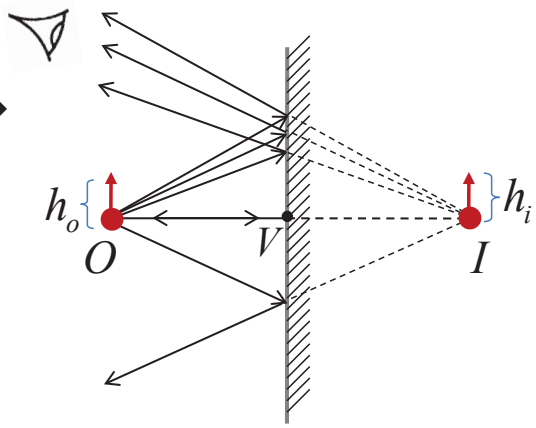
Instrumentos ópticos e imágenes (TEMA 4)

Óptica geométrica: es válida la aproximación de rayo (rayo = dirección del vector de onda)
(no nos interesa difracción ni interferencia, sólo la propagación de la luz en línea "recta")

Finalidad de un instrumento óptico: formar una **imagen** (I) de un objeto (O). La imagen es:
- **real** (como la que se imprime en la película fotográfica de una cámara), o por el contrario:
- **virtual** (como la que se ve en un espejo).

Ej: espejo plano: los rayos que salen del objeto puntual O son reflejados de forma que parecen salir de un punto I que está detrás del espejo mismo. I es una imagen virtual →



La distancia $|d_o| = \overline{OV}$ se llama distancia objeto

La distancia $|d_i| = \overline{VI}$ se llama distancia imagen

Para un espejo plano $d_i = d_o$

En el caso de que el objeto no sea un solo punto, la imagen puede ser aumentada o reducida, y derecha o invertida. Se define la **magnificación** (transversal) como: $M = \dfrac{h_i}{h_o}$

Las "alturas" h llevan signo; en el caso de un espejo plano, h_o y h_i son ambas en el mismo sentido (p. ej. hacia arriba) y tienen igual módulo:

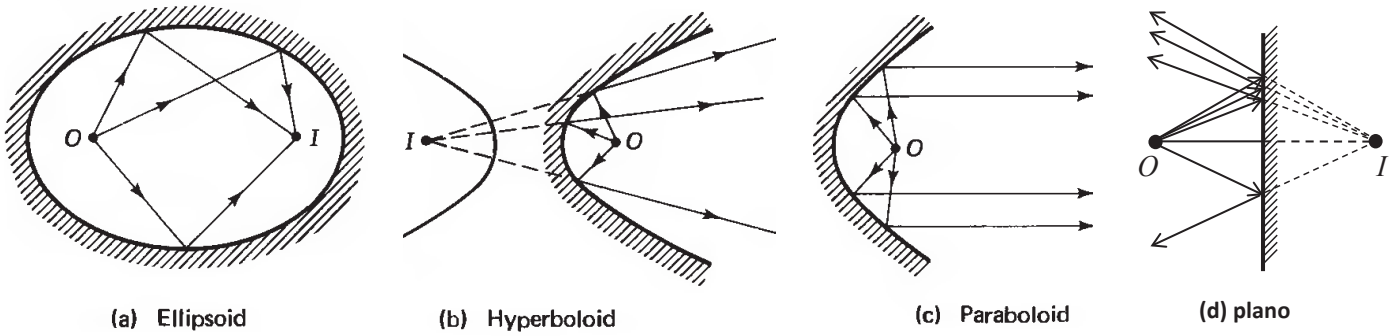
$$\Rightarrow \quad M_{(\text{espejo plano})} = +1$$

4-1, 4-2

Instrumentos ópticos "ideales"

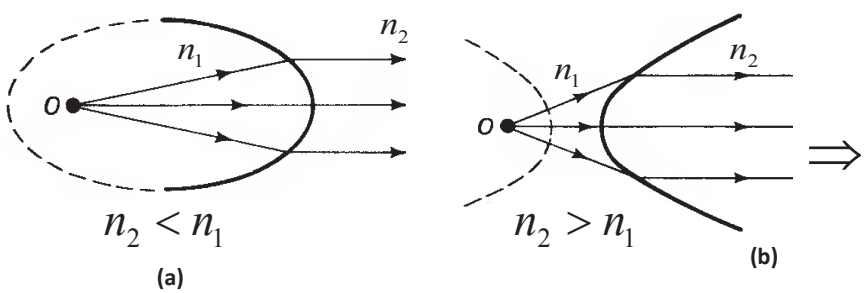
Todos rayos que salen del punto O y entran en el instrumento – y sólo ellos – llegan al punto I

Espejos ideales

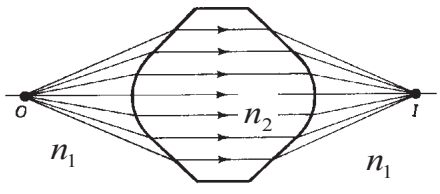


(a) Ellipsoid (b) Hyperboloid (c) Paraboloid (d) plano

Dioptrios ideales

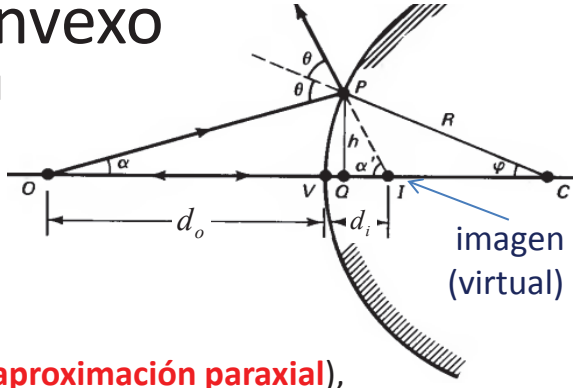


Lente ideal (con $n_2 > n_1$) :



Superficies cónicas son difíciles de obtener; además la forma de una superficie refractora (**dioptrio**) ideal depende de los índices de refracción → por cada longitud de onda se necesitaría una superficie distinta. Esencialmente sólo se usan espejos parabólicos e hiperbólicos, y por lo demás se utilizan superficies reflectoras/refractoras **planas** o **esféricas**

Espejo esférico convexo

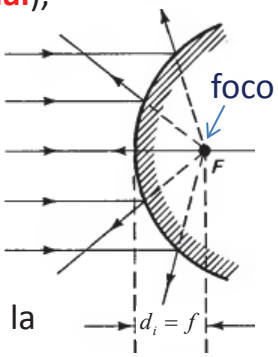


Las distancias objeto e imagen se miden del "vértice" *V* del espejo, que es el punto del espejo más cercano al objeto. Sea *C* el centro de la superficie esférica (convexa). Para encontrar la relación de las distancias empezamos de las relaciones angulares: $2\theta = \alpha + \alpha'$ y $\theta = \alpha + \varphi$ →

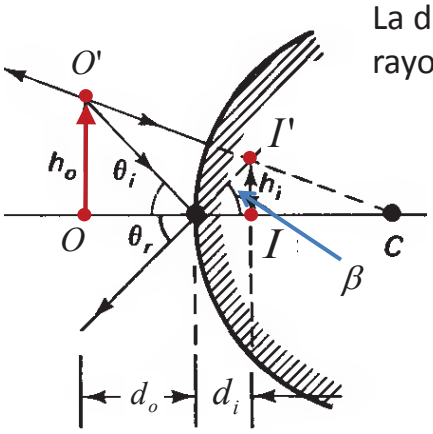
Eliminando el ángulo θ se halla: $\alpha - \alpha' = -2\varphi$

Si los ángulos α, α' y φ son suficientemente pequeños (**aproximación paraxial**), pueden remplazarse por sus tangentes (menospreciando la distancia VQ).

Se halla así $\frac{h}{d_o} - \frac{h}{d_i} = -2\frac{h}{R}$, es decir: $\frac{1}{d_o} - \frac{1}{d_i} = -\frac{2}{R} = \frac{1}{f}$, con $f = -\frac{R}{2}$



La distancia focal $|f|$ es la distancia en que convergen rayos paralelos (es decir, provenientes de $d_o \to \infty$)



Para un objeto no puntual, utilizando el dibujo de la izquierda se puede ver que los dos puntos *O* y *O'* del objeto (flecha roja) forman imágenes en *I* e *I'*. Todo rayo que sale de *O'* después de la reflexión tiene que pasar por el punto *I'*.

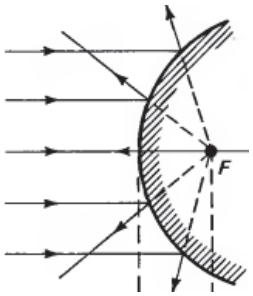
Por tanto los ángulos β y θ_i son iguales y se ha $\frac{h_o}{d_o} = \frac{h_i}{d_i}$

$\Rightarrow$ la magnificación depende de las distancias objeto e imagen y vale: $M = \frac{h_i}{h_o} = \frac{d_i}{d_o}$

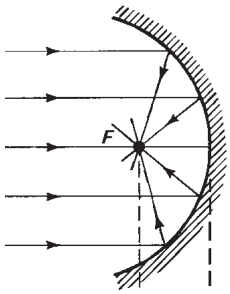
Ecuaciones espejos esféricos y planos

Utilizando una convención sobre signos, las ecuaciones que acabamos de ver para un espejo esférico convexo se pueden generalizar también a espejos esféricos cóncavos y a espejos planos. Si el espejo es cóncavo, el centro de curvatura es a la izquierda, la imagen es real, y se halla una ecuación parecida para las distancias objeto e imagen, pero con todos los signos positivos.
Se utiliza la convención que:

1) la distancia imagen es positiva si la imagen es real,
y negativa si la imagen es virtual ;
2) el radio *R* es positivo para un espejo esférico convexo,
y negativo para uno cóncavo ;



convexo
(imagen virtual)



cóncavo
(imagen real)

Entonces ambos casos se pueden resumir en las fórmulas:

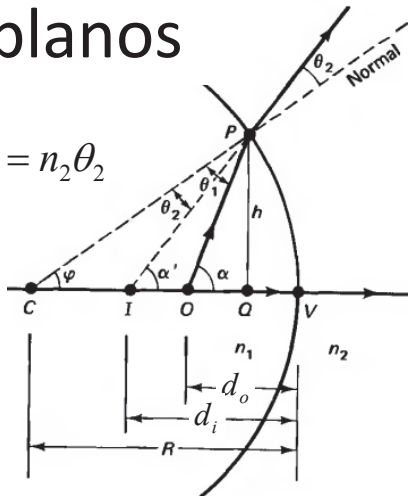
$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = -\frac{2}{R} = \frac{1}{f} \quad , \quad M = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o}$$

Estas fórmulas valen también para espejos planos, para los que $R \to \infty$
(la distancia focal $f = -\frac{R}{2}$ es la distancia a donde convergen rayos incidentes paralelos; para un espejo plano la distancia focal es infinita, igual que el radio de curvatura).

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = -\frac{2}{R}$$ ⇒ *convenio de SIGNOS :*
REAL y CONVEXO = POSITIVO

4-3
4-5, 4-7

Ecuaciones dioptrios esféricos y planos



Dioptrio : superficie de refracción entre dos materiales

La Ley de Snell $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ es, en aproximación paraxial: $n_1\theta_1 = n_2\theta_2$

Utilizando las relaciones angulares $\alpha = \theta_1 + \varphi$ y $\alpha' = \theta_2 + \varphi$,

se ha pues: $n_1(\alpha - \varphi) = n_1(\alpha' - \varphi)$

En términos de las distancias, esto es $n_1\left(\frac{h}{d_o} - \frac{h}{R}\right) = n_2\left(\frac{h}{d_i} - \frac{h}{R}\right)$

Utilizando la misma convención para los signos que utilizamos para los espejos, se halla pues:

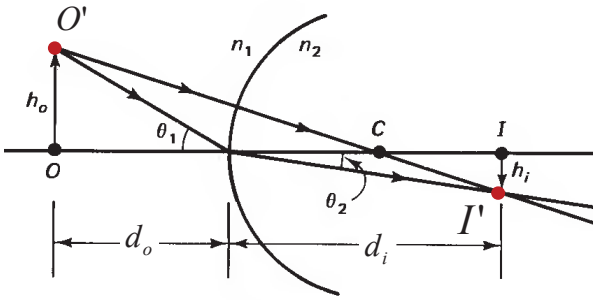
convenio de SIGNOS :
REAL y CONVEXO = POSITIVO

$$\frac{n_1}{d_o} + \frac{n_2}{d_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{1}{f}$$

Para un dioptrio el parámetro f no es la distancia del vértice al foco; de hecho un dioptrio no tiene un único foco, sino dos focos según la luz incida de un lado u otro del dioptrio. La distancia entre vértice y foco ("distancia focal") es igual a $n_2 f$ (se obtiene poniendo $d_o = \infty$ en la ecuación)

La ecuación de arriba vale para dioptrios esféricos (convexos y cóncavos) y planos ($R \to \infty$).

La magnificación de un dioptrio puede hallarse a partir de la relación $n_1\theta_1 = n_2\theta_2$, que da: $n_1\left(\frac{h_o}{d_o}\right) = n_2\left(\frac{h_i}{d_i}\right)$



$$\Rightarrow \quad M = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{n_1}{n_2}\frac{d_i}{d_o}$$

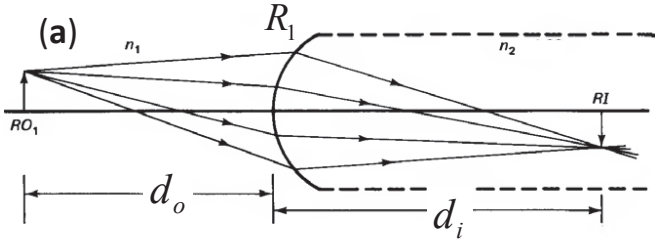
4-9

4-10, 4-12

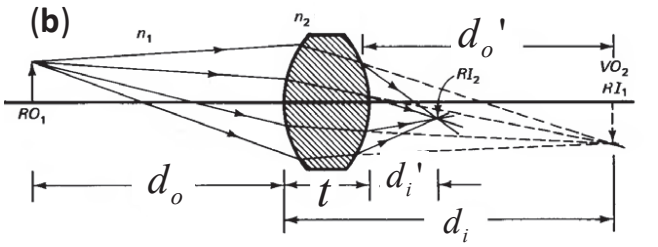
Lente: combinación de dos dioptrios (esféricos)

La luz que atraviesa una lente (**b**) pasa por las dos caras de la misma, que son dioptrios: así la imagen final es el resultado de 2 "aumentos" sucesivos.

La 1ª cara, de radio R_1 , forma por si sola una imagen dada por la ecuación: $\frac{n_1}{d_o} + \frac{n_2}{d_i} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}$



Esta imagen sería visible si sólo hubiese la primera cara de la lente (**a**); pero al ser interceptada por la 2ª cara, de radio R_2 , actúa como "objeto" (virtual) para ésta, según la ecuación: $\frac{n_2}{d_o'} + \frac{n_1}{d_i'} = \frac{n_1 - n_2}{R_2}$



Estas dos ecuaciones se pueden resolver para hallar la distancia imagen final, utilizando el hecho que $d_o' = t - d_i$ (esto da el signo correcto de d_o'), siendo t el ancho máximo de la lente (distancia entre los vértices)

4-14, 4-15

En el caso de una **lente delgada**, la separación entre las caras es casi cero (o al menos pequeña respecto de las distancia objeto e imagen, una condición que habitualmente se cumple). En tal supuesto $d_o' = -d_i$ y se puede escribir entonces $\frac{n_1}{d_o} + \left(\frac{n_2}{d_i} + \frac{n_2}{d_o'}\right) + \frac{n_1}{d_i'} = \frac{n_1}{d_o} + \frac{n_1}{d_i'} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_1 - n_2}{R_2}$,

o sea: $\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i'} = \frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$, que define la distancia focal f de la lente

***Lente** (delgada) = **combinación de 2 dioptrios en serie** (casi solapados)*

Ejemplo: comparación dioptrio / lente

In (a), a real object is positioned in air, 30 cm from a convex spherical surface of radius 5 cm. To the right of the interface, the refractive index is that of water. In (a), $\frac{1}{30}+\frac{1.33}{d_i}=\frac{1.33-1}{5}$ giving $d_i = +40$ cm. The positive sign indicates that the image is real and so is located to the right of the surface, where real rays of light are refracted.

$$M = -\frac{(1)(+40)}{(1.33)(+30)} = -1$$

indicating an inverted image, equal in size to that of the object.

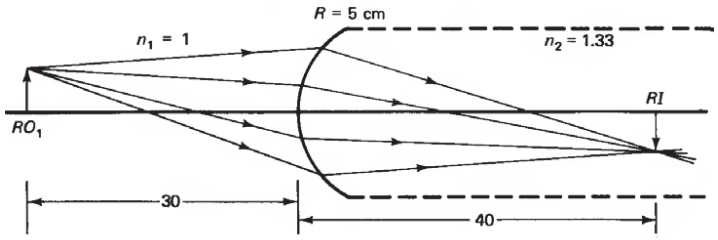
Let us suppose now (Figure 3-20b) that the second medium is only 10 cm thick, forming a *thick lens*, with a second, concave spherical surface, also of radius 5 cm. The refraction by the first surface is, of course, unaffected by this change. Inside the lens, therefore, rays are directed as before to form an image 40 cm from the first surface. However, these rays are intercepted and again refracted by the second surface to produce a different image, as shown. Since the convergence of the rays striking the second surface is determined by the position of the first image, its location now specifies the appropriate object distance to be used for the second refraction. We call the real image for surface (1) a *virtual object* for surface (2). Then, by the sign convention established previously, we make the virtual object distance, relative to the second surface, a negative quantity . Then: $\frac{1.33}{-30}+\frac{1}{d_i'}=\frac{1-1.33}{-5}$

or $d_i' = +9$ cm. The magnification is:

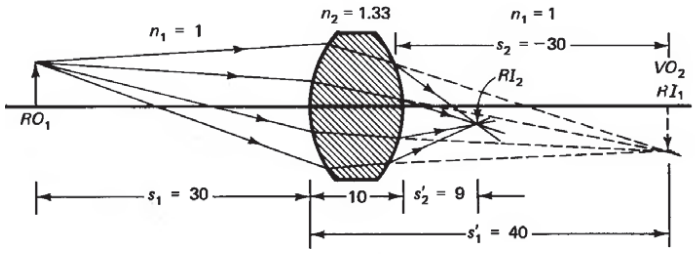
$$M = \frac{(-1.33)(+9)}{(1)(-30)} = +\frac{2}{5}$$

The final image is then $\frac{2}{5}$ the lateral size of its (virtual) object and appears with the same orientation. Relative to the original object, the final image is $\frac{2}{5}$ as large and inverted.

$$\frac{n_1}{d_o}+\frac{n_2}{d_i}=\frac{n_2-n_1}{R_1}$$



(a)



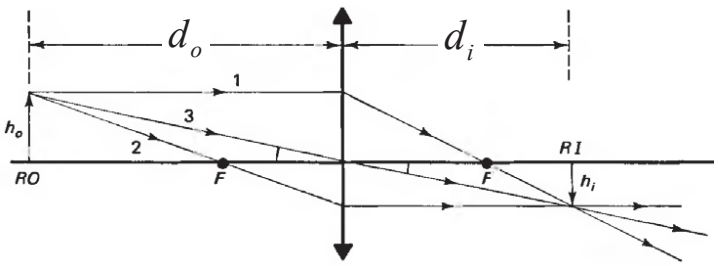
(b)

$$\frac{1}{d_o}+\frac{1}{d_i'}=\frac{1}{f}=\frac{n_2-n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

Ecuación lentes delgadas y lentes en contacto

Acabamos de ver que le formación de imágenes por una lente se puede describir por la fórmula

$\frac{1}{d_o}+\frac{1}{d_i}=\frac{1}{f}$, con $\frac{1}{f}=\frac{n_2-n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$



Mirando el dibujo, el rayo (3) que pasa por el centro de la lente atraviesa las dos caras en el punto en que ambas son verticales, por lo que sale sin ser desviado. Se tiene pues la misma relación que la reflexión: $\frac{h_o}{d_o}=\frac{h_i}{d_i}$ $\Rightarrow$ el aumento es el mismo que el de un espejo: $M=-\frac{d_i}{d_o}$

ECUACIÓN de la LENTE DELGADA $\frac{1}{d_o}+\frac{1}{d_i}=\frac{1}{f}=\frac{n_2-n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$

Convenio de SIGNOS: **REAL y CONVEXO = POSITIVO**

4-19, 4-25

4-18, 4-21, 4-23, 4-26

Para dos lentes que estén en contacto, la imagen de la 1ª es esencialmente el "objeto" de la 2ª .

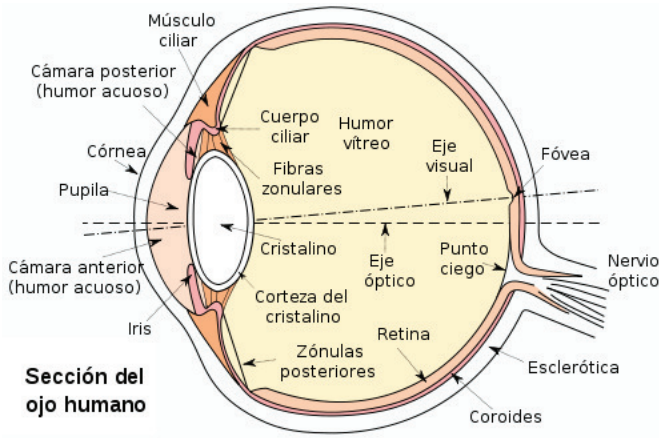
Las ecuaciones de las dos lentes son: $\frac{1}{d_o}+\frac{1}{d_i}=\frac{1}{f_1}$ y $\frac{1}{d_o'}+\frac{1}{d_i'}=\frac{1}{f_2}$. Con $d_o'=-d_i$ se ha pues:

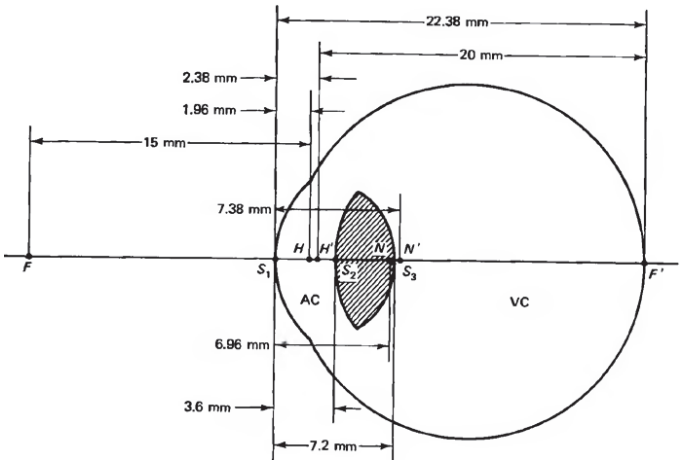
$\frac{1}{d_o}+\frac{1}{d_i'}=\frac{1}{d_o}+\left(\frac{1}{d_i}+\frac{1}{d_o'}\right)+\frac{1}{d_i'}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$, o sea $\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$

También aquí $M=-\frac{d_i}{d_o}$ **4-27**

4-28

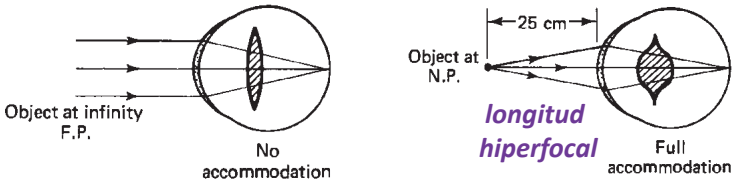
“aplicación”: el ojo humano





73% del poder dióptrico del ojo humano se debe a la córnea (n = 1.376), que actúa como un dioptrio esférico para rayos procedentes del aire, el resto a la acción del cristalino (n = 1.45). La curvatura y espesor del cristalino se pueden modificar por la contracción del músculo ciliar, un proceso que se llama “acomodación”. En su conjunto, el ojo actúa como una lente delgada positiva de distancia focal 17 mm en el estado relajado del cristalino (visión lejana, sin acomodación) y 14 mm en el estado con el cristalino tensado (visión cercana).

ojo normal



Existe una distancia mínima (*longitud hiperfocal*) por debajo de la que el ojo no es capaz de focalizar. Para el ojo normal es circa 25 cm y corresponde a la máxima acomodación (contracción músculo ciliar)

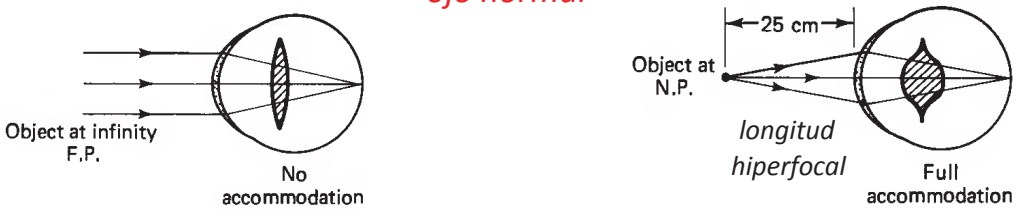
Defectos de la visión

Pueden ser debidos a:

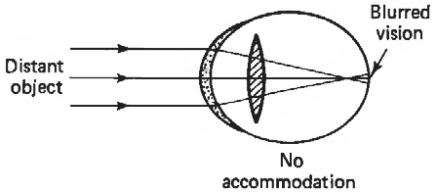
1) forma no ideal de la superficie de la córnea: la cornea no es esférica sino que tiene dos radios de curvatura distintos si se miden vertical u horizontalmente (***astigmatismo***)

2) forma no ideal del ojo: ojo demasiado “largo” → ***miopía***
ojo demasiado “corto” → ***hipermetropía***

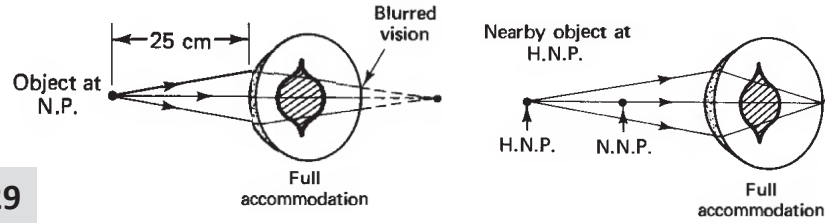
ojo normal



ojo miope



ojo hipermétrope



3) incapacidad de acomodación debida p.ej. a mayor rigidez del cristalino con la edad (***presbicia***)

Magnificación angular

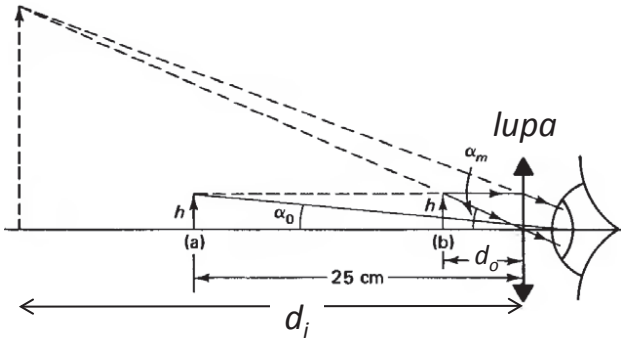
Los objetos reales y las imágenes virtuales formadas por instrumentos ópticos pueden hallarse a distancias muy grandes (en el caso de un telescopio las distancias objeto pueden ser astronómicas, y en un microscopio la distancia imagen puede ser muy grande). En estos casos, y en todos los instrumentos que tienen un ocular, la magnificación trasversal no es muy útil, y es preferible definir una *magnificación angular*, que da también una estimación de la dimensión de la imagen (real) que se forma en la retina de quien mira.

Ejemplo: la LUPA

Si un objeto pequeño de altura h_o (en cm) se mira a ojo nudo, como mucho se puede acercarlo hasta la distancia hiperfocal de 25 cm (a). En tal posición, el objeto forma, desde el ojo, un ángulo $\alpha_o \approx h_o/25$

Para mirarlo a través de una lupa, se acerca el objeto para que esté dentro de la longitud focal de la lupa (b)

El ángulo formado desde el ojo por la imagen (virtual) es, en aproximación paraxial: $\alpha_i \approx h_i/d_i = h_o/d_o$



Se define la magnificación angular como: $M_\alpha = \dfrac{\alpha_i}{\alpha_o} = \dfrac{h_o/d_o}{h_o/25} = \dfrac{25}{d_o}$

→ Si la imagen virtual muy lejana, entonces por la ecuación de la lente $d_o = f$ y $M_\alpha = \dfrac{25}{f}$

→ Si la imagen virtual se ve en la distancia hiperfocal ($d_i = -25$), entonces:

$$d_o = \frac{25f}{25+f} \quad \text{y} \quad M_\alpha = \frac{25}{f} + 1 \left(\approx \frac{25}{f} \text{ para } f \text{ pequeña} \right)$$

4-30, 4-31

⇒ **para lentes de distancias focales cortas es válida la aproximación** $M_\alpha = 25/f$

para una lupa esto es típicamente entre 2x y 10x

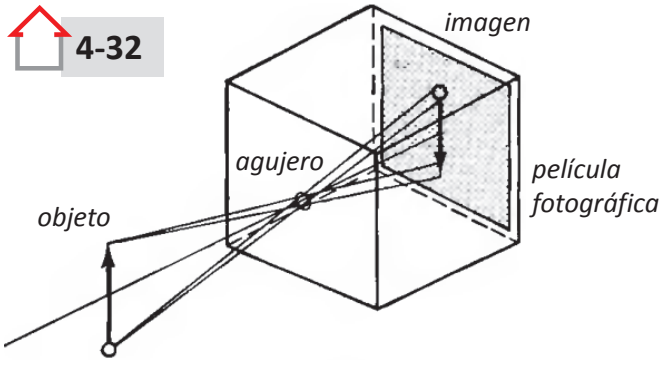
Instrumentos ópticos sencillos

CÁMARA ESTENOPEICA

Sistema más simple para formar una imagen

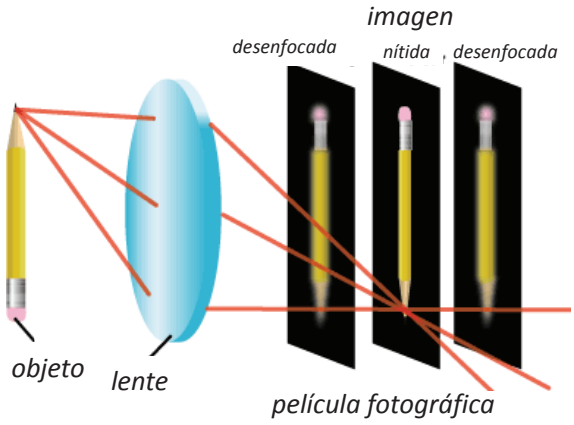
- Ventaja: no focaliza → toda distancia está en foco
- Desventaja: poca luz atraviesa el agujero; si éste se hace más grande, la imagen deja de ser nítida

4-32

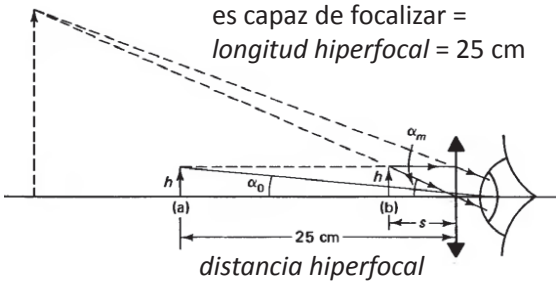


CÁMARA SIMPLE / OJO

Una lente en lugar del agujero → más irradiancia y nitidez; desventaja: sólo se focalizan ciertos planos a distancias fijas



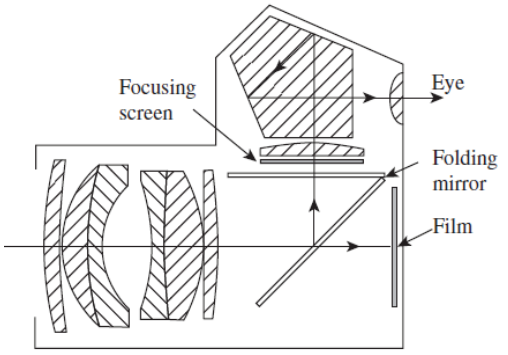
Distancia mínima que el ojo es capaz de focalizar = *longitud hiperfocal* = 25 cm



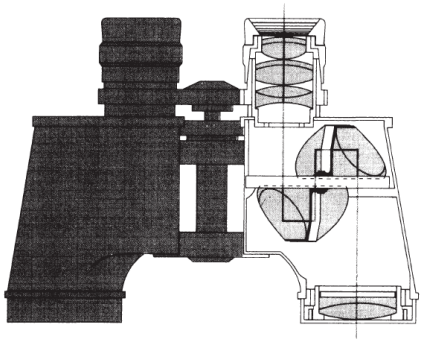
LUPA y GAFAS. El aumento depende de la distancia de la lupa/gafas del ojo, y del objeto a la lente.

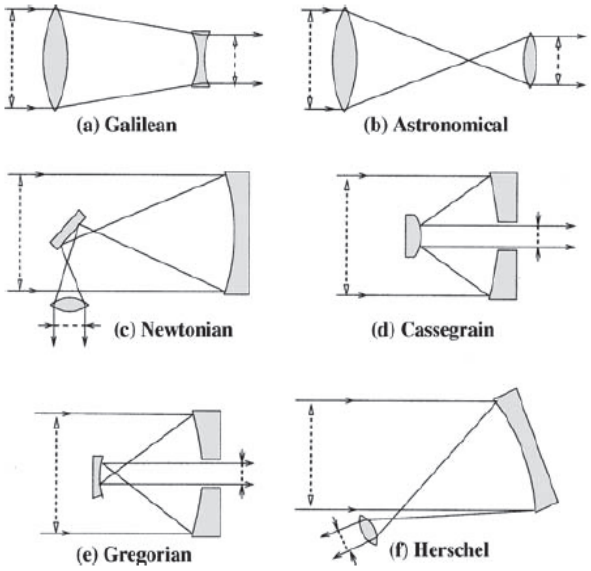
La lupa se puede colocar a distintas distancias del objeto, y tampoco hace falta mover las gafas (en el caso de la miopía) para ver más cerca o lejos, porque el ojo ajusta el foco de su "lente natural", es decir el cristalino, para focalizar la imagen sobre la retina.

Instrumentos ópticos compuestos



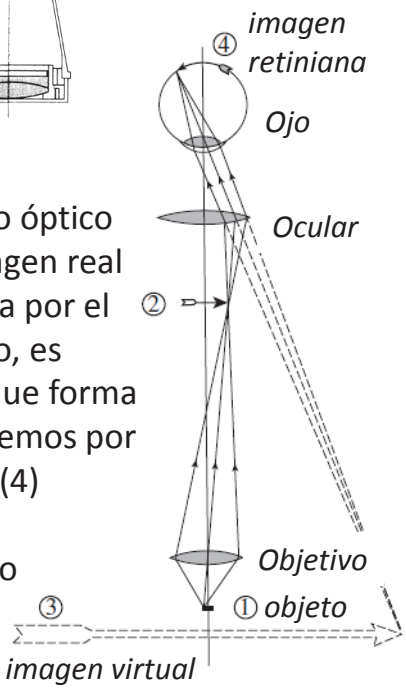
Combinaciones de más lentes (y espejos): lente compuesta de una cámara réflex, binoculares, telescopio, microscopio



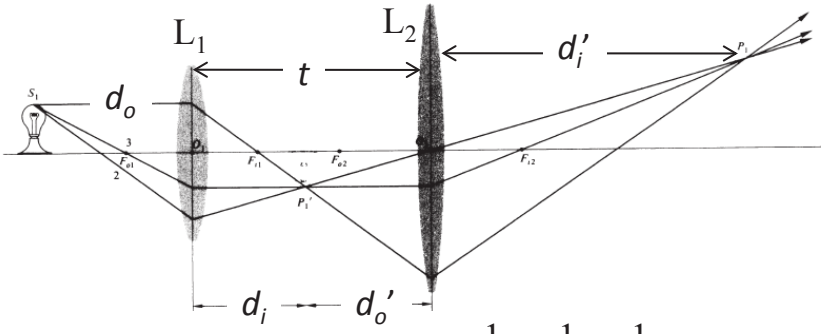


Ocular :
1ª lente de un instrumento óptico (más cerca del ojo). La imagen real (2) del objeto (1), generada por el objetivo de un microscopio, es aumentada por el ocular que forma la imagen virtual (3) que vemos por su proyección en la retina (4)

Objetivo :
lente más cercana al objeto



Dos lentes a distancia *t*



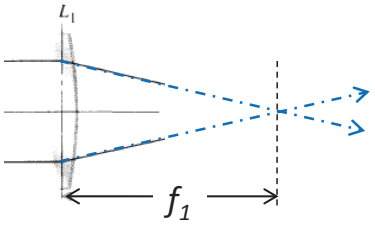
La ecuación de la 1ª lente L_1 es $\frac{1}{d_i}=\frac{1}{f_1}-\frac{1}{d_o}$, que da $d_i=\frac{f_1 d_o}{d_o-f_1}$

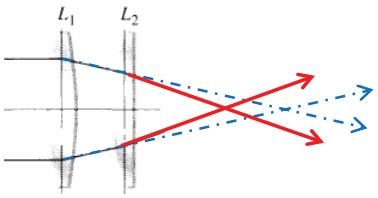
La imagen (intermedia) creada por L_1 actúa como objeto para L_2

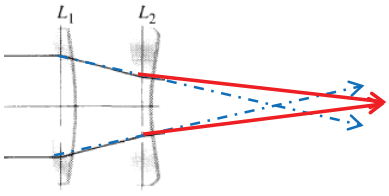
La distancia de tal objeto de L_2 es $d_o'=t-d_i$

Sustituyendo en la ecuación de la 2ª lente, $d_i'=\frac{f_2 d_o'}{d_o'-f_2}$, se ha:

$$d_i'=\frac{f_2(t-d_i)}{t-d_i-f_2}=\frac{f_2[t-f_1 d_o/(d_o-f_1)]}{t-f_2-f_1 d_o/(d_o-f_1)}$$







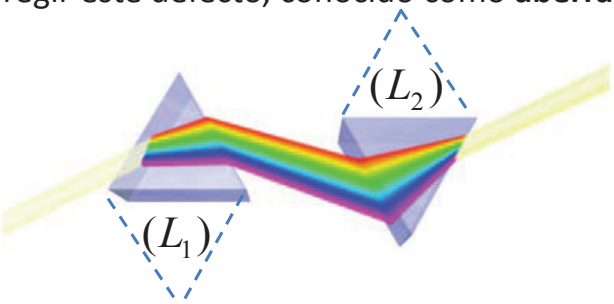
L_2 aumenta la imagen intermedia generada por L_1 $\Rightarrow$ magnificación total $M_{TOT}=M_1 M_2$

Con $M_1=-\frac{d_i}{d_o}$ y $M_2=-\frac{d_i'}{d_o'}=-\frac{d_i'}{t-d_i}$, se ha $M_1 M_2=\frac{d_i}{d_o}\frac{d_i'}{t-d_i}=\frac{d_i'}{d_o}\frac{1}{(t/d_i-1)}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow M_{TOT}=\frac{d_i'}{t(d_o/f_1-1)-d_o}$$

*Aberración cromática y su corrección

Al igual que para un prisma, en una lente hay un efecto de dispersión, que hace que la distancia imagen sea diferente para distintos colores (longitudes de onda). La combinación de dos lentes puede utilizarse para corregir este defecto, conocido como **aberración cromática trasversal**.



4-41

Para dos lentes delgadas 1 y 2 en aire y hechas del mismo vidrio, la ecuación de cada lente es:

$$\frac{1}{f_1} = (n-1)\left(\frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}}\right) = (n-1)K_1 \quad , \quad \frac{1}{f_2} = (n-1)\left(\frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}}\right) = (n-1)K_2$$

Si se colocan a una distancia L , se puede mostrar que la longitud focal del conjunto vale aprox.:

$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{L}{f_1 f_2}$, o sea: $\frac{1}{f} = (n-1)K_1 + (n-1)K_2 - L(n-1)^2 K_1 K_2$

(En realidad esta relación no es cierta para las distancias focales, sino para las distancias entre el punto focal y los llamados "planos principales"; por ello no puede utilizarse en los problemas)

Para minimizar la aberración cromática se requiere que $\frac{d(1/f)}{dn} = K_1 + K_2 - 2LK_1K_2(n-1) = 0$

Esto se cumple si $L = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{K_1(n-1)} + \frac{1}{K_2(n-1)}\right] = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$

Esta condición sólo involucra las distancias focales; las demás características de ambas lentes se pueden elegir para minimizar otros efectos indeseados (aberración esférica, astigmatismo..)

Resumen ecuaciones instrumentos ópticos

Dioptrio: $\frac{n_1}{d_o} + \frac{n_2}{d_i} = \frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{R}$ $\qquad M = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{n_1}{n_2}\frac{d_i}{d_o}$

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}$$
$$M = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o}$$

- espejo: $\frac{1}{f} = -\frac{2}{R}$
- lente delgada: $\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$
- lentes delgadas en contacto : $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$
- *lente gruesa (de espesor t): $\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{n_2 - n_1}{n_1 n_2}\frac{t}{R_1 R_2}\right)$

*dos lentes delgadas a distancia L : $d_i = \frac{f_2[t - f_1 d_o/(d_o - f_1)]}{t - f_2 - f_1 d_o/(d_o - f_1)}$ $\qquad M = \frac{d_i}{t(d_o/f_1 - 1) - d_o}$

*estas ecuaciones se encuentran combinando las ecuaciones de 2 dioptrios o de 2 lentes, junto a la condición: $d_o' = t - d_i$

Dan la posición de la imagen final en función de la distancia objeto inicial

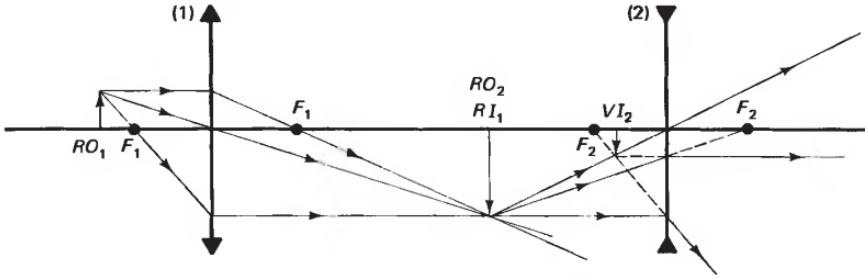
SIGNOS: *Distancia imagen: real-positiva, virtual-negativa*
Radio: convexo-positivo, cóncavo-negativo

4-44, 4-46

La cantidad $P = 1/f$ se llama **poder dióptrico** (de la lente, espejo o dioptrio)
Si f es en metros, la unidad de P es la dioptría, definida como D = m^{-1}

Ejemplo resuelto

Find and describe the intermediate and final images produced by a two-lens system such as the one sketched in Figure 3-23a. Let $f_1 = 15$ cm, $f_2 = 15$ cm, and their separation be 60 cm. Let the object be 25 cm from the first lens, as



Solution The first lens is convex: $f_1 = +15$ cm, $s_1 = 25$ cm.

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_1'} = \frac{1}{f} \quad \text{or} \quad s_1' = \frac{s_1 f}{s_1 - f} = \frac{(25)(15)}{25 - 15} = +37.5 \text{ cm}$$

$$m_1 = -\frac{s_1'}{s_1} = -\frac{37.5}{25} = -1.5$$

Thus the first image is real (because s_1' is positive), 37.5 cm to the right of the first lens, inverted (because m is negative), and 1.5 times the size of the object.

The second lens is concave: $f_2 = -15$ cm. Since real rays of light diverge from the first real image, it serves as a real object for the second lens, with $s_2 = 60 - 37.5 = +22.5$ cm to the left of the lens. Then

$$s_2' = \frac{s_2 f}{s_2 - f} = \frac{(22.5)(-15)}{(22.5) - (-15)} = -9 \text{ cm}$$

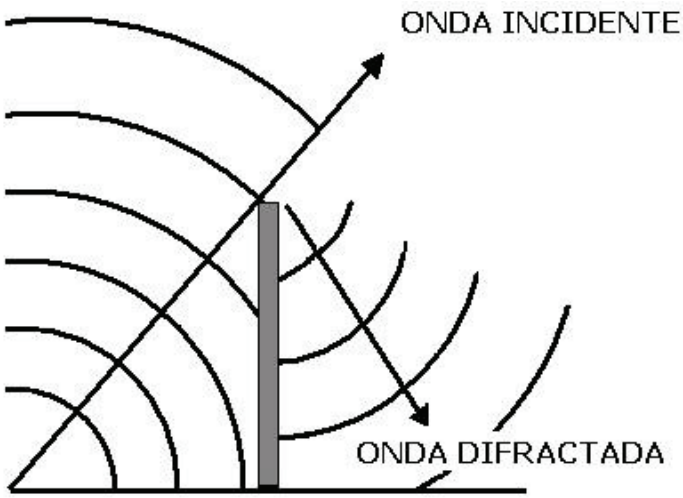
$$m_2 = -\frac{s_2'}{s_2} = -\frac{-9}{22.5} = +0.4$$

Thus the final image is virtual (because s_2' is negative), 9 cm to the *left* of the second lens, erect *with respect to its own object* (because m is positive), and 0.4 times its size. The *overall* magnification is given by $m = m_1 m_2 = (-1.5)(0.4) = -0.6$. Thus the final image is inverted relative to the *original* object and 6/10 its lateral size. All these features are exhibited qualitatively in the ray diagram of Figure 3-23a.

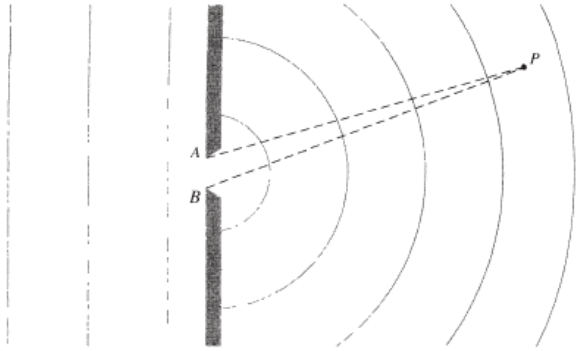
Imágenes: resolución y procesado óptico

- Difracción de Fraunhofer
- Resolución máxima de los instrumentos ópticos (criterio de Rayleigh)
- Análisis de imagen y su aplicaciones: filtros de Fourier, microscopía de contraste de fase
- Holografía
- Visión humana: visión en 3D, visión en color, ilusiones ópticas

Difracción

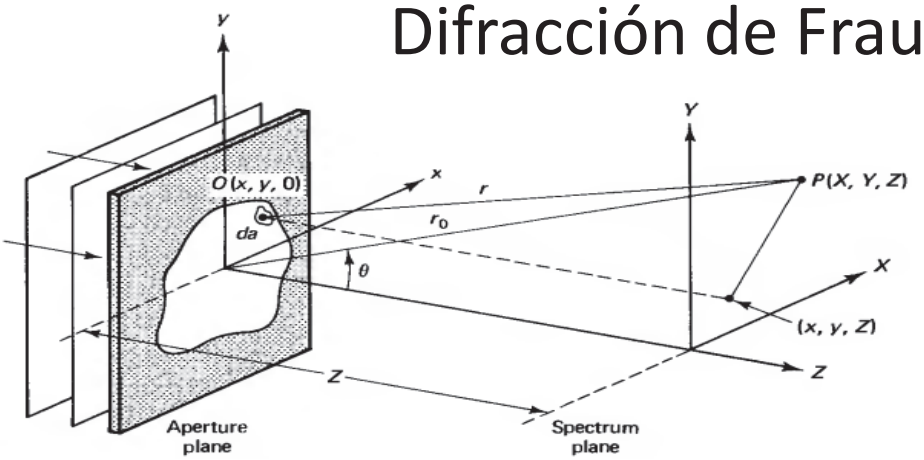


Configuración mas simple de estudiar: onda plana que incide ortogonalmente sobre una pantalla con una apertura AB



Si la apertura es casi puntual, la difracción genera una onda esférica

Difracción de Fraunhofer



A distancias muy grandes de la apertura (en la que se llama "aproximación de Fraunhofer") **el patrono de difracción es igual a la transformada de Fourier espacial de la apertura**

Si una onda plana de frecuencia ω incide en una apertura con perfil $E_s(x,y)$, el frente de onda se ensancha debido a la difracción: en cada punto de la apertura se genera una onda esférica que se propaga en el mismo sentido de la luz incidente, que suponemos normal a la apertura. Un área pequeña $da = dxdy$ centrada en el punto O de la apertura genera, en el punto P de una pantalla que se halla a distancia Z de la apertura, un campo eléctrico $dE_P = \frac{E_s da}{r} e^{i(\omega t - kr)}$, donde $r = OP$ está dado por $r^2 = (X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-0)^2 = r_0^2 - 2xX - 2yY + (x^2+y^2)$ (con $r_0^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$). Al integrar en $dxdy$, hay que tener cuidado con las fases, que dan la interferencia entre las contribuciones de puntos distintos de la abertura. Para x e y pequeños, el término cuadrático es menospreciable y se saca : $r = r_0\left[1 - 2\frac{(xX + yY)}{r_0^2}\right]^{1/2} \approx r_0\left[1 - \frac{(xX + yY)}{r_0^2}\right]$

Aproximando $r \approx Z$ en la intensidad e integrando:

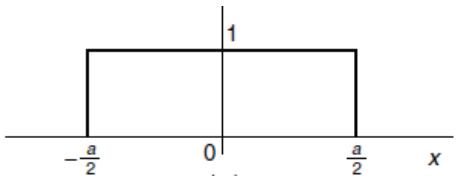
$$E_P = \left[\frac{e^{i(\omega t - kr_0)}}{Z}\right] \iint E_s(x,y) e^{ik(xX+yY)/r_0}\, dx\, dy \propto \iint E_s(x,y) e^{i(xk_X + yk_Y)}\, dx\, dy$$

, que es la transformada 2D de Fourier con $k_x \equiv \frac{kX}{r_0}$ and $k_Y \equiv \frac{kY}{r_0}$

Patronos de difracción de Fraunhofer 1D

Rendija (apertura 1D)

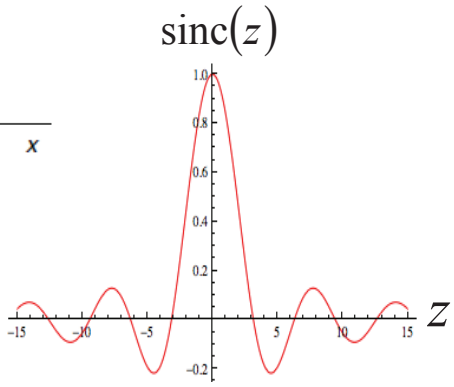
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } -a/2 \le x \le a/2 \\ 0 & \text{para otros valores de } x \end{cases}$$



Con $K = K_X = kX/r_0$, se ha

$$F(K) = \int_{-a/2}^{a/2} e^{iKx} dx = \frac{e^{iKx}}{iK}\Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{1}{K/2}\left(\frac{e^{iKa/2} - e^{iKa/2}}{2i}\right) = \frac{\sin(Ka/2)}{K/2} = a\,\mathrm{sinc}\left(\frac{Ka}{2}\right)$$

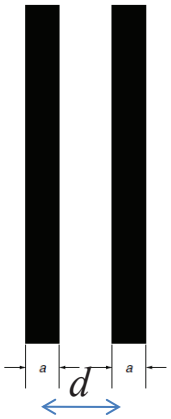
$$\Rightarrow I \propto |F(K)|^2 \propto \mathrm{sinc}^2\left(\frac{Ka}{2}\right)$$



4-51

Rendija doble (experimento de Young)

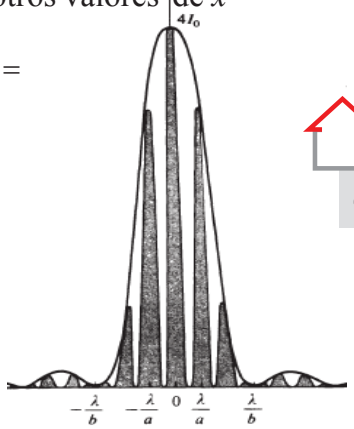
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } |x - d/2| \le a/2 \text{ o } |x + d/2| \le a/2 \\ 0 & \text{para otros valores de } x \end{cases}$$



$$F(K) = \int_{d/2-a/2}^{d/2+a/2} e^{iKx} dx + \int_{d/2-a/2}^{-d/2+a/2} e^{iKx} dx = \frac{1}{iK}\left(e^{iKx}\Big|_{d/2-a/2}^{d/2+a/2} + e^{iKx}\Big|_{-d/2-a/2}^{-d/2+a/2}\right) =$$

$$= \left(e^{iKd/2} + e^{-iKd/2}\right) a\,\mathrm{sinc}\left(\frac{Ka}{2}\right) = a\cos\left(\frac{Kd}{2}\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{Ka}{2}\right)$$

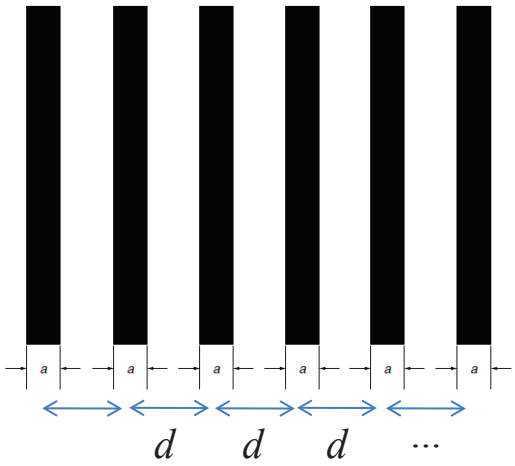
$$\Rightarrow I \propto |F(K)|^2 \propto \cos^2\left(\frac{Kd}{2}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{Ka}{2}\right)$$



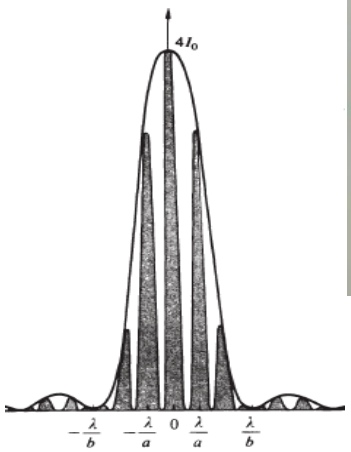
4-52, 4-53

NOTA: rendija multiple = rejilla de difracción

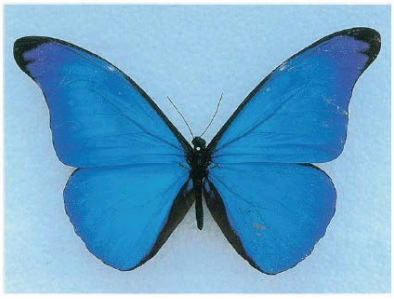
Aplicación: red de difracción

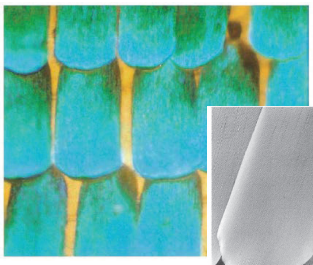


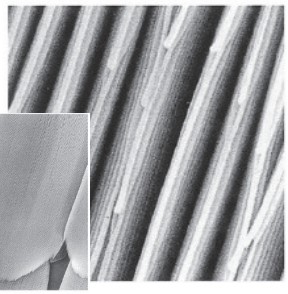
Red de difracción = rendija múltiple

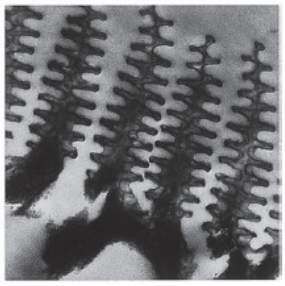


4-56



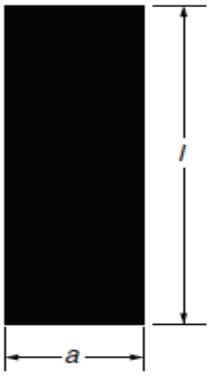






Patronos de difracción de Fraunhofer 2D

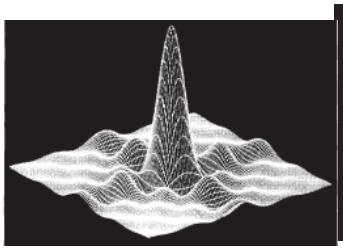
Apertura rectangular (2D) $f(x,y)=\begin{cases}1\ , \text{ si } |x|\le a/2 \text{ e } |y|\le l/2\\ 0\ , \text{para otros valores } (x,y)\end{cases}$



$$F(K_x,K_y)=\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-l/2}^{l/2}e^{i(K_x x+K_y y)}dxdy=\left(\int_{-a/2}^{a/2}e^{iK_x x}dx\right)\left(\int_{-l/2}^{l/2}e^{iK_y y}dy\right)=al\,\text{sinc}\left(\frac{K_x a}{2}\right)\text{sinc}\left(\frac{K_y l}{2}\right)$$

$$I\propto\left|F(K_x,K_y)\right|^2$$

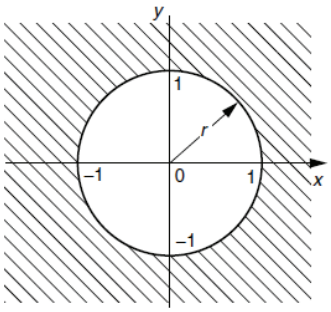
$$\propto \text{sinc}^2\left(\frac{K_x a}{2}\right)\text{sinc}^2\left(\frac{K_y l}{2}\right)$$



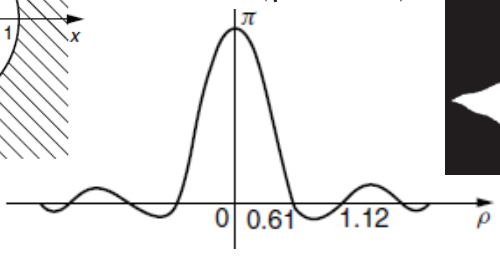
4-58

4-59

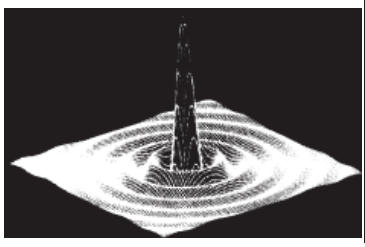
Apertura circular $\text{circ}(r)=\begin{cases}1 & r\le 1\\ 0 & r>1\end{cases}$



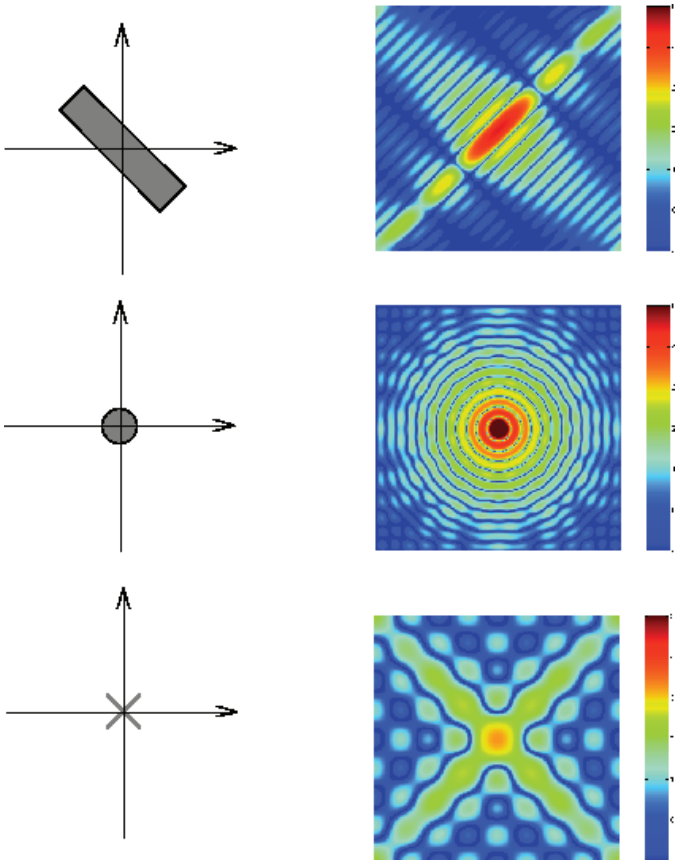
$$F(\rho)=F\left(\sqrt{K_x^2+K_y^2}\right)$$



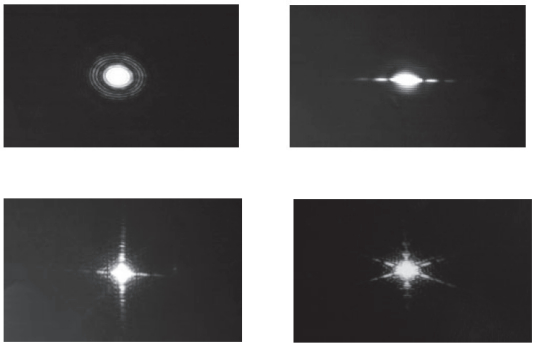
patrono de Airy:



*Patronos de difracción de Fraunhofer

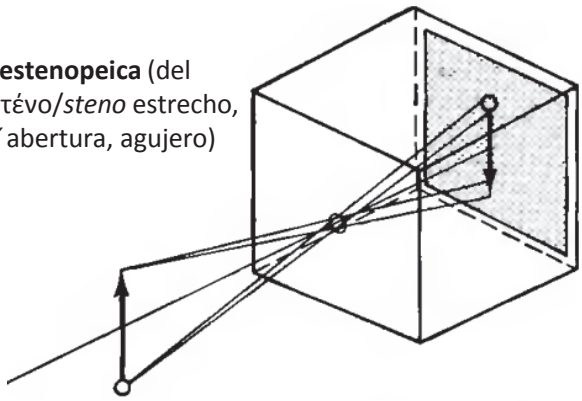


¿Cuál es el patrono de difracción de Fraunhofer (tranformada de Fourier 2D) de cada letra ?



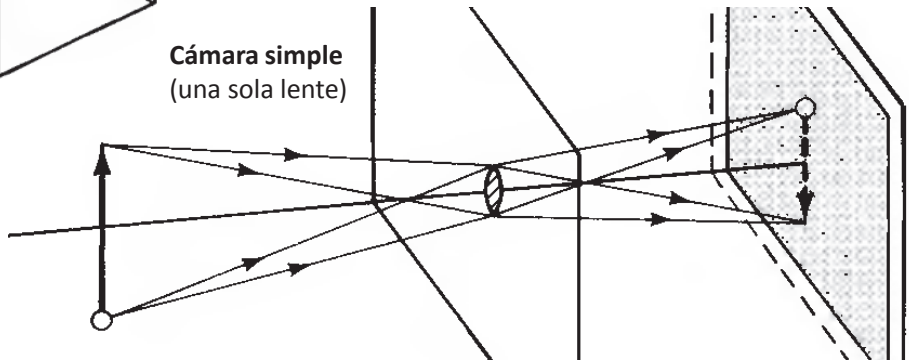
Instrumentos que forman imágenes

cámara estenopeica (del griego στένο/*steno* estrecho, ὀπή/*opí* abertura, agujero)

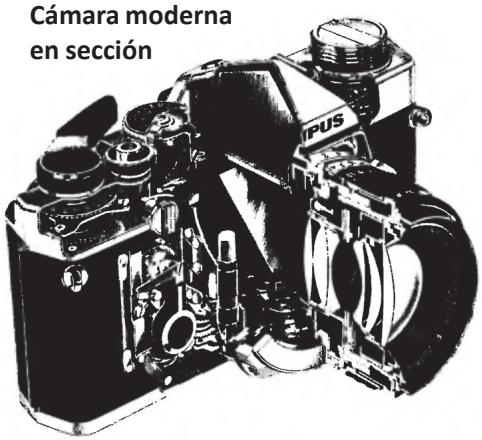


Es el sistema más simple para la formación/adquisición de imágenes.
Ventaja: no focaliza → todo objeto en la imagen está en foco, profundidad de campo ilimitada
Desventaja: muy poca luz atraviesa el agujero; si éste se hace más grande, la imagen deja de ser nítida

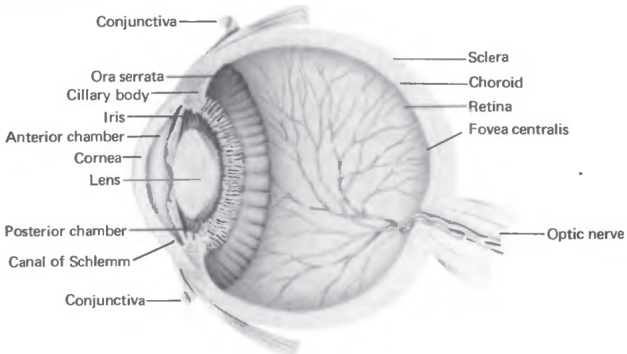
Cámara simple (una sola lente)



Cámara moderna en sección

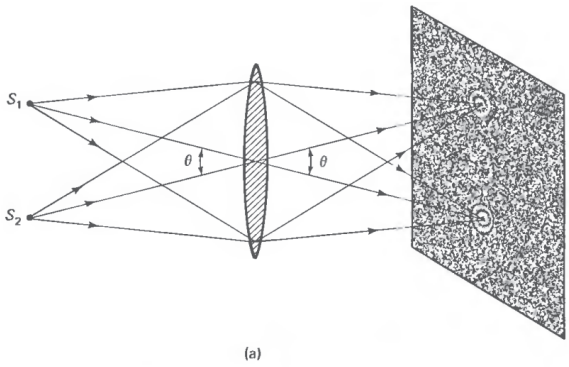


el ojo



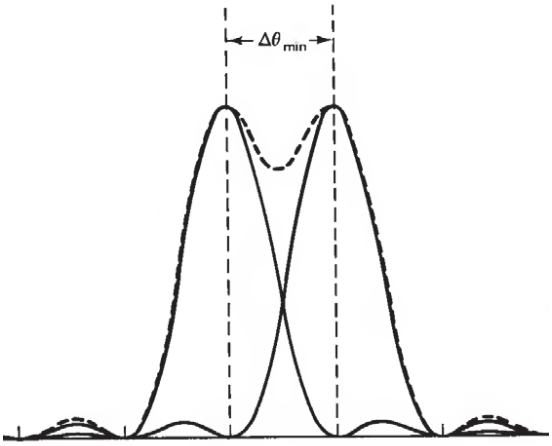
Resolución máxima de los instrumentos ópticos

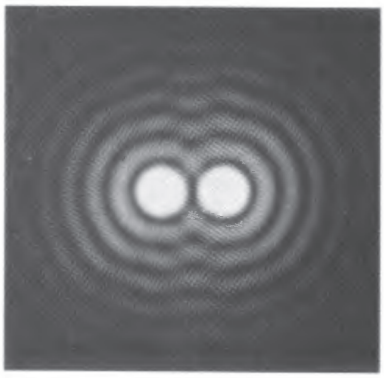
Agujero (cámara estenopeica) o lente = apertura circular
→ Limitación de la resolución de los instrumentos ópticos



(a)

$$(\Delta\theta)_{\min} = \frac{1.22\lambda}{D}$$




(b)

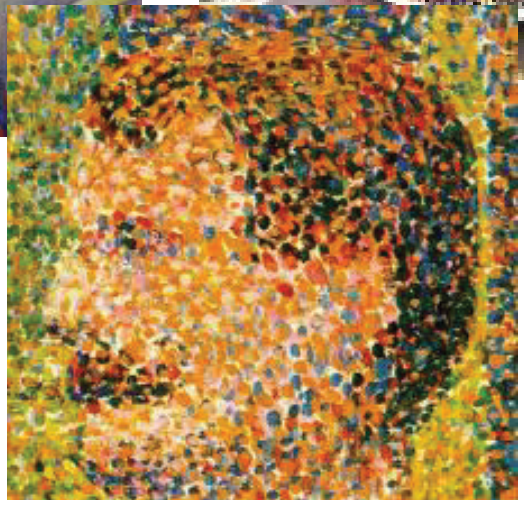
(c)

4-64

4-62, 4-63, 4-67, 4-70

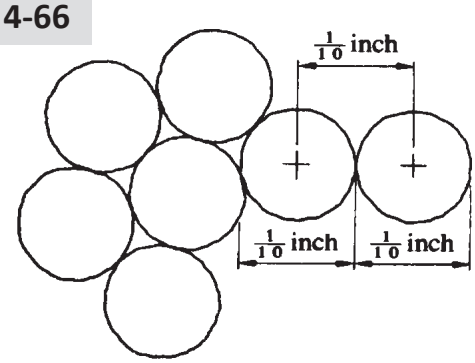
Actividad : medir la resolución angular de vuestros ojos. Sólo necesitáis una hoja de papel con dos rayas separadas por 1 mm

Resolución (criterio de Rayleigh)

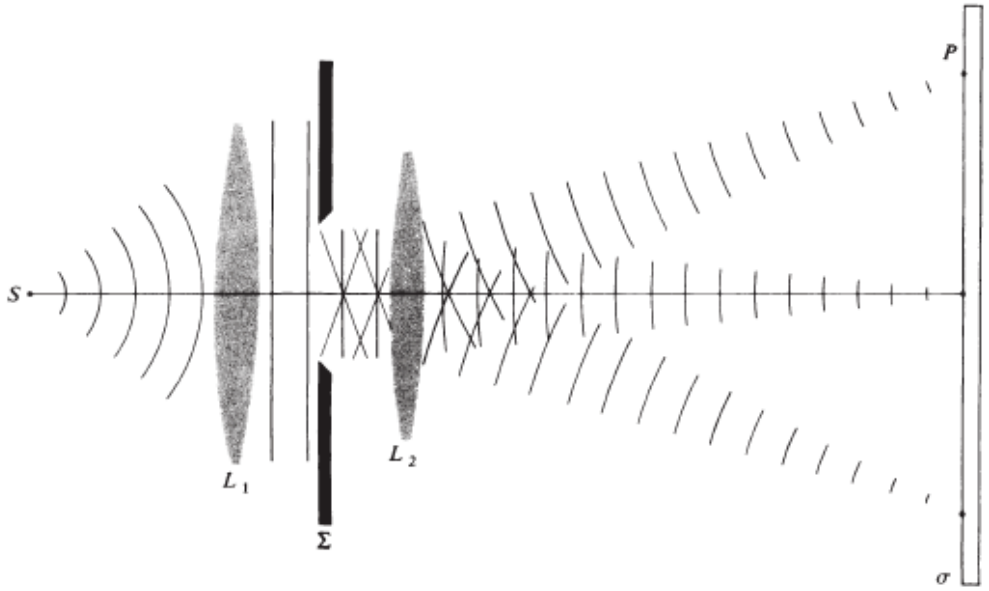


George Seurat (1859 - 1891) puntillismo

4-66



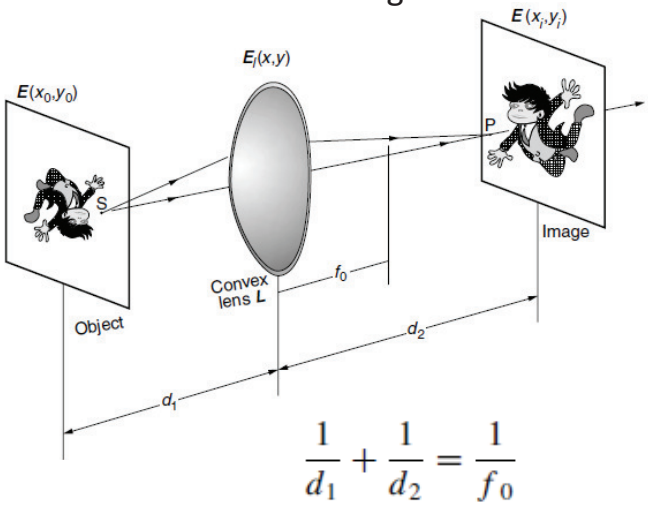
Difracción de Fraunhofer con lentes



Si la lente L_2 se coloca en el lugar de la apertura, se obtiene directamente la trasformada de Fourier en el plano focal de la lente

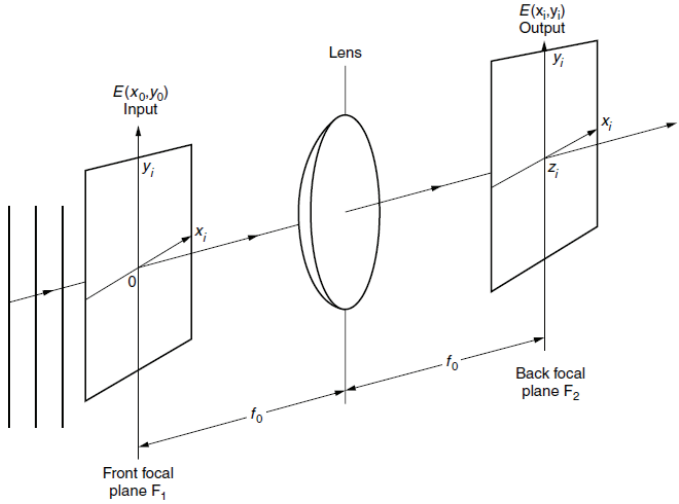
2 modos de utilizar una lente

Para formar una imagen



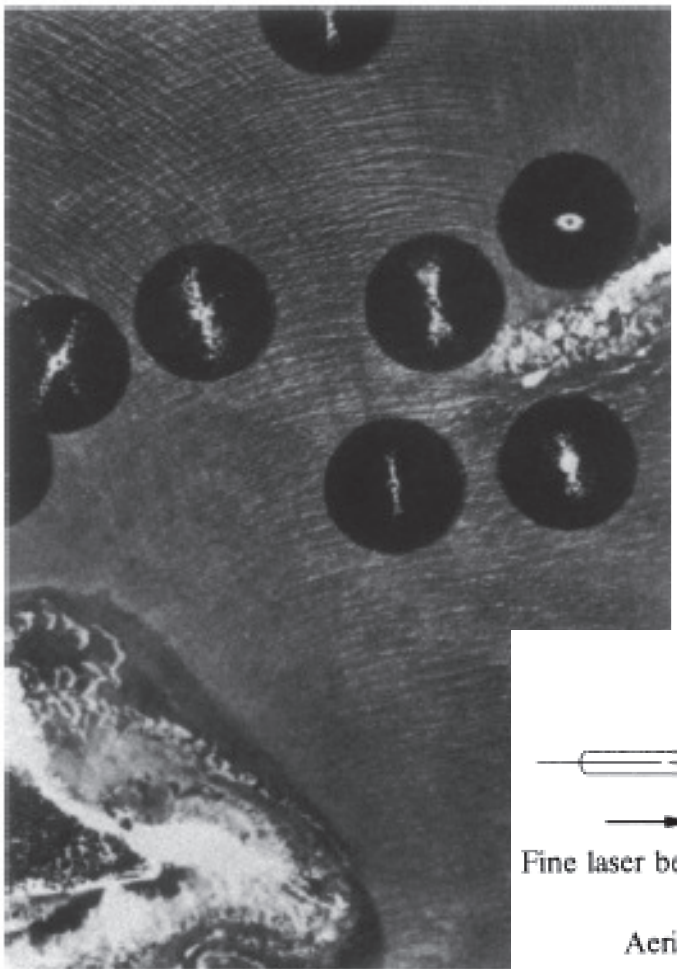
$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{f_0}$$

Para hacer la transformada de Fourier

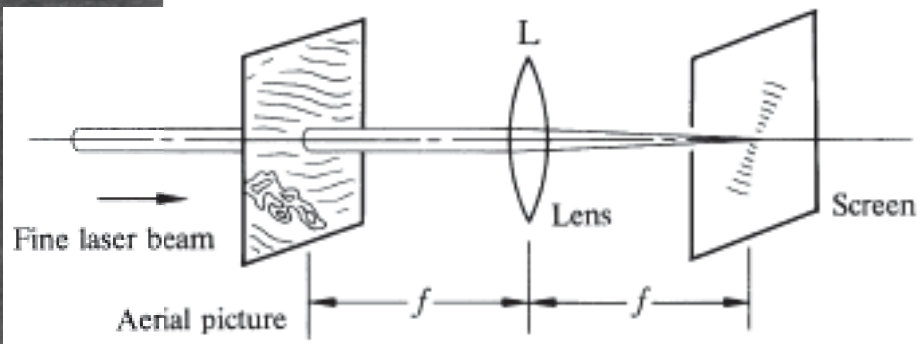


En las 2 geometrías las distancias entre lente y planos de input y de output son distintas.

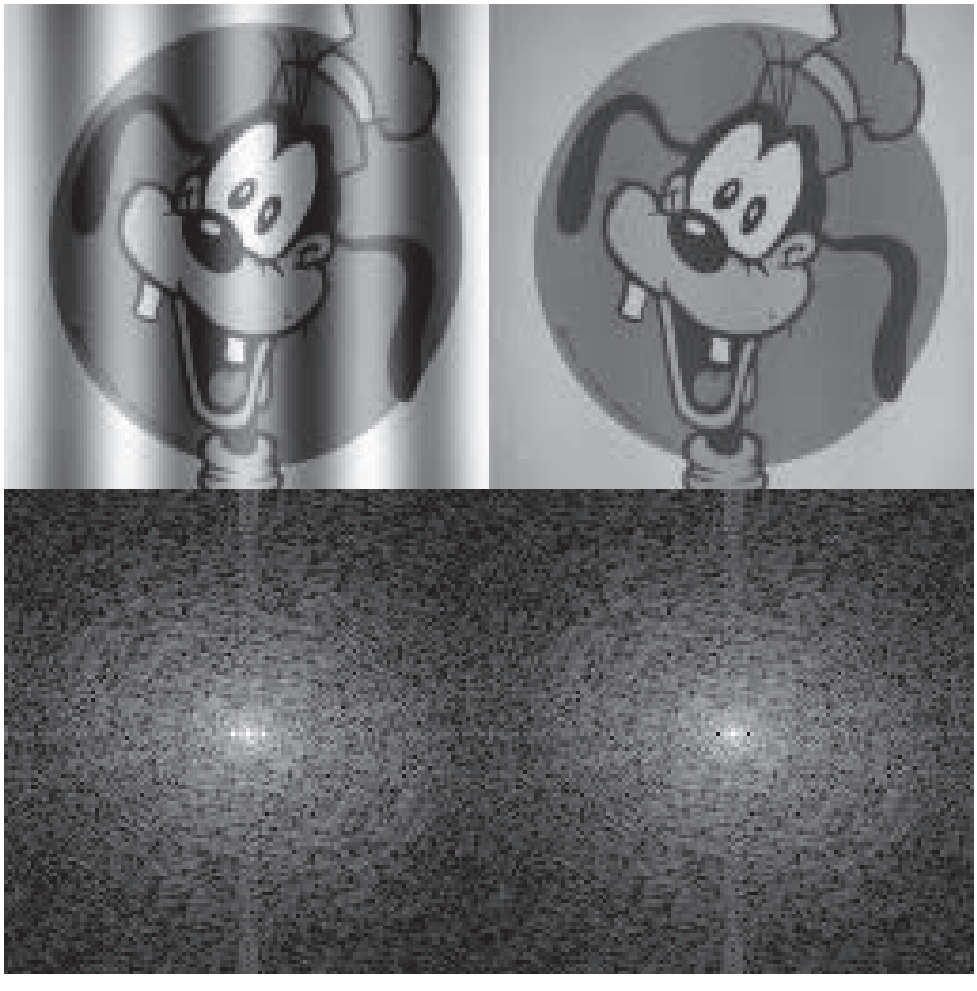
Procesado de imágenes y filtros espaciales



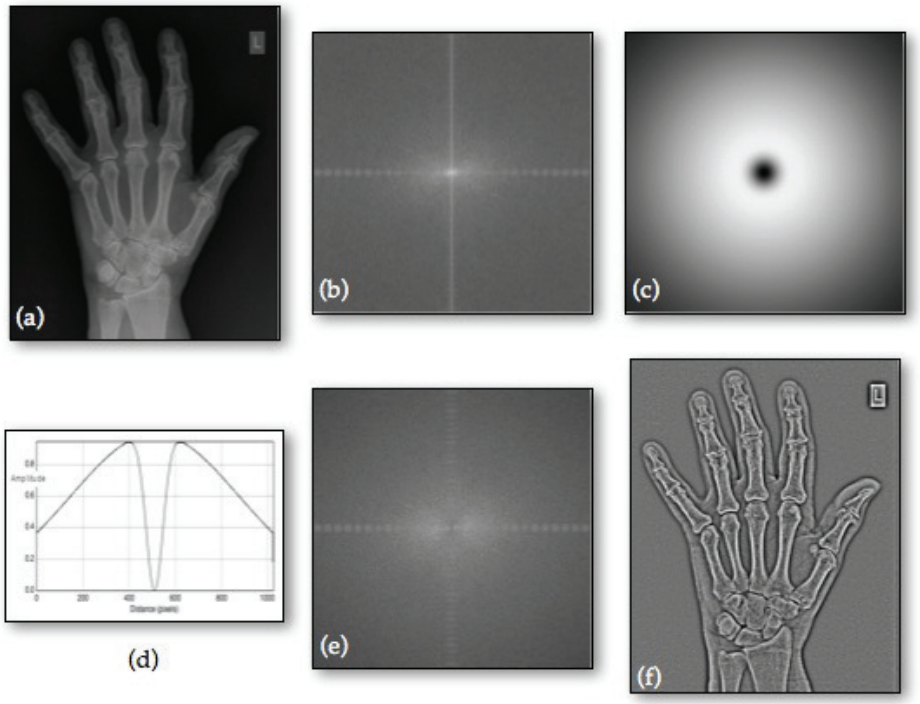
Una imagen es un mapa 2D de intensidad lumínica, que en el caso de imágenes en color también contiene información sobre la longitud de onda. El procesado de imágenes se basa en el análisis (y a veces filtraje) de las componentes espaciales de Fourier. Para ello puede utilizarse un programa de ordenador (p. ej. para imágenes digitales), pero también un simple sistema de una o dos lentes. La 2ª versión permite el análisis en tiempo real de imágenes analógicas.



Eliminar un ruido periódico en una imagen



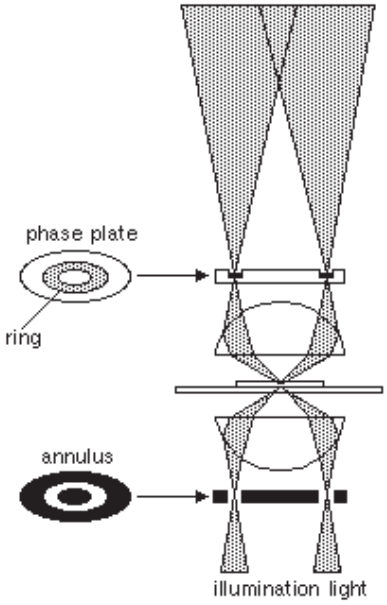
Visualizar contornos filtrando las frecuencias bajas



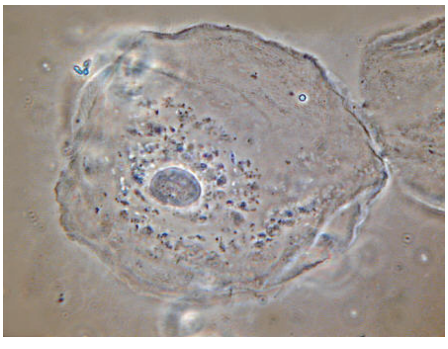
http://www.cs.unm.edu/~brayer/vision/fourier.html

*Visualizar objetos transparentes (o “de fase”)

Nuestros ojos, como los detectores de luz, miden solo la intensidad de la luz y no su fase. Si un objeto, p. ej. una célula, no absorbe luz, es decir si es transparente, nos resulta invisible.
Sin embargo, la luz que se propaga a través de él adquiere una modulación de fase, debido al diferente índice de refracción del objeto. Cuando un frente de onda plano incide en un objeto transparente, adquiere una pequeña modulación de fase, dada por: $e^{iT(x,y)} \approx 1 + iT(x,y)$
El problema es que $T(x,y)$ es pequeña, y además está en “cuadratura de fase” respecto al término dominante constante , lo que hace más difícil su medición. Para lograr medir el término $T(x,y)$ hay que retrasarlo en fase, lo que se consigue con el filtrado de imagen. Como se logra?
Con una lente esférica se realiza la transformada de Fourier de la luz refractada por la muestra.



La trasformada contiene dos términos: el 1º (que corresponde al término contante 1) es un patrono de difracción de Airy, que es muy estrecho si la lente es suficientemente grande; el 2º es la trasformada de Fourier de $T(x,y)$ multiplicada por *i* . Si en el plano de la transformada de Fourier se introduce una **placa de fase** que retrasa las componentes de altas frecuencias dejando invariadas las de muy baja frecuencia (el patrono de Airy), puede medirse *T* como si fuera una amplitud. Se suele atenuar la intensidad de las bajas frecuencias utilizando una iluminación especial.



Microscopio de contraste de fase
Frits Zernike, premio nobel (1954)

*Microscopia: contraste de fase y campo oscuro

Un objeto transparente situado en el plano (*x*,*y*) (es decir, z = 0) tiene un "factor de trasmisión" $e^{iT(x,y)} \approx 1 + iT(x,y)$, tal que cuando una onda plana $E_0 \exp[i(kz - \omega t)]$ lo atraviesa, la onda resultante tiene (justo después de atravesarlo, o sea cerca de z = 0) la forma:

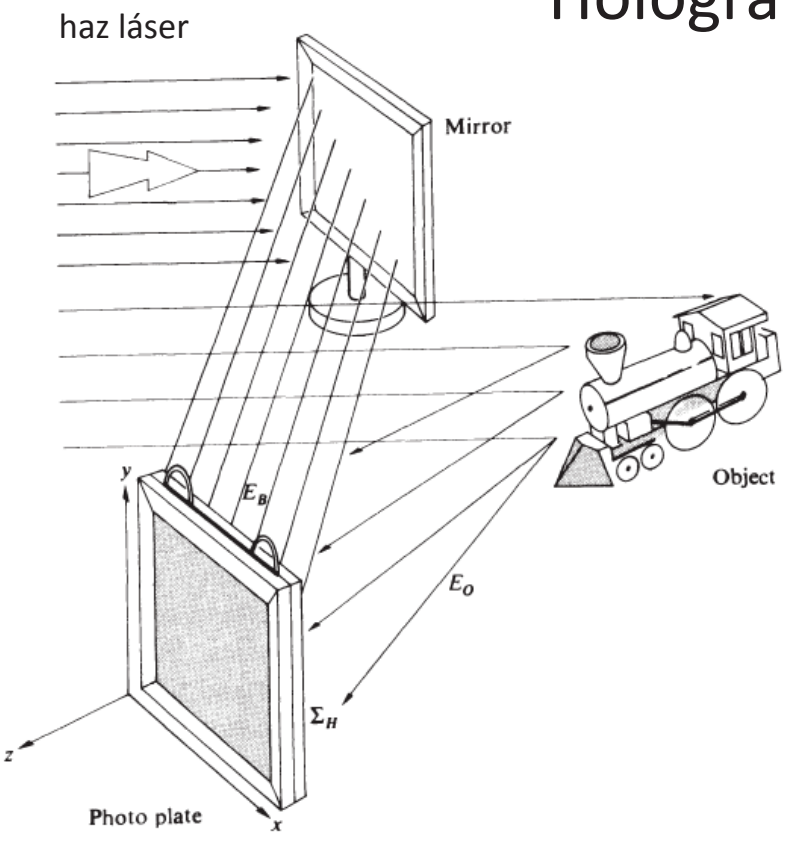
$$E_0 e^{-i\omega t} e^{iT(x,y)} \approx E_0 e^{-i\omega t}\left[1 + iT(x,y)\right] = E_0 e^{-i\omega t} + iE_0 T(x,y) e^{-i\omega t}$$

La irradiancia es proporcional al módulo cuadrado de esto, o sea proporcional a $E_0^2\left[1 + T^2(x,y)\right]$. Dado que T << 1, esto es básicamente el cuadrado de E_0 y por tanto no contiene ninguna información sobre el objeto. Ahora, el primer término del campo trasmitido es una componente DC, que en la transformada de Fourier 2D aparece como intensidad del punto (0,0), mientras que el 2º representa estructura espacial, que aparece lejos del punto (0,0) en la transformada. En un plano donde se genera la transformada de Fourier del objeto, se coloca una máscara de amplitud que desfasa la componente DC de 90° (para ello es suficiente poner en el centro de la máscara un pequeño disco tranparente del índice distinto al del resto de la máscara: esto varía el número de oscilaciones de la componente DC en la región de la máscara; en la práctica se utiliza otro sistema). De esta forma, en el plano donde se forma la imagen del objeto, la amplitud total será ahora la resultante de dos contribuciones que tienen la forma:

$$E_0 e^{-i\omega t} e^{i\pi/2} + iE_0 T(x,y) e^{-i\omega t} = iE_0 e^{-i\omega t}\left[1 + T(x,y)\right]$$

La irradiancia es en tal caso proporcional a $\left[1 + T(x,y)\right]^2 \approx 1 + 2T(x,y)$, y contiene por tanto información "lineal" sobre el objeto. La imagen resultante se llama de "*contraste de fase*"
Se puede también utilizar una máscara con un disco opaco en el centro (punto (0,0)). Esto quita completamente la componente DC, y produce una imagen llamada de "*campo oscuro*". La ventaja es que se quita el fondo intenso, pero hay la desventaja que la imagen es entonces proporcional a $T^2(x,y)$ (y por lo tanto la imagen no es una imagen "lineal")

Holografía



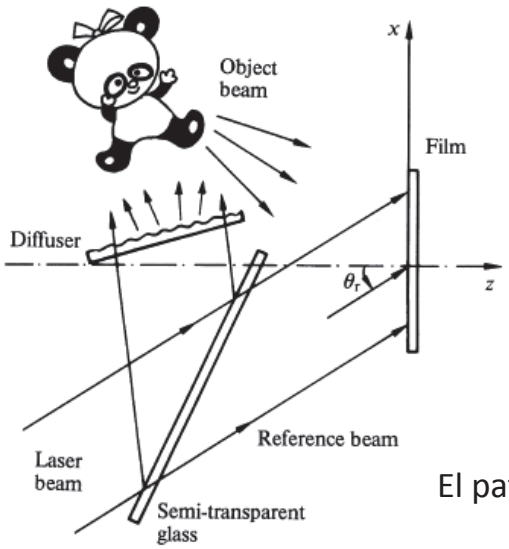
Una película fotográfica sólo contiene información sobre la irradiancia (intensidad) de la luz que la impresiona. Sin embargo, es la fase la que proporciona información sobre las distancias y la naturaleza 3D de la fuente de luz (directa o indirecta).

Para obtener una "fotografía" en 3D, hay que grabar la **fase** de la luz proveniente de un objeto

→ esto se hace con la **holografía**

Para el grabado y revelado de un holograma se necesita una fuente de luz coherente → láser

*Grabado de un holograma



Sean O(x,y) y R(x,y) las expresiones complejas del campo eléctrico de la luz difusa (O) por el objeto y del haz láser de referencia (R) en el plano de la película fotográfica $z = 0$).
El patrono de interferencia que se graba en la película es un patrono de irradiancia, proporcional al módulo al cuadrado del campo:

$$|O + R|^2 = |O|^2 + |R|^2 + OR^* + O^* R.$$

El haz de referencia incide con ángulo θ y está dado por:

$$R = R_0 e^{jkx \sin\theta + jkz \cos\theta}$$

El patrono grabado en el plano de la película ($z = 0$) es por tanto:

$$R_0^2 + |O(x, y)|^2 + R_0 e^{-jkx \sin\theta} O(x, y) + R_0 e^{jkx \sin\theta} O^*(x, y)$$

Los primeros dos términos no tienen variación espacial (el perfil de intensidad de la luz <u>difusa</u> por un objeto no es tan variable como su fase)

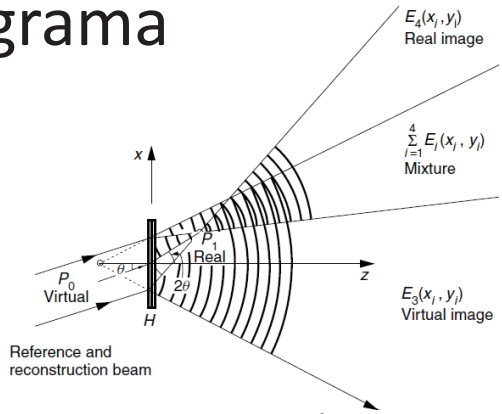
este término contiene la información del holograma

este término no sirve para el holograma (pero se utiliza para el reconocimiento de imágenes ("correlador óptico" Vander Lugt)

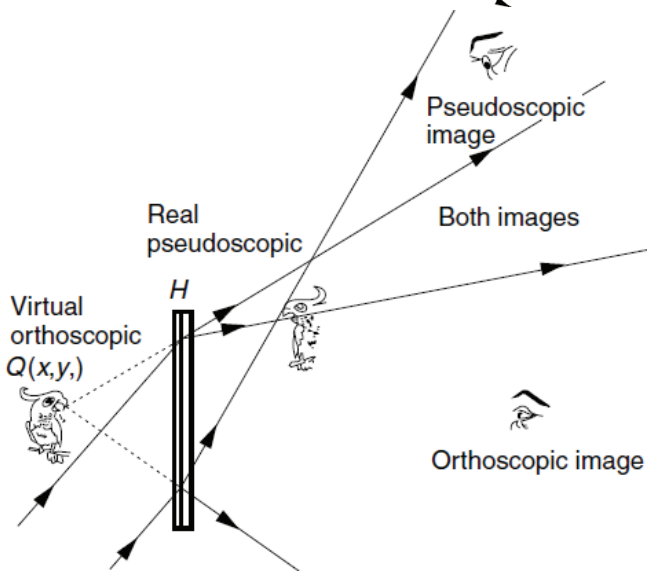
*Revelado de un holograma

Si el holograma se ilumina con el mismo haz utilizado para el grabado ("haz de reconstrucción"), la intensidad del haz queda modulada (multiplicada) por la trasmitividad de la película, produciendo una onda $E = e^{ikz \sin\theta} E(x, y)$, con:

$$E(x, y) = R_0^3 e^{jkx \sin\theta} + |O(x, y)|^2 R_0 e^{jkx \sin\theta} + R_0^2 O(x, y) + R_0^2 e^{j2kx \sin\theta} O^*(x, y)$$



Los primeros dos términos no tienen variación espacial. El tercero es exactamente igual (a menos de una constante) a la onda producida por el objeto, y genera una imagen *virtual* del mismo que además parece provenir del mismo lugar donde estaba el objeto en el proceso de grabado.
El último término del patrono de difracción produce una imagen *real* que tiene algún parecido con el objeto, pero es proporcional al conjugado complejo: el signo menos hace que la imagen que se crea es invertida de dentro hacia fuera, como si uno mirara la parte interna de una máscara (esta imagen, llamada "pseudoscópica" porque no corresponde a la normal apariencia del objeto, no invade todo el campo del holograma, que se puede ver bajo muchos ángulos sin solaparse con la imagen "falsa")



Nuestros ojos no ven las fases: ¿como es pues que vemos en 3D? (ver últimas transparencias)

Visión en 3D

Factores fisiológicos:

- Variación de imagen en la retina:

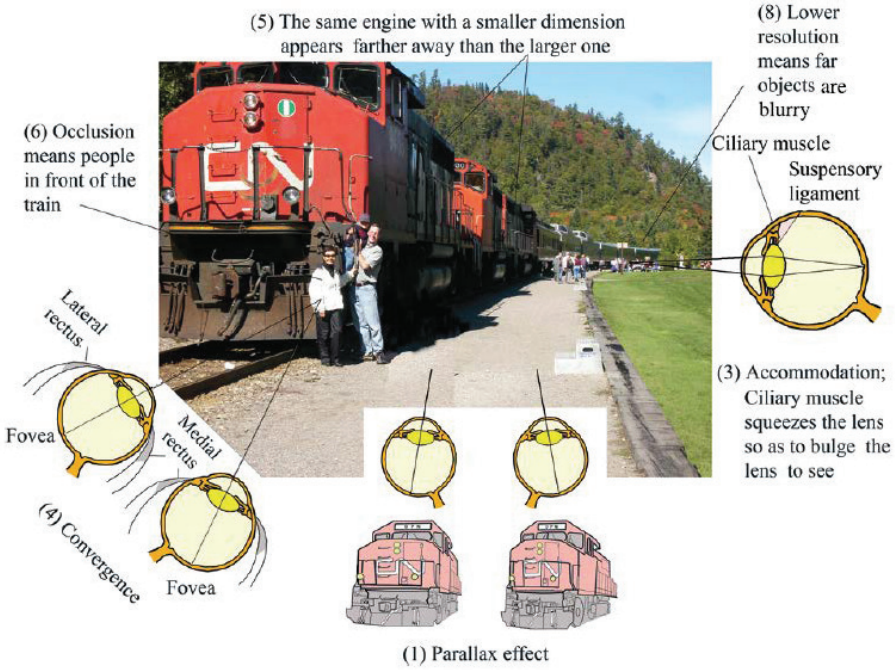
1) Paralaje

2) Paralaje debido al movimiento de la cabeza (también con 1 ojo solo)

- Información muscular (relacionada con la distancia de los objetos):

3) Acomodación (variación del foco del cristalino)

4) Convergencia (orientación relativa de los ejes ópticos de los 2 ojos)



Factores psicológicos:

5) Recuerdo de la forma y dimensión de los objetos

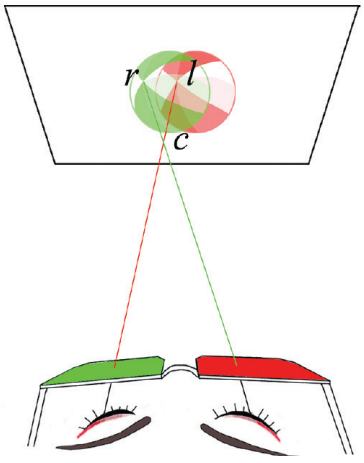
6) Ocultación de los objetos más lejanos por los más cercanos

7) Sombra (efecto iluminación)

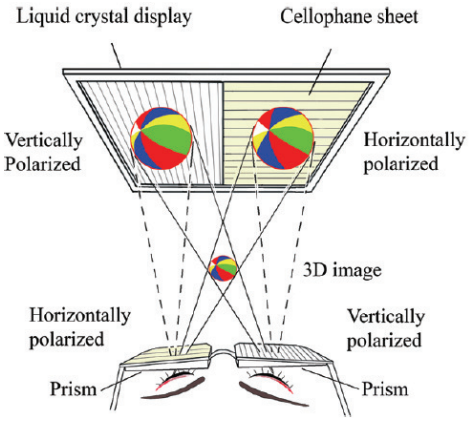
8) Resolución: objeto distante = baja resolución

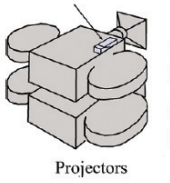
Visión 3D "artificial"

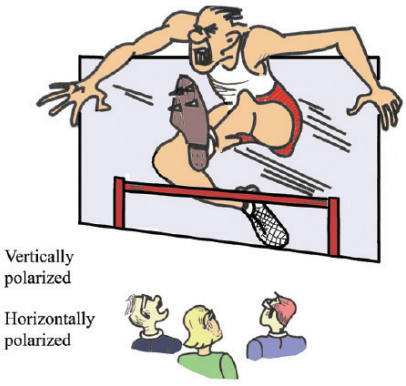
Con gafas coloreadas



Con gafas polarizadas

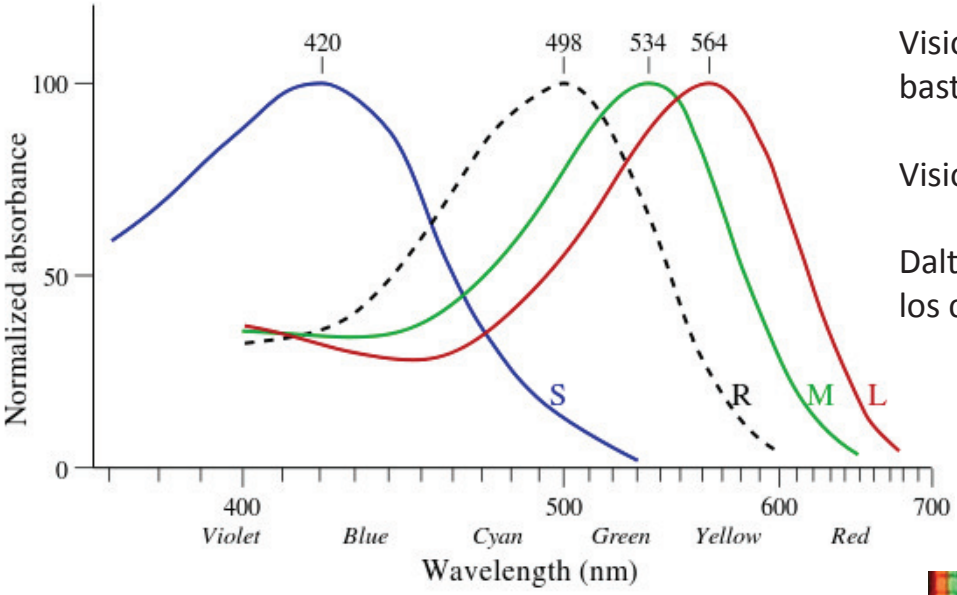






Eye fatigue is a common concern with all 3D displays. It has been clinically proven that if the point of accommodation is located at a place different from that of the convergence, the viewing causes eye fatigue [16.2]. With the projection type, the point of convergence is at the intersection, which is located at a point between the projection plane and the eyes, whereas the point of accommodation is located on the projection plane. A set of prisms with a 3° deviation angle as shown in Fig. 16.9 translates the formed 3D image to the plane of the projection without distorting the image. The points of convergence and accommodation now coincide, thereby relieving eye fatigue. In addition to relieving eye fatigue, the set of prisms often aids binocular fusion.

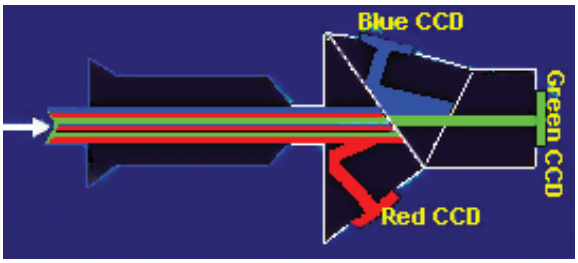
Visión en color y pantallas de color

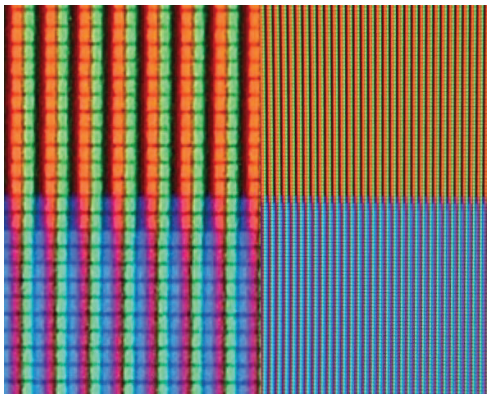


Visión nocturna (sin color) → bastones (línea discontinua)

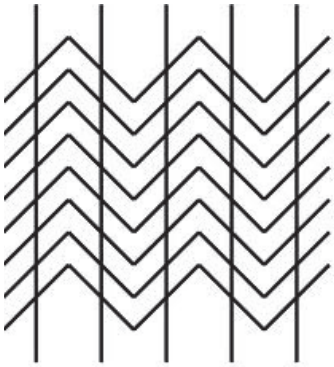
Visión en color → conos

Daltonismo → malformación de los conos sensibles a verde/rojo

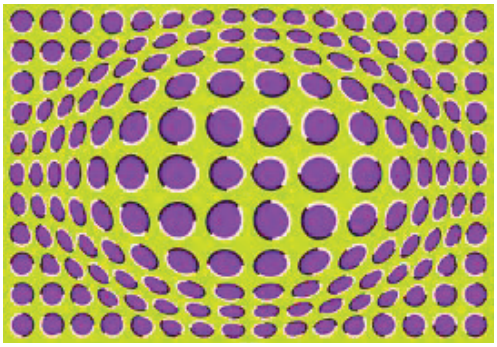




Ilusiones ópticas (psicológicas)

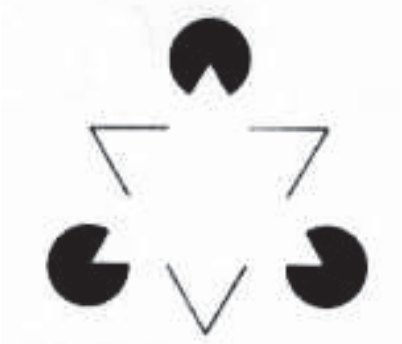


Con la perspectiva



Con perspectiva y forma

Con las caras



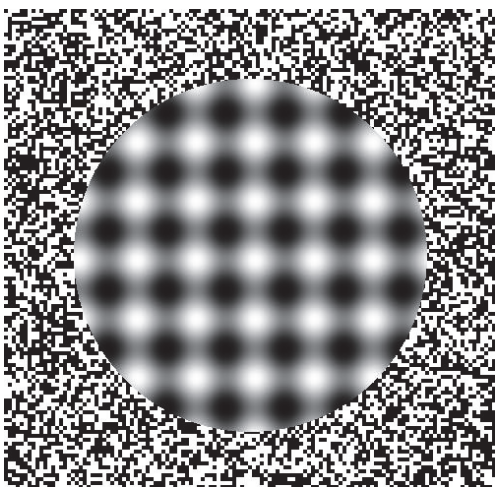
http://www.educaplus.org/play-278-Espiral-de-Fraser.html

http://ilusionesopticaseimagenes.com/pinturas/pintura-en-la-calle-en-3d

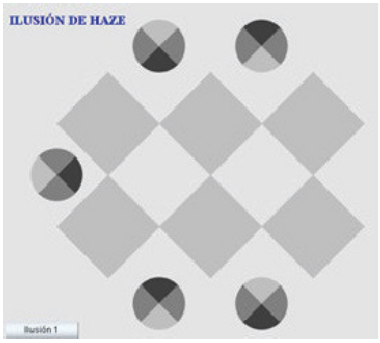
Con el movimiento

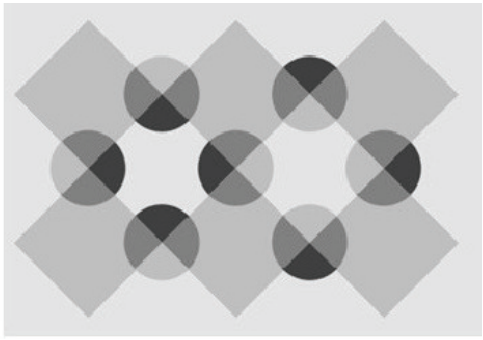
http://sehaidoyamama.com/blog/?p=2313

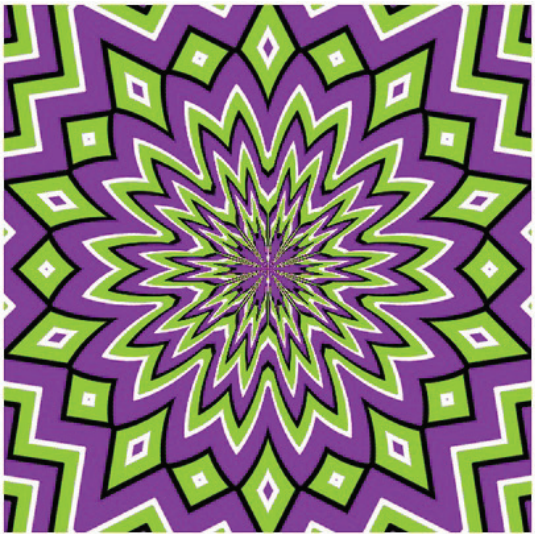
Con imágenes borrosas



Ilusiones ópticas con sombra, contraste, y color



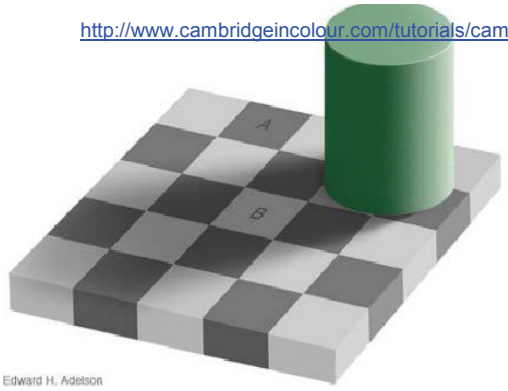




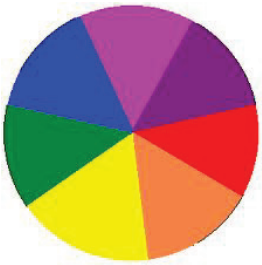
http://www.educaplus.org/play-265-Anillo-de-Wertheimer-Koffka.html

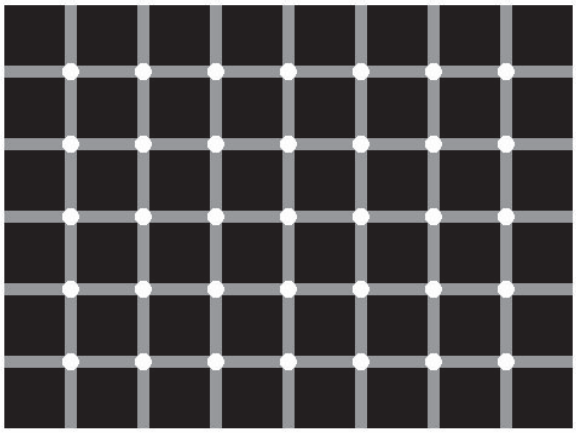
http://www.youtube.com/watch?v=z9Sen1HTu5o&feature=fvwrel

http://www.cambridgeincolour.com/tutorials/cameras-vs-human-eye.htm



Disco de Newton

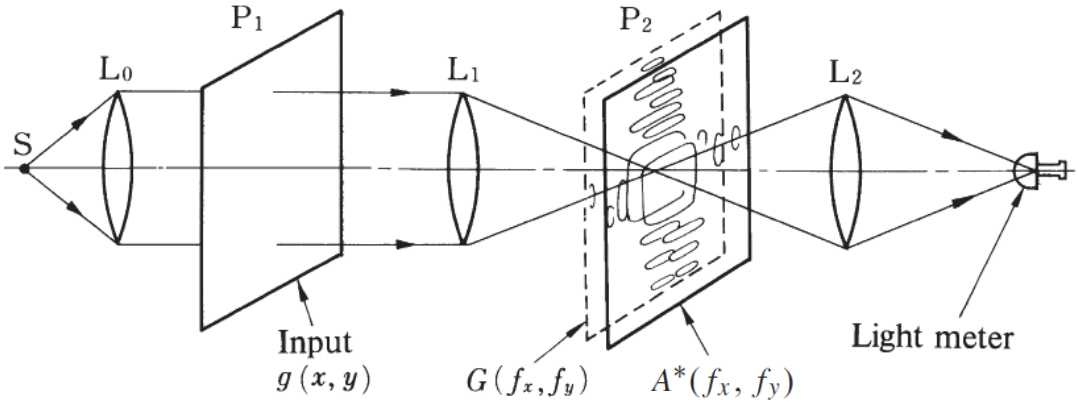




*Reconocer una imagen (correlador óptico)

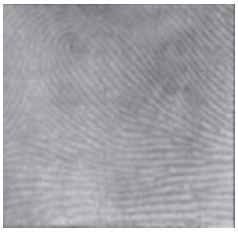
Se quiere comparar 2 fotografías de sospechosos o dos huellas dactilares, para ver si coinciden. Esto se puede hacer de forma bastante simple con el análisis de imagen. A partir de una película con la imagen *a* que se quiere reconocer, se graba en otra película el complejo conjugado de la trasformada de Fourier de *a* , que indicamos con *A** . Para ver si otra imagen *g* coincide con *a* se utiliza el dispositivo en figura. Este dispositivo (correlador de Vander Lugt) analiza la correlación entre la trasformada de Fourier (*G*) de *g* y *A** , que se utiliza como filtro. La luz que atraviesa ambas películas está dada por: $G(f_x,f_y)A^*(f_x,f_y)=|G|e^{i\phi_G}\cdot|A|e^{-i\phi_A}=|G(f_x,f_y)||A(f_x,f_y)|e^{i(\phi_G-\phi_A)}$

Esta cantidad es en general pequeña porque las partes transparentes del filtro *A** no coinciden con las zonas más claras de la trasformada *G* .

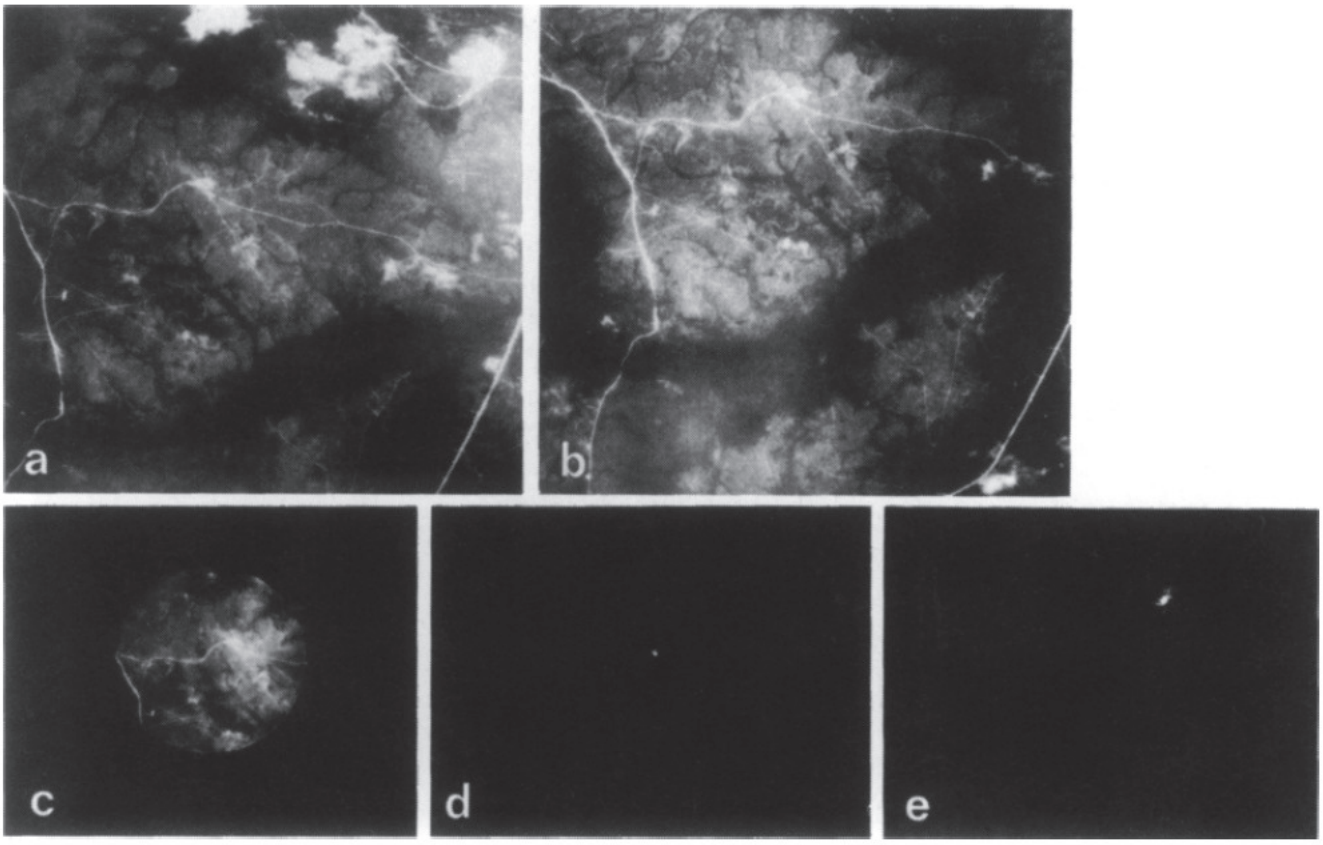


La luz que atraviesa las 2 películas tiene un máximo si *g* = *a*, ya que en tal caso las partes claras y oscuras de *G* y *A** coinciden: $G(f_x,f_y)A^*(f_x,f_y)=A(f_x,f_y)A^*(f_x,f_y)=|A(f_x,f_y)|^2$

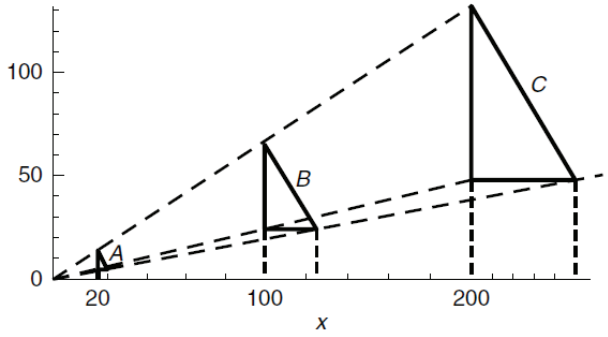
*Ejemplo: comparación de huellas dactilares

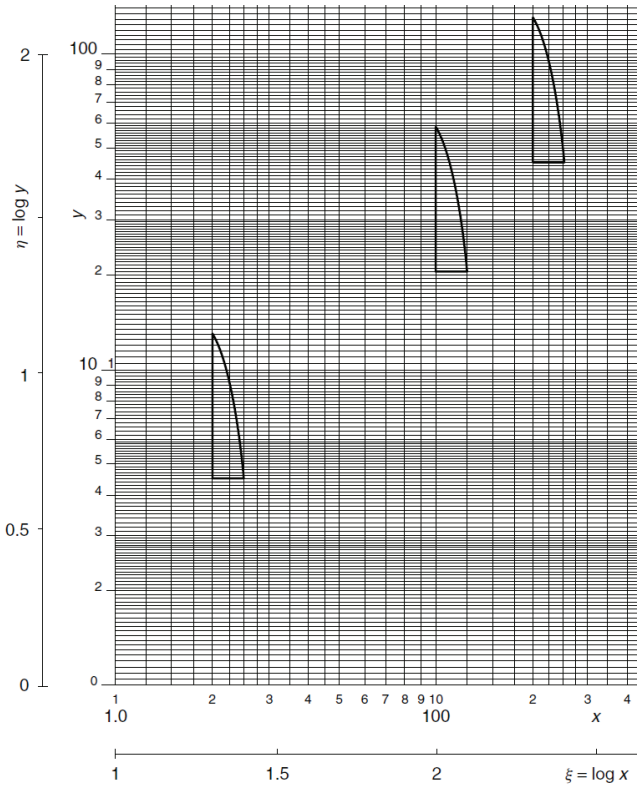


*Aplicación meteorológica: mapa de vientos



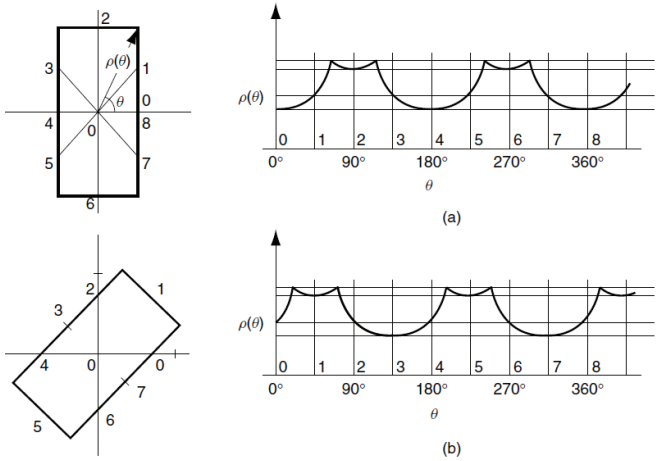
*¿y si la imagen es más grande/chica o rotada?



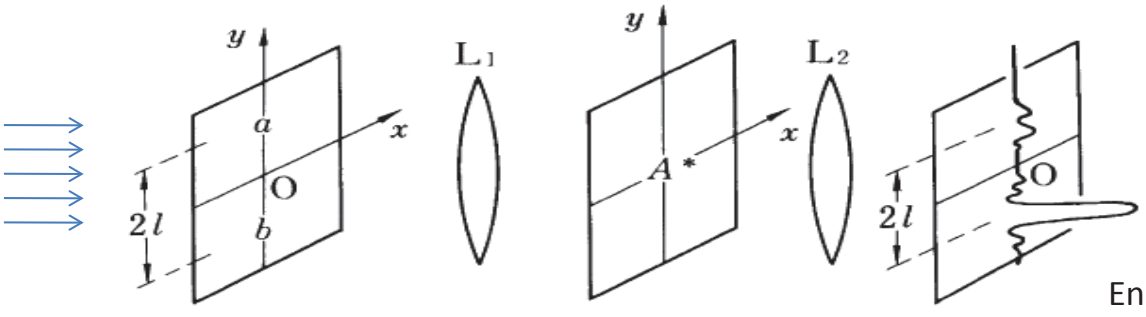


- Si las imágenes que se comparan son de tamaño diferente, se usa la representación logarítmica →

- Si tienen distintas orientaciones, se usa una representación polar ↓



*Reconocimiento de un detalle (ej. texto)

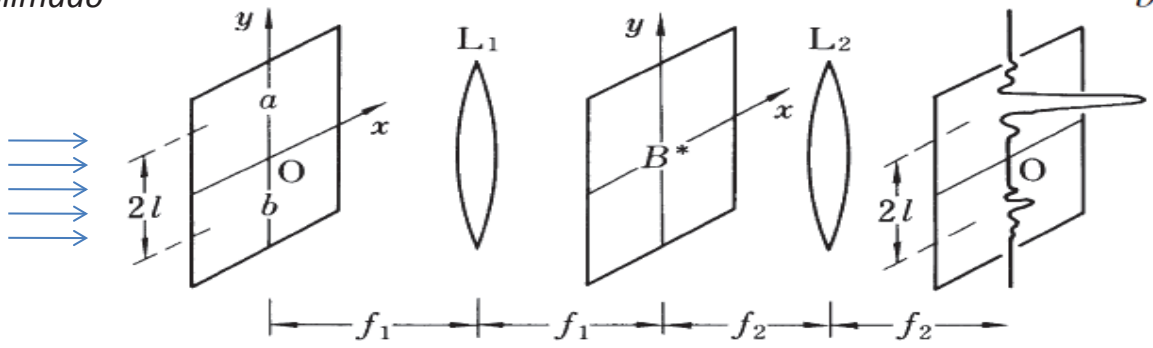


haz de luz colimado

imagen g (ej.: texto)

conjugado de la trasformada de Fourier de la letra buscada

En la imagen *g* ,
"a" está en $(0, l)$
"b" en $(0, -l)$



$G(f_x, f_y) = e^{-i2\pi f_y l} A(f_x, f_y) + e^{i2\pi f_y l} B(f_x, f_y)$, con $\mathcal{F}\{a(x,y)\} = A(f_x, f_y), \quad \mathcal{F}\{b(x,y)\} = B(f_x, f_y)$

$G(f_x, f_y) A^*(f_x, f_y) \approx e^{-i2\pi f_y l} \left| A(f_x, f_y) \right|^2$ $\Rightarrow$ transformado otra vez, esto da un pico en $-l$