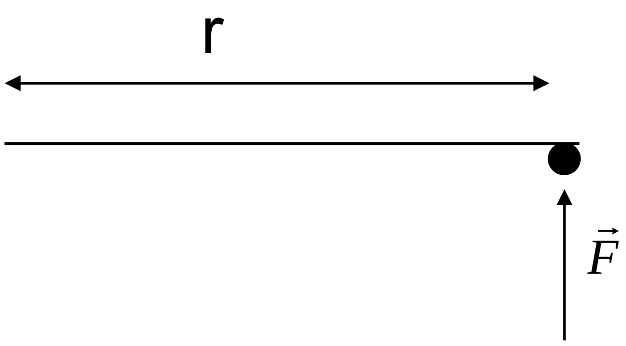


θ és l'angle entre *r* i *F*

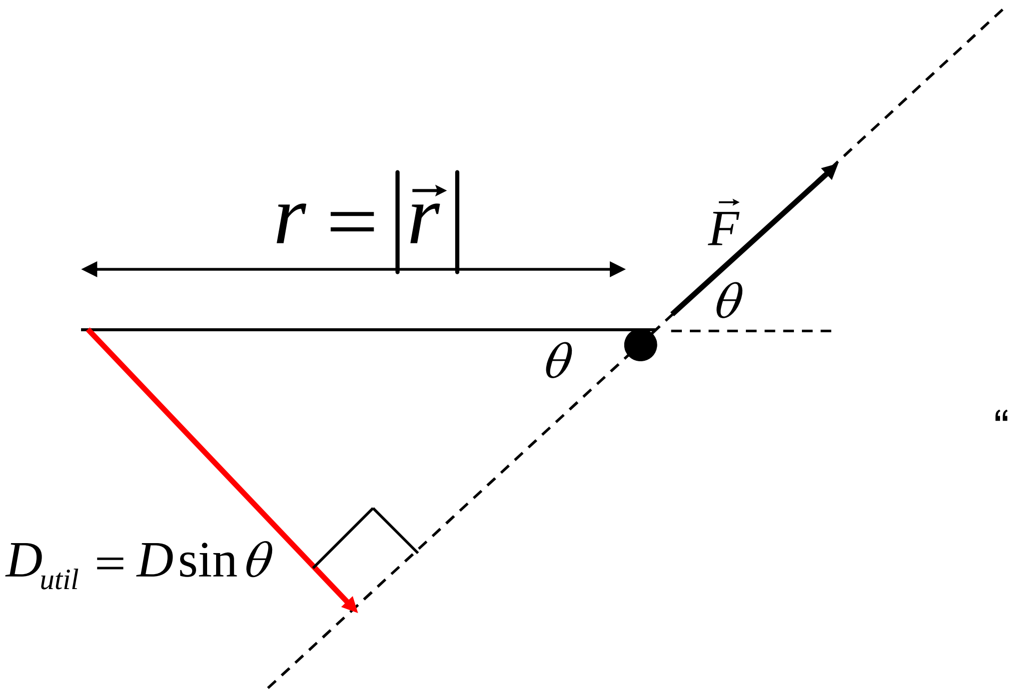
"Facilitat per fer girar" = $r \cdot F_{util} = \underbrace{r \cdot F \cdot \sin\theta}$

Això es un PEV!!!!!!

Com obrir una porta? (definir "facilitat per fer girar")



"Facilitat per fer girar" = r·F



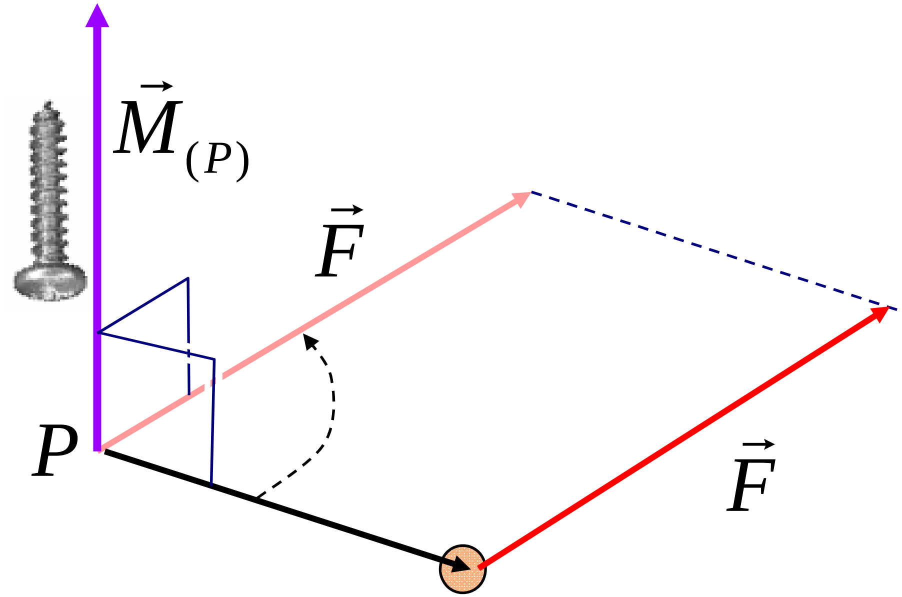
D $_{útil}$ = braç de palanca

"Facilitat per fer girar" = "bp"·F

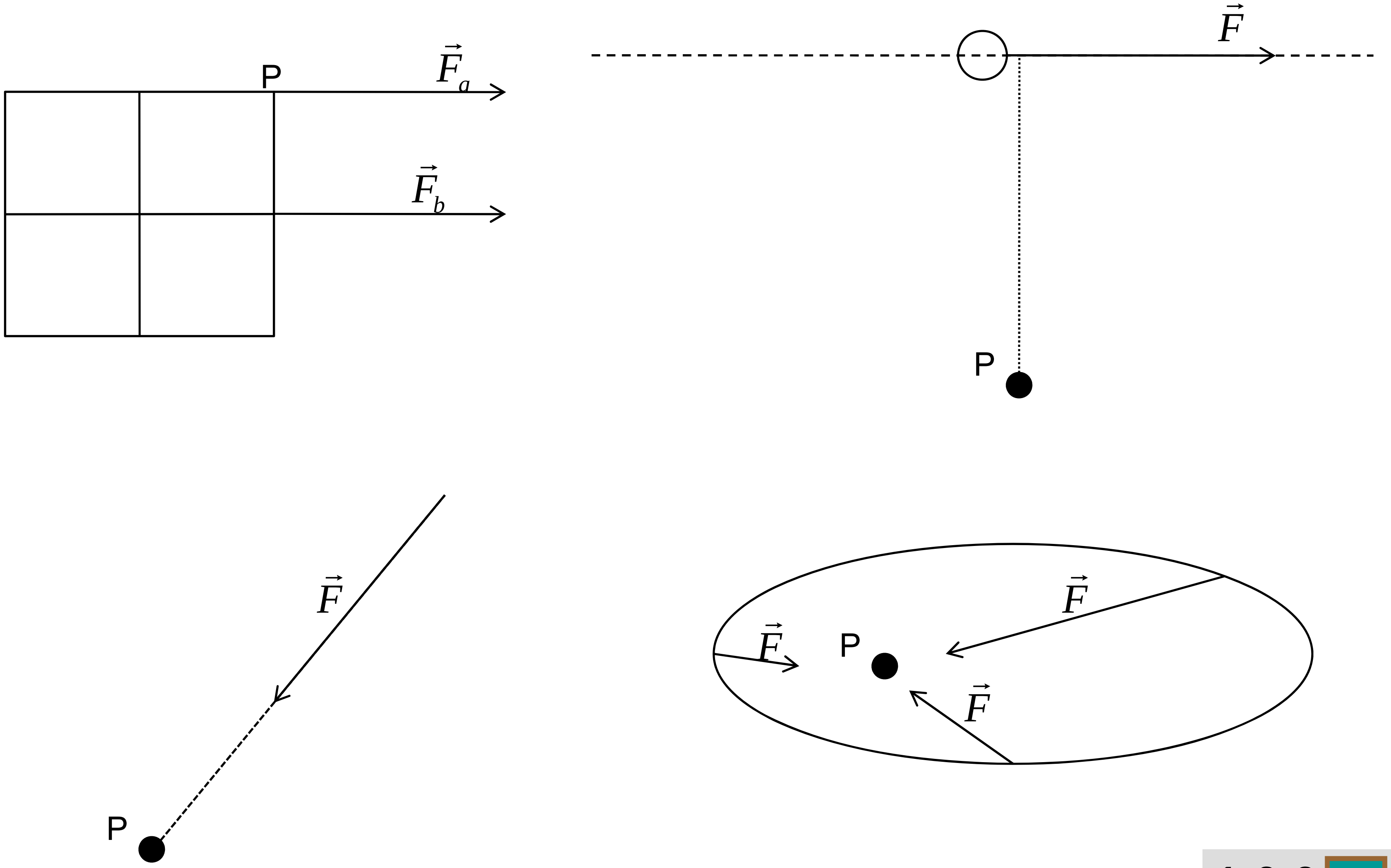
"Facilitat de gir" = moment d'una força respecte a l'eix de gir

Es defineix **moment** $\vec{M}_{(P)}$ **d'una força** $\vec{F}$ **respecte d'un punt** P

$$\boxed{\vec{M}_{(P)} = \vec{r}_{(P)} \times \vec{F}}$$



Alguns exemples: Calcula el moment de les forces respecte el punt P.



1, 2, ~~3~~

Per moviments linials

Relaciona la causa

$$\vec{F}$$

Força

Segona Llei

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Amb l'efecte

$$\frac{d\vec{p}}{dt}$$

Canvi en el moment lineal

…i per als girs????

La causa

$$\vec{M}_{(P)} = \vec{r}_{(P)} \times \vec{F}$$

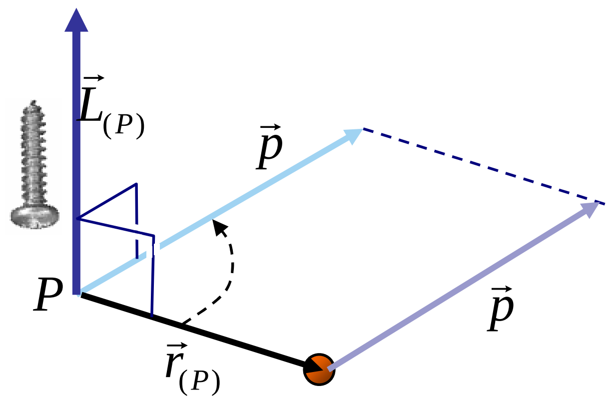
Moment de la força

L'efecte??

Cal definir una nova magnitut!!!!!

Es defineix **moment angular** $\vec{L}_{(P)}$ **d'una partícula respecte d'un punt** P

$$\vec{L}_{(P)} = \vec{r}_{(P)} \times \vec{p}$$



Per moviments linials

Relaciona la causa

$$\vec{F}$$

Força

Segona Llei

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Amb l'efecte

$$\frac{d\vec{p}}{dt}$$

Canvi en el moment lineal

…i per als girs????

La causa

$$\vec{M}_{(P)} = \vec{r}_{(P)} \times \vec{F}$$

Moment de la força

$$\vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\left(\vec{r} \times \vec{P}\right)}{dt}$$

$$\boxed{\vec{M}_{(P)} = \frac{d\vec{L}_{(P)}}{dt}}$$

L'efecte??

$$\frac{d\vec{L}_{(P)}}{dt}$$

Moment angular

Llei de conservació angular

si sobre la partícula no actua cap moment associat a una força, el moment angular es manté constant.

Per moviments linials

La resistència que ofereix un cos a canviar la seva velocitat linial
TANT EN MÒDUL COM EN DIRECCIÓ

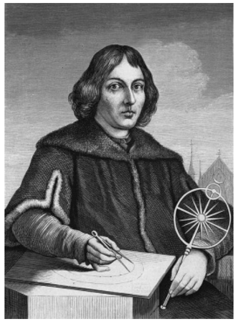
$$\boxed{\vec{P} = m\vec{v}}$$

Per als girs????

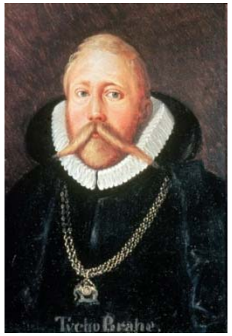
La resistència que ofereix un cos a canviar la seva rotació
TANT EN MÒDUL COM EN DIRECCIÓ

$$\boxed{\vec{L}_{(P)} = \vec{r}_{(P)} \times \vec{p}}$$

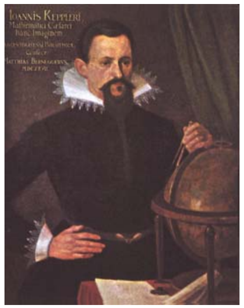
Linial		Angular (girs)
	Definicions	
Força $\vec{F}$		Moment d'una força $\vec{M}_{(P)} = \vec{r}_{(P)} \times \vec{F}$
Moment linial $\vec{p}$		Moment angular $\vec{L}_{(P)} = \vec{r}_{(P)} \times \vec{p}$
	Llei de moviment	
$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$		$\vec{M}_{(P)} = \dfrac{d\vec{L}_{(P)}}{dt}$
	Teoremes "del moment"	
$\vec{I} = \Delta\vec{p}$		$\vec{Y}_{(P)} = \Delta\vec{L}_{(P)}$
	Llei de conservació	
Si $\vec{F}=0$ llavors $\vec{P}$=ct		Si $\vec{M}=0$ llavors $\vec{L}$=ct



Nicolaus Copernicus
(heliocèntric)
1473-1543



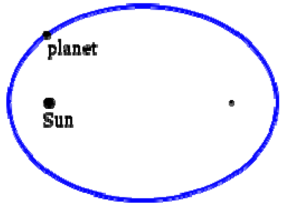
Tycho Brahe **(geocèntric)**
1546-1601



Johannes Kepler **(heliocèntric)**
1571-1630

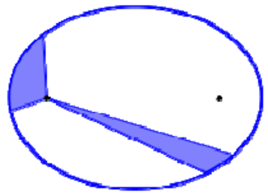
Primera llei

Els planetes tenen òrbites el·líptiques i el Sol és en un dels focus.



Segona llei

Els planetes no es mouen uniformement, sinó que el radi vector que uneix el centre del planeta amb el Sol escombra àrees iguals en temps iguals.

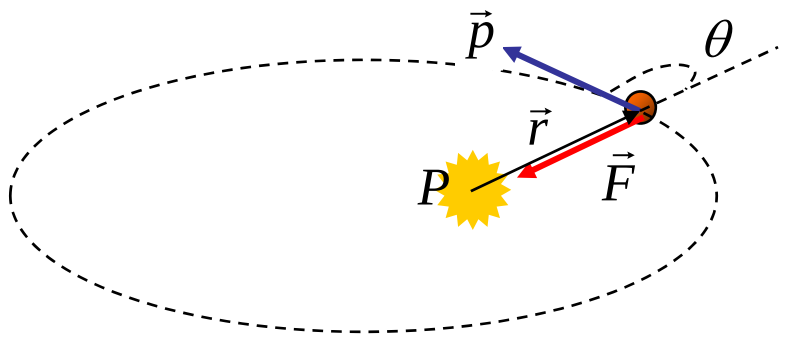


Tercera llei

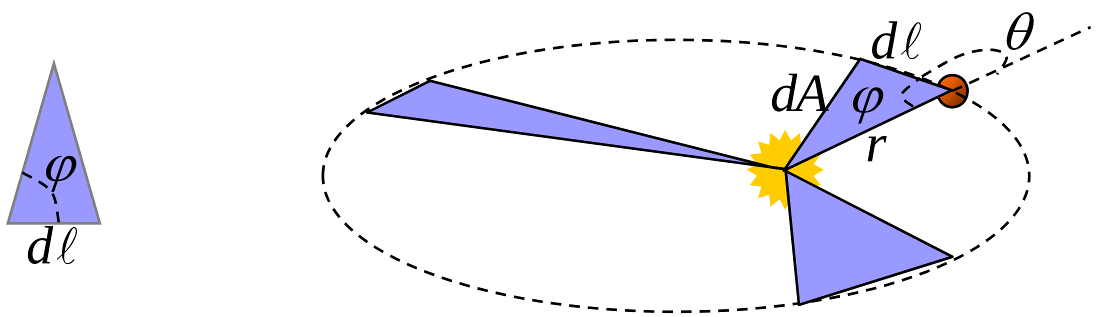
El quadrat dels períodes dels planetes són proporcionals al cub de la distància mitjana al Sol

$$T^2 \propto d^3$$

Prenem moments respecte del punt P en el Sol. El moment de la força és nul per tant el moment angular es conserva:



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \mathrm{ct} \Rightarrow m r v \sin\theta = \mathrm{ct} \Rightarrow r \frac{d\ell}{dt} \sin\theta = \mathrm{ct}$$



$$dA = \frac{1}{2} r\, d\ell \sin\varphi = \frac{1}{2} r\, d\ell \sin\theta$$

L'area dA escombrada pel vector posició en un dt és

així, de la conservació del moment angular obtenim: $\frac{dA}{dt} = \mathrm{ct}$

que constitueix la **segona llei de Kepler**: les àrees escombrades pel vector posició del planeta en temps iguals són iguals.

1.- Defincions en sistems en rotació
  1.1.- Moment d’una força
  1.2.- Moment angular
  1.3.- Lleis de Kepler

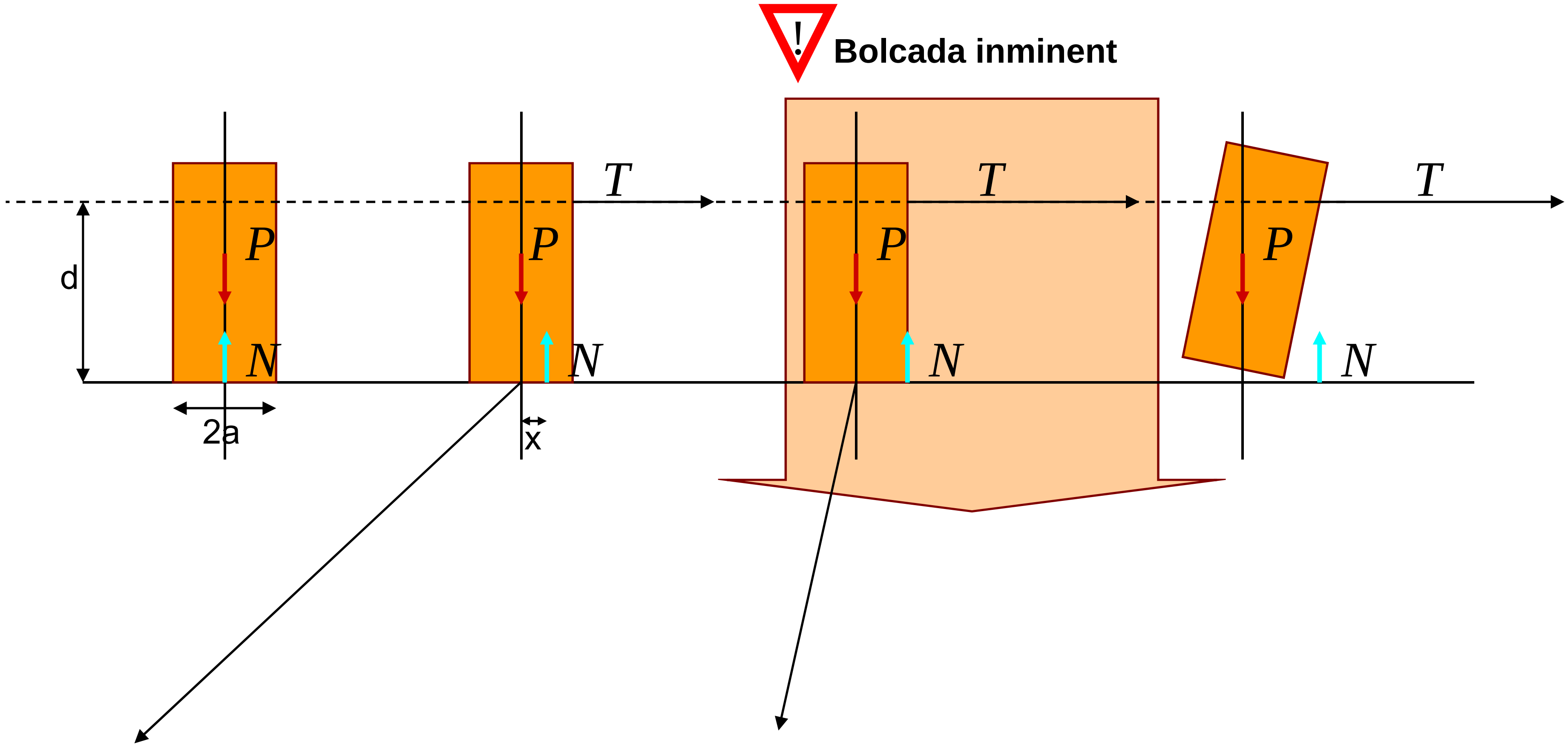
2.- Estàtica dels sòlids rígids

3.- Segona llei de Newton pe a la rotació

3.- Treball de sistemes en rotació
  3.1.- Energia cinètica i potencial

	Translació	Rotació
Equació del moviment	$\sum \vec{F} = m\vec{a}_{CM}$	$\sum \vec{M}_C = \dfrac{d\vec{L}_C}{dt}$
Condició d'equlibri	Si les forces son zero: P=cte $\sum \vec{F} = \vec{0}$	Si els moments son zero: L=cte $\sum \vec{M}_C = \vec{0}$

t1,t2,t3



Calculem moments

$$xN = Td$$

$$x = \frac{Td}{mg}$$

Calculem moments

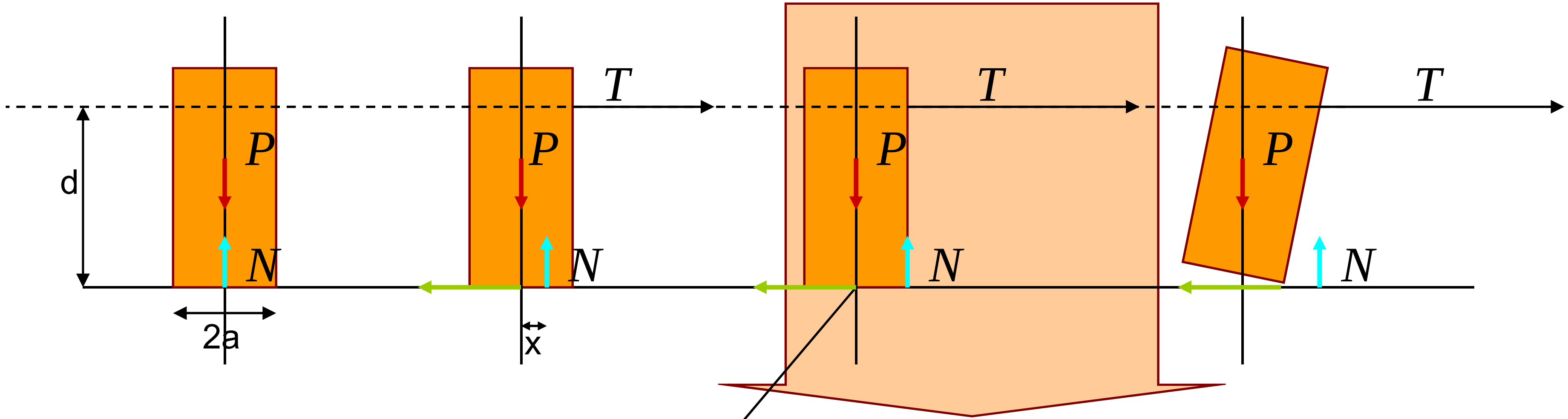
$$aN = Td$$

$$T = \frac{aN}{d}$$

BOLCA!

Més dificil encara…

Bolcada o relliscada???



Bolca o llisca?

BOLCA!

$$\boxed{\sum \vec{M} = 0}$$

$$aN = T_b d$$

$$T_b \geq \frac{a}{d} mg$$

LLISCA!

$$\boxed{\sum \vec{F} = 0}$$

$$T_{Ll} - \mu mg = 0$$

$$T_{Ll} \geq \mu mg$$

Bolca abans de lliscar $T_b < T_{Ll}$

$$\frac{a}{d} mg < \mu mg \rightarrow \boxed{\mu > \frac{a}{d}}$$

T5, 11, 4, 6 ,7

1.- Defincions en sistems en rotació
    1.1.- Moment d’una força
    1.2.- Moment angular
    1.3.- Lleis de Kepler

2.- Estàtica dels sòlids rígids

3.- Segona llei de Newton pe a la rotació

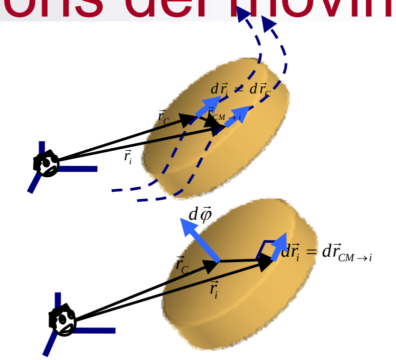
4.- Treball de sistemes en rotació
    4.1.- Energia cinètica i potencial

Translació

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}_{CM}$$

Rotació

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C$$

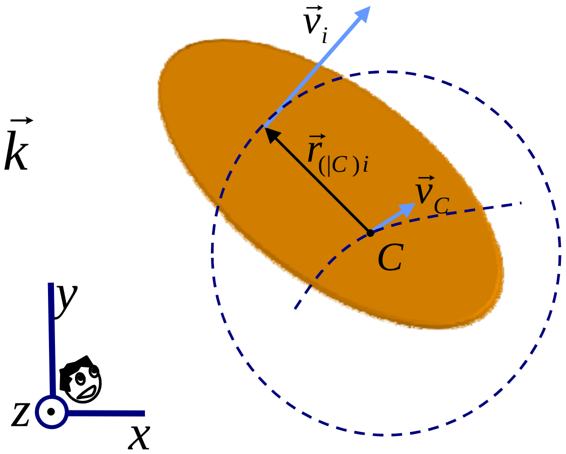


(no falten vectors, és en components!)

El punt C ha de ser el CM o un punt fixe del cos!!!!!

$$\vec{L}_C = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} r_i \cdot m_i r_i \omega \cdot \vec{k} = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \cdot \omega \cdot \vec{k}$$

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2}$$



$$\vec{L}_C = I\vec{\omega}$$

$$\vec{M}_c = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

$$\boxed{\vec{M}_C = I\vec{\alpha}}$$

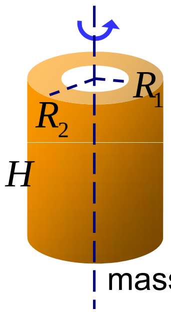
Cas discret_

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

Cas continu

$$I_{(C)} = \int_{Cos} r_{(|C)}^2 \, dm$$

Alguns moments d’inèrcia respecte d’un eix de cossos homogenis_

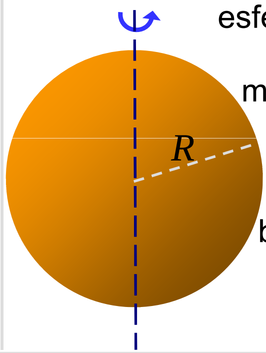


cilindre gruixut

$$I = \frac{1}{2} m \left(R_1^2 + R_2^2 \right)$$

disc: $H = 0$

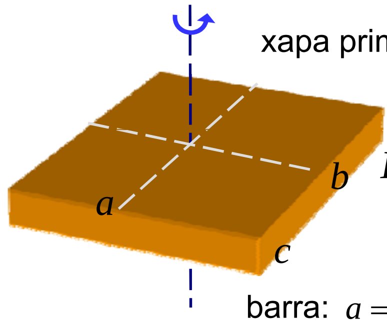
massis: $R_1 = 0$ prim: $R_1 = R_2$



esfera

massissa $I = \frac{2}{5} m R^2$

buida $I = \frac{2}{3} m R^2$



xapa prima/gruixuda

$$I = \frac{1}{12} m \left(a^2 + b^2 \right)$$

barra: $a = 0$; $c = 0$

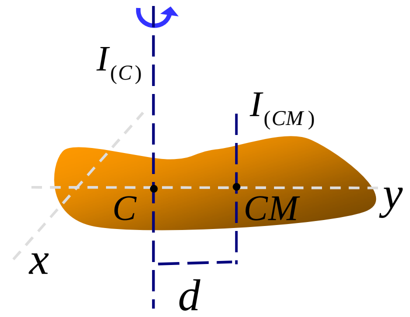
Alguns teoremes relatius al moment d'inèrcia

Superposició: Si tenim dos cossos 1 i 2 amb moments d'inèrcia respecte el mateix eix, $I_{(C)1}$ i $I_{(C)2}$, el moment d'inèrcia $I_{(C)}$ del cos compost és. $I_{(C)} = I_{(C)1} + I_{(C)2}$ Amb " $-$ " podem incloure els forats

---

Teorema de Steiner:

$$\boxed{I_C = I_{CM} + m\,d^2}$$



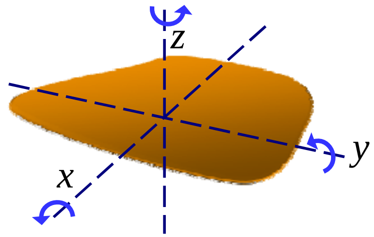
$$I_{(C)} = \int_{Cos} r_{(|C)}^2\,dm = \int_{Cos} ((x_{(CM)}^2 + (y_{(CM)} + d)^2)\,dm = \int_{Cos} ((x_{(CM)}^2 + y_{(CM)}^2 + 2y_{(CM)}d + d^2)\,dm$$

$$I_{(C)} = \underbrace{\int_{Cos} x_{(CM)}^2 + y_{(CM)}^2\,dm}_{I_{CM}} + \underbrace{\int_{Cos} 2y_{(CM)}d\,dm}_{\int_{Cos} y_{(CM)}\,dm = 0} + \underbrace{\int_{Cos} d^2\,dm}_{md^2}$$

Q.E.D.

Teorema dels eixos perpendiculars

$$\boxed{I_z = I_x + I_y}$$

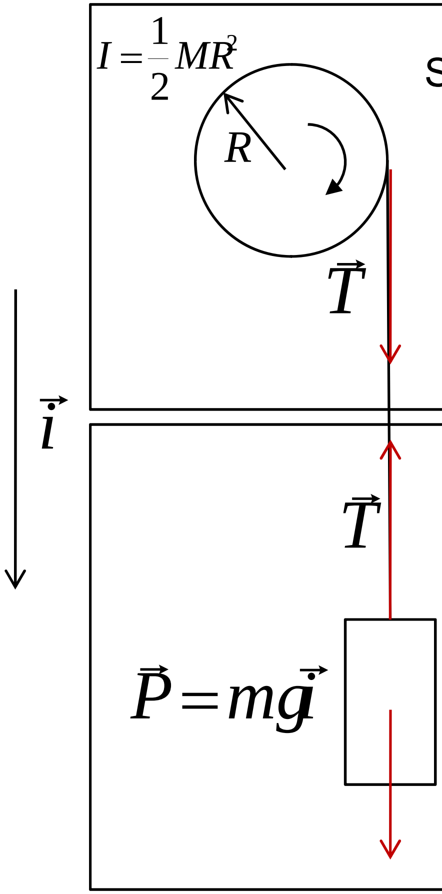


$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 = I_x + I_y$$

Q.E.D.

… però nosaltres sempre treballarem en 2D ($I_x=I_y=0$)

Exemple "clàssic"



Segona llei per la roda (moments)

$$-TR=-I\alpha \Rightarrow TR=I\frac{a}{R}$$

$$a=\alpha R$$

Segona llei pel bloc:

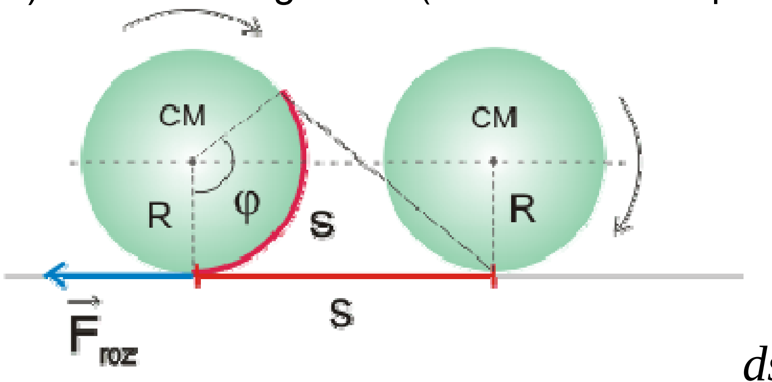
$$P-T=ma$$

$$\begin{cases} TR^2=Ia \\ P-T=ma \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$a=\frac{P}{m+I/R^2}=\frac{P}{m+\frac{1}{2}M}$$

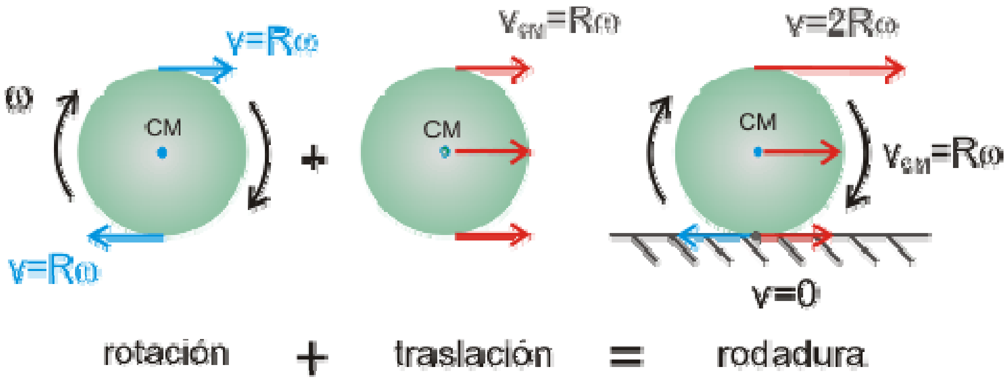
Per tal que rodoli (sense lliscar) CAL tenir fregament (ni la normal ni el pes fan moment respecte al CM)



Per tal que rodoli sense lliscar, la velocitat del CM ha de ser $v_{CM} = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d(R\varphi)}{dt} = R\dfrac{d\varphi}{dt} = R\omega$

Condició de rodolament: $$\boxed{v_{CM} = \omega R}$$

Quin es el Centre Instantani de Rotació?



Donat que el desplaçament del CIR, on està aplicada la força de fregament es nul
La força de fricció no fa treball!!!

16, 15, 21, 25

http://acer.forestales.upm.es/basicas/udfisica/asignaturas/fisica/solido/rodadura.html

Energia cinètica d'un sòlid rígid en rotació

La energia cinètica per TOTES les partícules

$$E_c = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Suposem que el sòlid es rígid

$$v_i = \omega r_i$$

Per tant l'energia cinètica serà:

$$E_c = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

Tenint en compte la definició de Moment d'inèrcia

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

Finalment obtenim

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} I_{(CM)} \omega^2}$$

Si les forces externes al sòlid són conservatives i els possibles lligams sobre el sòlid són ideals

l'energia mecànica es conserva

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{(CM)} \omega^2 + U = ct}$$

Però hi ha fregament!!!! Per tant… $\Delta E = W_{F_f}$ **NO!!!**

La força de fricció està aplicada al CIR, i la seva velocitat es zero

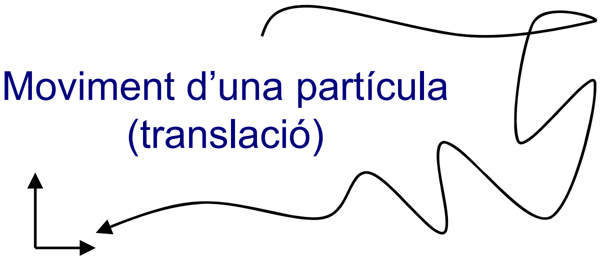
és una reacció ideal!!

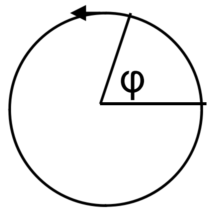
$$W_{F_f} = 0$$

19, 28, 31, 32

RESUM

Moviment d'una partícula (translació)





Moviment de rotació al voltant d'un eix fix

Posició velocitat acceleració	$\vec{r}(t)$ $\vec{v}(t)$ $\vec{a}$	$\vec{r}(t) = R[\cos(\varphi(t))\hat{i} + \sin(\varphi(t))\hat{j}]$ $v = \omega R$ $a = \alpha R$	$\varphi(t)$ $\vec{\omega}(t)$ $\vec{\alpha}$	Angle Velocitat ang. Acceleració ang.
massa	m "Inèrcia a la translació"		$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$ "inèrcia a la rotació"	Moment d'inèrcia
Moment linial	$\vec{P} = m\vec{v}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$	$\vec{L} = I\vec{\omega}$	Moment angular
Força	$\vec{F}$	$\vec{M}_c = \vec{r} \times \vec{F}$	$\vec{M}_c$	Moment de la força
Segona llei de Newton	$\vec{F} = m\vec{a}$		$\vec{M} = I\vec{\alpha}$	Segona llei de Newton
Conservació de l'energia	$E = \frac{1}{2}mv^2 + U = ct$		$E = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{(CM)}\omega^2 + U = ct$	Conservació de l'energia

Per anar amb bicicleta no's pot dur l'esquena dreta (Ramón Casas, 1866-1932)