

# Tecnología de la Ilum

Roberto Macovez , despacho 11.67 (planta 11)

Consultas: me enviáis un correo a [roberto.macovez@upc.edu](mailto:roberto.macovez@upc.edu)

<http://gcm.upc.edu/members/roberto-macovez>

Material:

- **Apuntes y lista de problemas en ATENEA**
- Libro de texto: **Óptica (E. Hecht, 3ª ed.) (en castellano)**  
Capítulos/párrafos: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10.1, 10.2, 11.2.1, 11.2.2, 11.3.3, 13  
<http://es.scribd.com/doc/10940149/Optica-Hecht>
- Libro en inglés: Principles of Optical Engineering (F.Yu & I.Khoo)

## Evaluación:

0,4 Parcial + 0,2 entregas + 0,4 Final  
40% (10%+10%) 40%

### 1) La luz y la matemática de las ondas

- Notación compleja de las ondas
- Ondas monocromáticas planas y esféricas
- Transformada de Fourier
- Interferencia y difracción
- Antenas emisoras y detectoras, otras fuentes clásicas

### 2) Fenómenos ópticos en los materiales (teoría clásica)

- Interacción con la materia: emisión, absorción, esparcimiento
- Luz en un aislante o conductor, velocidad de fase y de grupo
- Reflexión y refracción, reflexión total interna
- Fibras ópticas

### 3) Fuentes de luz cuánticas

- Clasificación de las fuentes electromagnéticas
- Fuentes luminiscentes
- Fuentes incandescentes (cuerpo negro)
- Láser
- Fuentes y detectores de semiconductor

### 4) Instrumentos ópticos e imágenes

- Espejo, dióptrio, lente
- Sistemas compuestos: microscopio, telescopio, el ojo humano
- Difracción y límite de resolución
- Análisis y procesamiento de imágenes, holografía, visión en 3D, microscopía campo oscuro

**TEMARIO**

# Por qué os habéis apuntado a esta optativa

Algunas ramas de la ingeniería donde se aplica lo que veréis son :

- Diseño de antenas (TSC, Telecom)
- Comunicación por fibra óptica (Telecom)
- Celdas solares (Dep. Electrónica)
- Visión artificial (Dep. Robótica, planta 11 ETSEIB)
- Alumbrado (ETSEIB planta 10)
- Materiales dieléctricos en radiofrecuencias y microondas (R. Macovez EEBE, Edifici C, <http://gcm.upc.edu/en/topics>)
- Láseres, Nanofotónica y Óptica Integrada (ICFO, Castelldefels)
- Óptica no lineal (Dep. Física Terrassa)

## Aplicaciones tecnológicas:

- fuentes y detectores de luz
- espejos, lentes, rejillas de difracción, capas antirreflejo
- instrumentos ópticos (el ojo, cámara, telescopio, ...)
- fibras ópticas y telecomunicaciones
- láser: cirugía, DVD, procesamiento de materiales...
- optoelectrónica: LED, diodo láser, celdas solares
- análisis de imagen, microscopía, holografía, ...

## ¿Qué es la luz? (TEMA 1)

### ➤ Siglos XVII y XVIII:

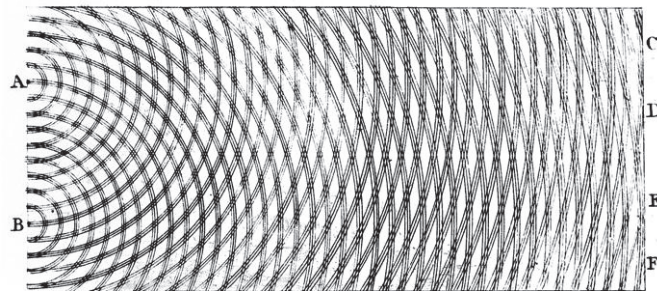
1609: Galileo desarrolla el telescopio para mirar planetas y astros (1621 ley de Snell)

~1670: van Leeuwenhoek desarrolla el microscopio para mirar muestras biológicas

1676: Rømer demuestra que la luz se propaga con velocidad finita  $c$

1690, 1704: Controversia Huygens – Newton: ¿ luz = onda o partículas?

### ➤ 1801: experimento de la doble rendija de Young (la luz es una onda)



- 1808: Malus descubre la “polarización” de la luz, o sea que la luz es una onda transversal
- 1820-1840: descubrimiento de la posibilidad de “guiar” la luz por reflexión total interna
- 1845: Faraday encuentra que un campo magnético puede variar la polarización de la luz que se propaga en un material → relación luz – magnetismo ?
- 1848 y 1850: Primero Fizeau y luego Foucault remiden  $c$ . El 2º encuentra  $2.98 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$
- 1873: Maxwell descubre que sus ecuaciones (1861) predicen la existencia de *ondas electromagnéticas* que se propagan en el vacío
- 1887: Hertz genera y detecta ondas electromagnéticas en el laboratorio (usando antenas)
- 1875-1895: descubrimiento de los rayos X (y luego gamma)
- 1896: invención de la radio; primeras “fotos” con rayos X

# Luz : onda electromagnética

Ec. de Maxwell (en el vacío)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

Utilizando la identidad vectorial:  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V}$  se obtiene la:

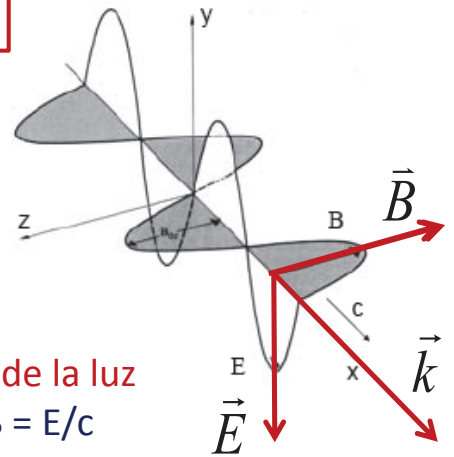
**Ecuaciones ondas e.m.**

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Velocidad de propagación:  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

$$c = 1/\sqrt{(8.85 \cdot 10^{-12} \text{ s}^2 \text{C}^2 \text{m}^{-3} \text{kg}^{-1})(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ mkgC}^{-2})}$$

En 1D:  $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \Rightarrow$  solución particular:  $y(x,t) = A \sin(\omega t - kx + \phi_0)$  con  $\omega/k = \lambda f = c$



En 3D  $k$  e  $y$  son vectores:  $\vec{Y}(\vec{r}, t) = \vec{A} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0)$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}, \vec{k} \perp \vec{B}, \vec{B} \perp \vec{E}$$

$\rightarrow$  las ondas e.m. son ondas transversales

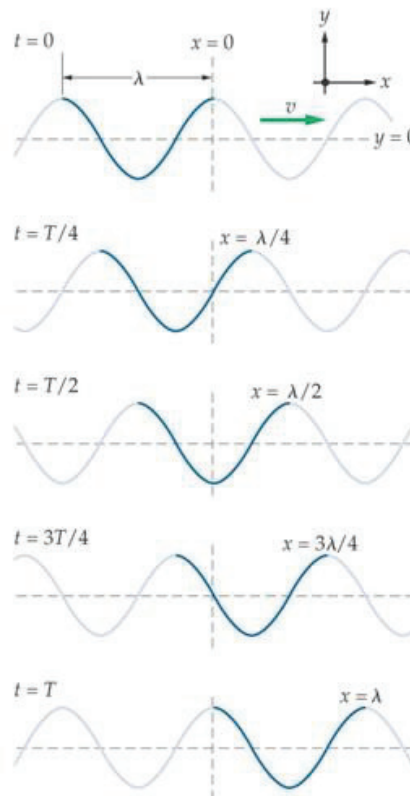
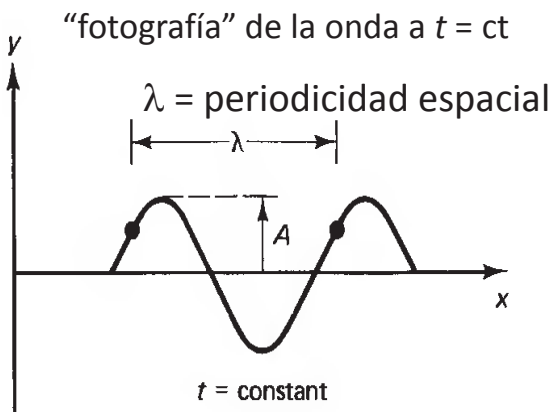
Def: la dirección de  $\mathbf{E}$  se llama polarización de la luz

$\rightarrow$  el módulo de  $\mathbf{B}$  de una onda e.m. vale  $B = E/c$

1-1

$$y(x,t) = A \cos(kx - \omega t + \phi_0)$$

onda plana armónica ("monocromática") que se propaga en el sentido positivo del eje x

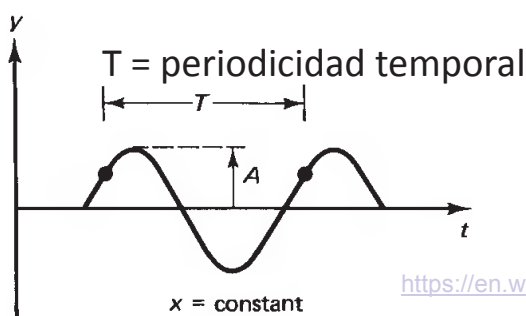


$$\frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = v$$

$$k = 2\pi/\lambda$$

$$\omega = 2\pi f$$

Movimiento de oscilación de un punto cualquiera de la onda ( $x = ct$ )

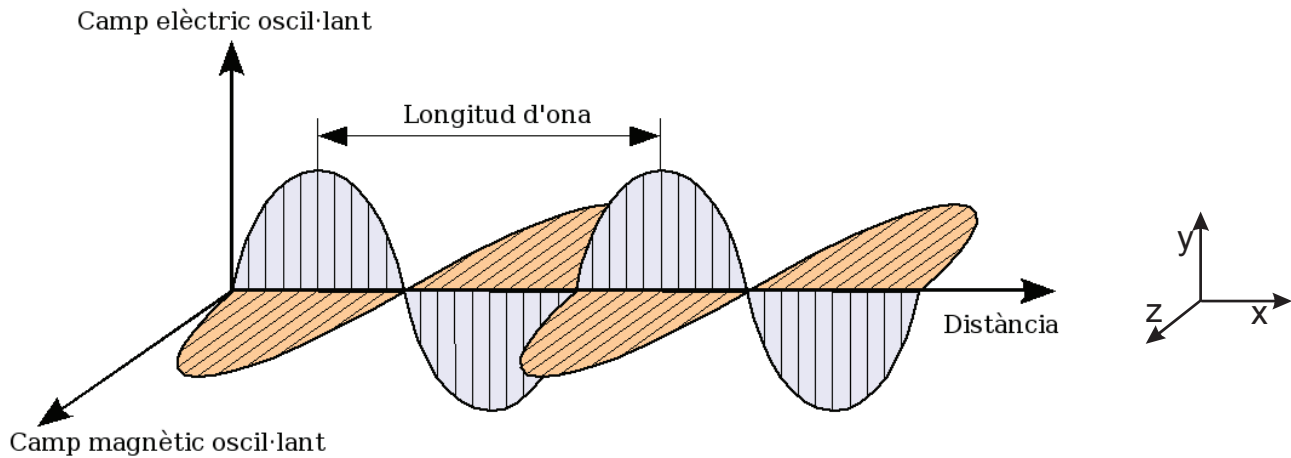


[https://en.wikipedia.org/wiki/Plane\\_wave#/media/File:AC\\_wave\\_Positive\\_direction.gif](https://en.wikipedia.org/wiki/Plane_wave#/media/File:AC_wave_Positive_direction.gif)

[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Plane\\_wave\\_animation.gif](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Plane_wave_animation.gif)

# Onda electromagnética plana monocromática

Ecuación de onda  $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$   $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$   
 $\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$



$$\vec{E}(x,t) = E(x,t) \vec{j}$$

$$\vec{B}(x,t) = B(x,t) \vec{k}$$

$$E_0 = c B_0$$

$$E(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx + \delta)$$

$$B(x,t) = B_0 \cos(\omega t - kx + \delta)$$

$E$  y  $B$  en fase

La dirección de  $E$  se llama polarización de la luz

## Luz : energía electromagnética

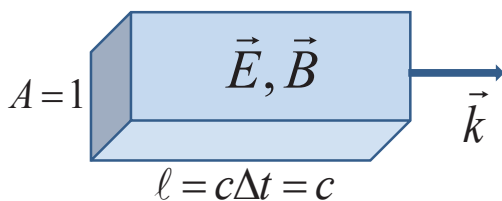
Densidad de energía ( $u$ ) asociada a campos  $E$  o  $B$  :  $u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$  ;  $u_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2$

LUZ = campo e.m. oscilante ;  
 en el espacio vacío :  $B = E/c \Rightarrow u_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0} \frac{E^2}{c^2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = u_e \Rightarrow u_{e.m.} = \epsilon_0 E(t)^2$

En realidad no nos interesa el valor instantáneo: luz visible:  $\lambda \sim 500 \text{ nm} \rightarrow \omega, \nu \sim 10^{15} \text{ Hz}$ , no se puede medir el valor instantáneo de  $E$ , y aún menos el de  $u$  !!! Sólo podemos medir valores promedios en el tiempo de la energía, que denotamos con  $\langle u \rangle$ . Ej.: onda monocromática:

$$u_{e.m.} = \epsilon_0 E(t)^2 = \epsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t) \Rightarrow \langle u_{e.m.} \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \quad \langle \rangle = \text{promedio temporal}$$

Flujo de energía por área unitaria = energía transportada por unidad de tiempo y superficie :



Para una onda plana en el espacio vacío:

$$\Delta V = lA = c$$

$$\Delta U_{A=1, \Delta t=1} = \langle u_{em} \rangle \Delta V = c \langle u_{em} \rangle = \Phi_u$$

(el flujo de energía es en la dirección de propagación de la onda)

La energía promedia que fluye por unidad de tiempo y superficie, o sea la potencia de la onda e.m. por unidad de superficie se llama **irradiancia** ( $\mathfrak{I}$ ).

Para una onda e.m. monocromática se ha:

$$\mathfrak{I} = c \langle u_{e.m.} \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2$$

1-3

1-4

NOTA: la luz transporta no solo energía, sino también momento lineal y momento angular

# \*Teorema de la energía electromagnética

Multiplicando escalarmente por  $\mathbf{E}$  la ecuación de Maxwell  $\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , se halla:

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Con la identidad vectorial  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$  se obtiene:

$$\epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = -\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) \quad (\text{se ha usado también } \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$$

Se define el **vector de Poynting** como:  $\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$ . En función de  $\vec{S}$ , la ecuación anterior da:

$$\epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{S}$$

Ya que:  $\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 \rightarrow$  densidad energía eléctrica  
 $\frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \rightarrow$  densidad energía magnética

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} u_{em} = \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \quad \begin{array}{l} \text{teorema de Poynting (en el vacío)} \\ \rightarrow \text{conservación de la energía electromagnética} \end{array}$$

En forma integral (integrando sobre el volumen):  $\frac{\partial}{\partial t} U_{em} = \int dV \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \Phi_{\vec{S}}$

→ la variación de energía electromagnética (en el vacío) es igual al flujo del vector de Poynting

Una onda e.m. transporta energía en la dirección de propagación, ya que en tal caso es:  $\vec{S} \parallel \vec{k}$

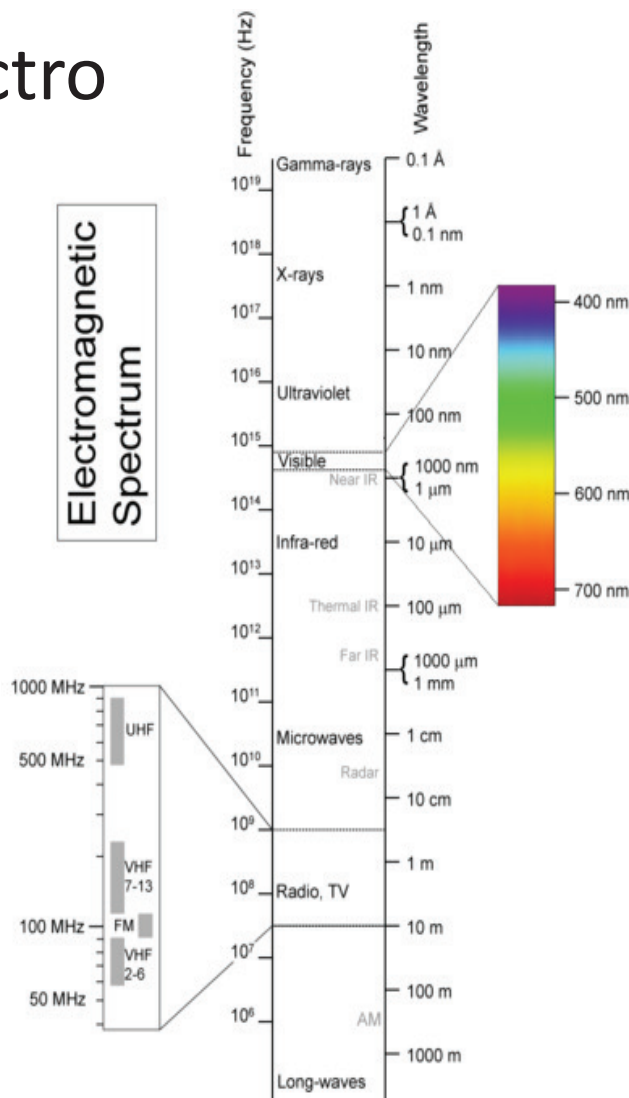
El valor promedio temporal del módulo del vector de Poynting se llama **irradiancia ( $\mathfrak{S}$ )**, y es igual al **flujo de energía por área y tiempo unitarios**.

Para una onda monocromática se tiene:  $\langle S \rangle = \frac{\langle EB \rangle}{\mu_0} = \frac{\langle E^2 \rangle}{\mu_0 c} = \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2 = \mathfrak{S}$

## “Tipos” de luz: el espectro electromagnético

velocidad  $c$ , ondas armónicas:  $\lambda f = c$

la frecuencia/longitud de onda está asociada con el **COLOR** →





# Propagación de la luz en un medio lineal e isotrópico sin cargas libres ni corrientes (dieléctrico perfecto)

La descripción más simple (y no del todo correcta) de la propagación de una onda e.m. dentro de un material se puede hacer a través de las ecuaciones "macroscópicas" de Maxwell:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_c \end{cases} + \begin{matrix} \text{Relaciones constitutivas} \\ \text{en un medio lineal :} \\ \vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \end{matrix} \xrightarrow{\text{(con } \vec{j}=0)} \begin{cases} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}}{\mu_r \mu_0} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \text{ y } \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \mu_r \epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \mu_r \epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Estas son ecuaciones de ondas que se propagan con velocidad:  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{n}$

El efecto del medio se resume en una redefinición de la velocidad de la onda y de las amplitudes de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B} \rightarrow$  en un medio no conductor, no magnético semitransparente (aire, vidrio)

$$\begin{cases} \epsilon_0 \rightarrow \epsilon_r \epsilon_0 \\ \mu_0 \rightarrow \mu_r \mu_0 \approx \mu_0 \end{cases} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n} \quad \text{con: } n = \sqrt{\epsilon_r} (= c/v) = \text{índice de refracción}$$

Ejemplo: el vidrio de las ventanas tiene  $\epsilon_r = 2.25$ . ¿Con qué velocidad se propaga la luz?

## La frecuencia de la luz es constante

El producto de longitud de onda y frecuencia es la velocidad de propagación:  $\lambda f = v$

Veremos que, al cambiar de medio varía la velocidad de propagación, pero no puede variar la frecuencia. Es decir:  $f = \text{const}$  ( $\omega = \text{const}$ ), y si varía el índice de refracción  $n$  (cambio de medio), **tiene que variar la longitud de onda**. Por esta razón, aunque sea usual hablar de luz monocromática en términos de su longitud de onda, hay que recordar que la longitud de onda es distinta en cada medio. En concreto: especificaremos siempre la longitud de onda en el vacío; cuando decimos que la luz verde tiene una longitud de onda de 500 nm, esto vale en el vacío (o en aire, para el que se ha, aproximadamente,  $\epsilon_r = \mu_r = 1$ ), en el que  $\lambda_{vac} f = c$ .

Por el contrario, siendo a longitud de onda dentro de un medio dada por  $\lambda_{medio} f = v$ , se ha:

$$\lambda_{medio} = \frac{v}{f} = \left(\frac{c}{n}\right) / f = \frac{1}{n} \frac{c}{f} = \frac{\lambda_{vac}}{n} \quad \text{En conclusión:}$$

1) La frecuencia de la luz no varía al pasar de un medio a otro.

2) Cuando hablamos de luz de cierta longitud de onda, nos referimos a la longitud de onda en el vacío

$$\lambda_{vac} = \frac{c}{f}$$

$$\lambda_{medio} = \frac{\lambda_{vac}}{n}$$

 1-5, 1-6

Asimismo, se demuestra que el campo magnético y la irradiancia en un medio de índice de refracción  $n$  están dados por:

$$B_0 = \frac{E_0}{v_f} = n \frac{E_0}{c} \quad \text{y}$$

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2\mu_0 v_f} E_0^2$$

# Números complejos: una herramienta útil

## Un "juego" matemático muy útil

Sabemos que la solución de  $ax^2 + bx + c = 0$  es  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ . Esta solución funciona si  $b^2 - 4ac \geq 0$ , porque si no, no sabemos sacar la raíz. P. ej. para las ecuaciones  $\frac{1}{2}x^2 - x + 1 = 0$ , o  $x^2 + 4 = 0$  no existe solución. Aún así, "formalmente" se podrían aceptar las soluciones simbólicas  $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-1}$  o  $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{-1}$ , ya que p.ej.:  $x = 2\sqrt{-1} \Rightarrow x^2 = 4\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = 4\sqrt{(-1) \cdot (-1)} = 4\sqrt{1} = 4$  e igualmente  $x_1 = 1 + \sqrt{-1} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-1})^2 = \frac{1}{2}(1^2 + (\sqrt{-1})^2 + 2\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}(1 - 1 + 2\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}$  (así que efectivamente es  $\frac{1}{2}x_1^2 - x_1 + 1 = 0$ ). **Se utiliza el símbolo  $i$  para indicar  $\sqrt{-1}$**

Si aceptamos como válidos números de la forma  $a + ib = a + b\sqrt{-1}$ , entonces el problema que con números reales  $x^2 + 1 = 0$  no tenía solución, ahora sí la tiene: estamos preguntando si existe un número  $a + ib$  tal que  $(a + ib)^2 = -1 = -1 + 0i$  (de hecho hay dos,  $+i$  y  $-i$ )

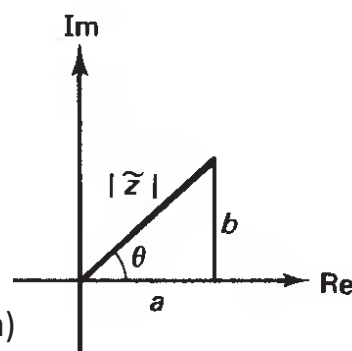
Un número de la forma  $z = a + ib$ , con  $i = \sqrt{-1}$  (o  $i^2 = -1$ ) se llama

**número complejo :**

$$z = a + ib$$

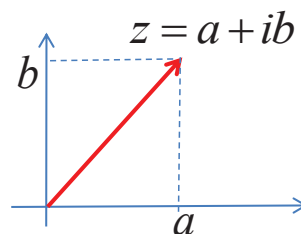
$a = \text{Re}\{z\}$   
parte "real" de  $z$

$b = \text{Im}\{z\}$   
parte "imaginaria" de  $z$



$z$  se puede representar como vector 2D en el "plano complejo" (tal como un número real se puede representar como punto de una recta) También se puede pensar y definir  $z$  como el par ordenado  $(a, b)$

Del (vector o par ordenado)  $z$  podemos definir el módulo  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  y la dirección:  $\hat{z} = \frac{z}{|z|} = \frac{a + ib}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \theta + i \sin \theta$



Dado el número complejo  $z = a + ib$ , se define su "conjugado" como:  $z^* = a - ib$

la representación gráfica de  $z$  se llama "fasor"

Dos números complejos se pueden sumar y multiplicar:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \quad (i^2 = -1)$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

Podemos entonces también elevar a potencia y sacar raíces (en este último caso la operación no es unívoca (p.ej., existen 2 raíces complejas de  $-1$ , como existen dos soluciones reales de  $x^2 = 9$ ). Además podemos definir funciones. La única que nos hará falta es la

**función exponencial compleja:**  $e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib}$

1-14, 1-15

Si  $z$  es real ( $b=0, z=a$ ), esto es igual a la exponencial real  $e^a$ . Para  $z$  imaginario ( $a=0, z=ib$ ) vale la

**identidad de Euler:**  $e^{ib} = \cos b + i \sin b$

**Cálculo de  $\cos(2\omega)$  y  $\sin(2\omega)$ , 1-16**

La identidad de Euler es una relación sorprendente entre exponencial (complejo) y funciones sinusoidales. Para demostrarla, escribimos  $q = \cos b + i \sin b$  y derivamos respecto del ángulo  $b$ :

$$\frac{dq}{db} = -\sin b + i \cos b = i(\cos b + i \sin b) = iq, \text{ o sea: } \frac{dq}{q} = idb. \text{ Integrando pues: } q = e^{ib}$$

Esto implica que un número complejo puede escribirse como  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|e^{i\theta}$

Un número complejo de módulo 1, de la forma  $\hat{z} = e^{i\theta}$ , es una "dirección" en el plano complejo

# Utilidad de la exponencial compleja

## - Resolución de ecuaciones diferenciales (oscilaciones y ondas)

En mecánica y electromagnetismo hallamos ecuaciones diferenciales lineales como por ejemplo  $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ . Buscamos soluciones de la forma  $x(t) = Ae^{\kappa t}$  ( $\rightarrow \dot{x}(t) = A\kappa e^{\kappa t}$ ,  $\ddot{x}(t) = A\kappa^2 e^{\kappa t}$ )

Substituyendo en la ecuación diferencial se ha:  $Ae^{\kappa t} \kappa^2 + 2\gamma Ae^{\kappa t} \kappa + \omega_0^2 Ae^{\kappa t} = 0$ . Tachando  $Ae^{\kappa t}$  obtenemos:  $\kappa^2 + 2\gamma\kappa + \omega_0^2 = 0$ , cuyas soluciones para  $\kappa$  son:  $\kappa_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm \beta$

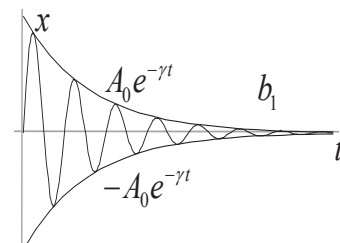
Si  $\gamma > \omega_0$ :  $\beta$  es real; se tiene la solución "sobre-amortiguada":  $x(t) = A_1 e^{-(\gamma-\beta)t} + A_2 e^{-(\gamma+\beta)t}$

Si  $\gamma < \omega_0$ :  $\beta$  es imaginario; poniendo  $\beta = i\omega$  encontramos:

$$x_1(t) = A_1 e^{-(\gamma-i\omega)t} = A_1 e^{-\gamma t} e^{i\omega t} = A_1 e^{-\gamma t} (\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

Tomando la parte real de esta solución compleja, se obtiene

una solución oscilatoria ("sub-amortiguada"):  $x_1(t) = A_1 e^{-\gamma t} \cos \omega t \rightarrow$



## - Cálculos con cosenos y senos, superposición de ondas

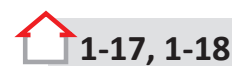
Ejemplos: determinación de fórmulas trigonométricas (ej.:  $\cos(\alpha+\beta)$ ,  $\sin(\alpha+\beta)$ , ...)

Otro ejemplo: calcula el valor de la suma:  $\cos\theta + \cos(\theta + \alpha)$ . (podría ser la suma de dos ondas)

Con la notación compleja, esta cantidad es la parte real de  $\psi = \exp(i\theta) + \exp[i(\theta+\alpha)]$ . Se tiene:

$$\tilde{\psi} = \exp(i\theta) + \exp[i(\theta + \alpha)] = \exp(i\theta)[1 + \exp(i\alpha)] = \exp(i\theta) \exp(i\alpha/2)[\exp(-i\alpha/2) + \exp(i\alpha/2)] = \exp[i(\theta + \alpha/2)] 2 \cos(\alpha/2).$$

Por tanto:  $\cos\theta + \cos(\theta + \alpha) = \text{Re}[\psi] = 2\cos(\alpha/2)\cos(\alpha/2 + \theta)$



## - Potencias no enteras de un número complejo (p. ej., la raíz cuadrada)

$$\sqrt{a+ib} = (a+ib)^{1/2} = (|z|e^{i\theta})^{1/2} = |z|^{1/2} e^{i\theta/2} = \sqrt{|z|} [\cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2)]$$

# Notación compleja de las ondas: ondas planas

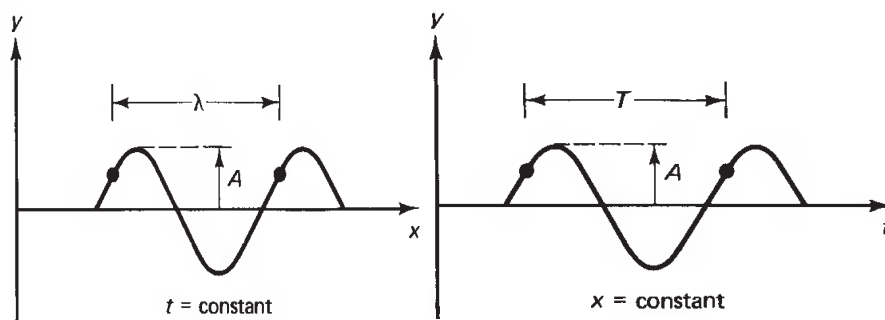
Como sabéis de la mecánica, una onda plana monocromática que se propaga en la dirección positiva del eje x se escribe:

$$y(x,t) = A \cos(kx - \omega t + \varphi_0)$$

$\lambda$  = periodicidad espacial

$T$  = periodicidad temporal

con:  $\lambda / T = \lambda f = v_{\text{propagación}}$



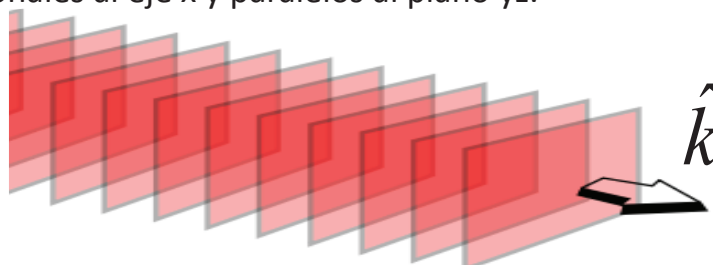
En notación compleja, esto es:

$$y(x,t) = A \text{Re}\{\exp[i(kx - \omega t + \varphi_0)]\}$$

Siendo  $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ , la parte real de una onda compleja no cambia si el exponente (fase total) cambia de signo. **Por convención se pone siempre el signo - delante de  $\omega$**

Se define FRENTE de ONDA un plano en el que la oscilación del campo E está en fase en todo punto del plano. Por ejemplo, para una onda plana que se propaga en la dirección positiva del eje x, los frentes de onda son planos ortogonales al eje x y paralelos al plano yz.

En general, para una onda que se propaga en una dirección  $\hat{k}$  cualquiera en el espacio, los frentes de onda son planos ortogonales a  $\hat{k}$ :





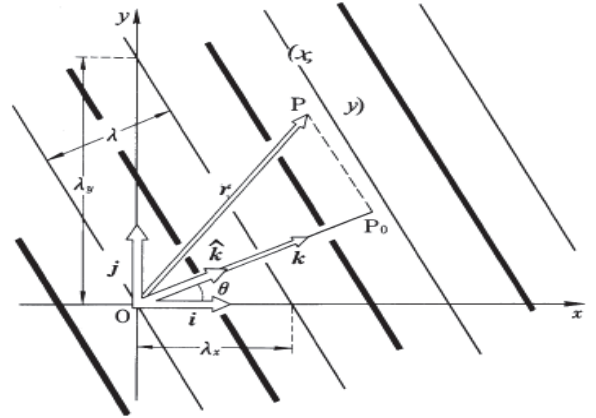
# Onda plana en dirección cualquiera

Para una onda plana que se propaga en la dirección  $\hat{k}$ , los frentes de onda son planos ortogonales a  $\hat{k}$ ; en 2D son rectas ortogonales a  $\hat{k}$  (dibujo). En el caso más simple (2D) un punto P de la onda de coordenadas  $\vec{r} = (x,y)$  tiene la misma fase que el punto  $P_0$  que está sobre la recta que sale del origen en dirección  $\hat{k}$ .

Si  $\varphi_0$  es la fase en el origen, la fase en  $P_0$  (y de P y de cualquier otro punto sobre la recta que pasa por P

paralela a los frentes de onda) es:  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \overline{OP_0} + \varphi_0$

siendo  $\lambda$  la longitud de onda. El segmento  $\overline{OP_0}$  es la proyección de  $\vec{r}$  sobre  $\hat{k}$ , y puede escribirse como producto escalar entre estos dos vectores. Así:



$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0 = \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0$$

Aquí se ha definido el **vector de onda**:

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{k}$$

⇒ El campo óptico de una onda plana es pues (la parte real de):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0)]$$

**onda plana**

La dirección de  $\vec{E}_0$  se llama dirección de polarización. La onda se propaga con velocidad  $v_f = \omega/k$  (dicha "de fase"), siendo  $k$  el módulo del vector de onda

**IMPORTANTE:** Para calcular la **irradiancia**, hay que tomar la **parte real de E antes de elevar al cuadrado**, ya que:  $\text{Re}\{z^2\} \neq (\text{Re}\{z\})^2$

1-20



1-19, 1-22

## Ondas esféricas

Una fuente puntual genera una onda esférica. Cualquier fuente puede considerarse formada por un conjunto de fuentes puntuales ⇒ las ondas esféricas juegan un papel importante en óptica

Consideremos una fuente puntual que oscila de forma armónica, proporcional a  $e^{-i\omega t}$

La onda tarda un tiempo  $r/c$  en llegar a una superficie esférica de radio  $r$  alrededor de la fuente.

La fase en todo punto de la superficie esférica al instante  $t$  es la misma que la de la fuente al tiempo  $t - r/c$ , y la intensidad es la misma en cada punto de la esfera. El módulo del campo  $\vec{E}$  en cada punto de la esfera es:  $E(r, t) = E(r) \exp[-i\omega(t - r/c)] = E(r) \exp[i(kr - \omega t)]$

Aquí hemos utilizado el módulo del vector de onda:  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$

Para determinar el valor de  $E(r)$ . Para ello, consideremos la potencia  $W$  emitida por la fuente.

Por la conservación de la energía, la potencia que atraviesa una esfera alrededor de la fuente es

independiente del radio:  $\wp = 4\pi r^2 \mathfrak{I}(r) = 4\pi r^2 \frac{1}{2\mu_0 c} [E(r)]^2$ . Por tanto  $E(r) = E_1/r$ , siendo  $E_1$  el

módulo del campo óptico a una distancia de 1 metro de la fuente:  $E_1 = \sqrt{\wp \frac{2\mu_0 c}{4\pi(1^2)}} = \sqrt{60\wp}$



$$E(r, t) = \frac{E_1}{r} \exp[i(kr - \omega t + \varphi_0)]$$

**onda esférica**

No hemos especificado la dirección del campo  $\vec{E}$ , pero a menudo no hace falta. Una fuente puntual como un filamento pequeño (a distancia suficiente) **no tiene coherencia temporal**: la fase y la polarización de la luz emitida varían rápidamente (en un tiempo inferior a  $10^{-9}$  s), así que no tiene sentido hablar de una dirección de polarización (hay fuentes puntuales coherentes, p. ej. antenas pequeñas, como veremos en detalle más adelante)

1-23

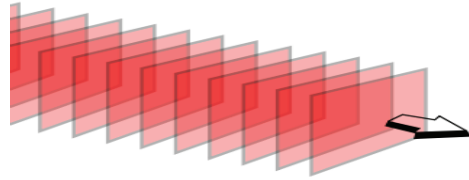


1-24, 1-25

# Frentes de onda planos, circulares y esféricos

## Onda armónica plana

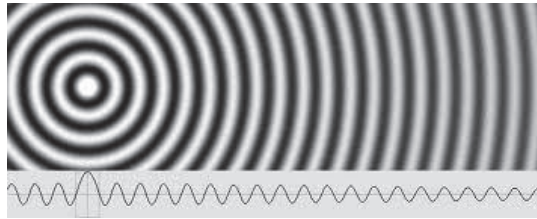
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0)]$$



## Onda armónica circular (o cilíndrica)

$$E(R, t) = \frac{E_1}{\sqrt{R}} \exp[i(kR - \omega t + \varphi_0)]$$

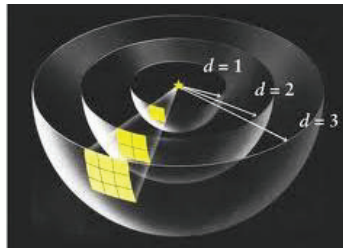
$R$  = distancia axial (2D)



## Onda armónica esférica

$$E(r, t) = \frac{E_1}{r} \exp[i(kr - \omega t + \varphi_0)]$$

$r$  = distancia radial (3D)



Una ventaja de la notación compleja: En el exponencial complejo de una onda armónica, no hace falta poner explícitamente la fase inicial, porque se puede englobarla en la amplitud. P. ej.:

$$E_0 e^{i(kx - \omega t + \varphi_0)} = E_0 e^{i\varphi_0} e^{i(kx - \omega t)} = \tilde{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}, \text{ donde } \tilde{E}_0 = E_0 e^{i\varphi_0} \text{ es la amplitud compleja de la onda}$$

Importante : para calcular la **irradiancia**, siempre hay que hacerlo a partir del campo **E real**

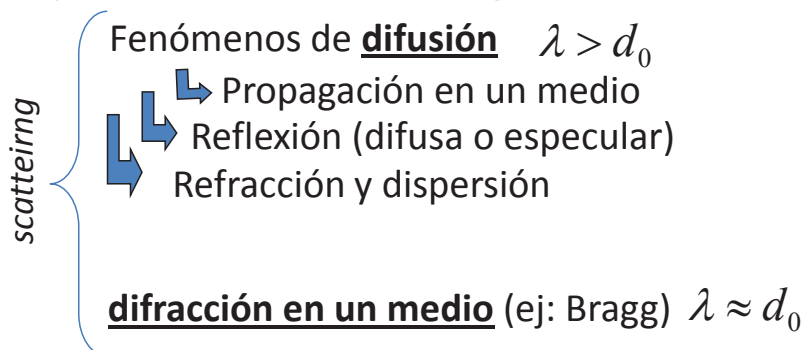
## Fenómenos ópticos

Propagación (y “difracción”) en el vacío ( $\leftrightarrow$  ecuación de onda)  
ensanchamiento del frente de onda, ondas esféricas, casos límite de las ondas planas y rayos

Interferencia ( $\leftrightarrow$  ec. de onda: suma de campos E y B)  
(superposición de ondas, batidos, ondas estacionarias)

Interacción con la materia :

- Emisión (fuentes de radiación)
- Absorción (espectroscopia, detectores)
- Esparcimiento (scattering)



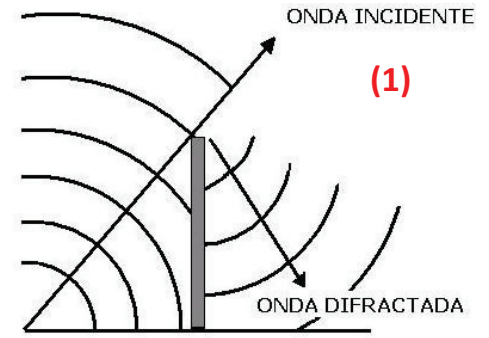
(traducción de “scattering”: esparcimiento, dispersión o difracción)

# Difracción (ver también tema 4)

Los fenómenos fundamentales de las ondas en el vacío son la *interferencia* y la *difracción*.

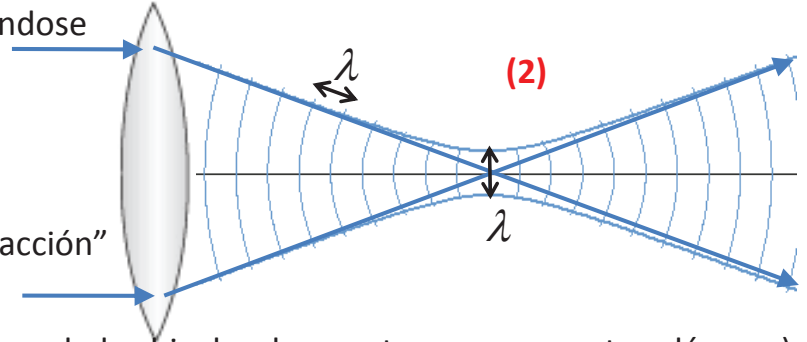
Ocurre difracción cuando una región del frente de onda se obstruye de alguna manera o se altera en forma (amplitud y/o fase). El término se utiliza en al menos tres contextos:

(1) cuando la onda interactúa con medios materiales que bloquean parcialmente su paso. Ej: olas del mar cerca de rompeolas; sonido; ondas radio cerca de colinas o edificios



(2) cuando una onda se propaga ensanchándose (incluso en el espacio vacío) :

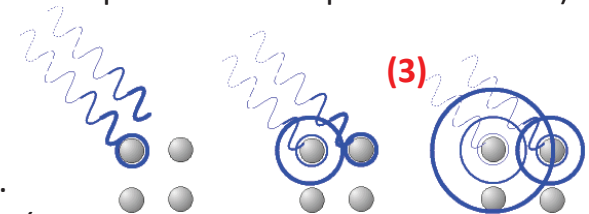
→ no se puede focalizar un haz de luz a un punto: existe un tamaño mínimo de una onda, dado aproximativamente por la longitud de onda → "límite de difracción"



→ hasta un haz láser se ensancha

(pensad en la cara verde de un futbolista cuando los hinchas le apuntan con un puntero láser ...)

(3) cuando la longitud de onda de la luz es comparable con el tamaño de los componentes (átomos/moléculas, pero también dominios o granos) del material con que interactúa (es el equivalente ondulatorio de un choque). Difracción de rayos X → información estructura/morfología



## Interferencia

INTERFERENCIA = superposición de ondas → suma vectorial de E (y B)

1-29

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow \mathcal{I} \propto \langle |\vec{E}|^2 \rangle = \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle = \underbrace{\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1 \rangle}_{\mathcal{I}_1} + \underbrace{\langle \vec{E}_2 \cdot \vec{E}_2 \rangle}_{\mathcal{I}_2} + 2 \underbrace{\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle}_{\text{TÉRMINO DE INTERFERENCIA (correlación entre 1 y 2)}}$$

INTERFERENCIA   
 ↙ 1) ESPACIAL misma frecuencia   
 ↘ 2) TEMPORAL frecuencia diferente

CASO 1(a) (ejemplo más simple de interferencia espacial): **ONDAS ESTACIONARIAS**

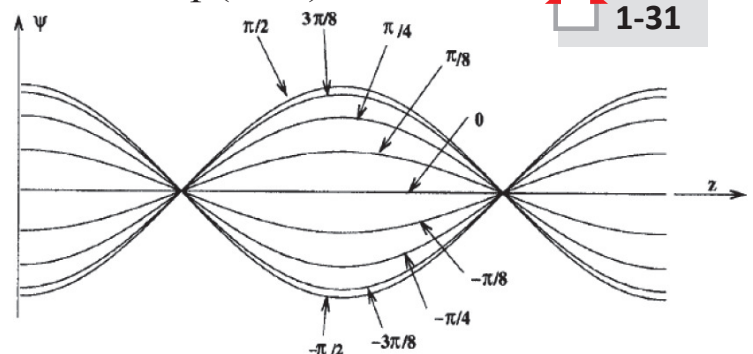
Cuando dos ondas de la misma frecuencia se propagan en direcciones opuestas, se obtiene una onda estacionaria. Si 2 ondas de la misma amplitud se propagan una en la dirección positiva del eje z (+z), y la otra en -z, su suma es:  $\psi = A \cos(kz - \omega t) + A \cos(-kz - \omega t)$

Con la ayuda de la notación compleja se ve que la onda resultante tiene la expresión:

1-30

$$\tilde{\psi} = A \exp(-i\omega t) [\exp(-ikz) + \exp(ikz)] = 2A \cos kz \exp(-i\omega t)$$

Mientras las ondas iniciales tienen amplitud A, su suma (que es una onda estacionaria y no depende de z - vt) tiene una amplitud dependiente de la posición  $2A \cos kz$ . En la figura se ven "instantáneas" de la onda estacionaria, en instantes separados por intervalos de tiempo de 1/16 del periodo:



1-31

# Reflexión, ondas estacionarias, modos de luz

Ondas electromagnéticas estacionarias se dan cerca de superficies reflectoras (p. ej. un espejo): si una onda incide, quedará al menos parcialmente reflejada en el mismo medio desde el que incide y se sumará a la onda incidente dando lugar a ondas estacionarias.



Un caso particular de onda estacionaria ocurre cuando se ponen dos espejos planos paralelo el uno al otro y con las caras mirándose. **La configuración de 2 espejo paralelos es tan importante en óptica que tiene nombre propio: se le llama cavidad Fabry-Perot**. Además de tener otras aplicaciones en interferometría y espectroscopia, es un elemento constitutivo del láser.

La luz entre los espejos paralelos es reflejada muchas veces ante de perder intensidad debido a la atenuación en aire o a la imperfección de los espejos. En general, para una dada frecuencia de la onda e.m., la superposición de todas estas ondas de la misma frecuencia pero fase distinta será destructiva: en cada punto llegan ondas con fase arbitraria que se anulan mutuamente. Una onda de dicha frecuencia simplemente NO puede existir entre los dos espejos. Si por otro lado la separación  $L$  entre los espejos es igual a un múltiplo de mitad longitud de onda, las ondas reflejadas se solapan perfectamente a la onda inicial; la frecuencia correspondiente sí puede propagarse. El caso de espejos metálicos, el campo eléctrico dentro de un metal tiene que ser nulo; esto implica que  $E$  es cero en la superficie de los 2 espejos:  $E = 0$  para  $z = 0$  y  $z = L$ . Las únicas ondas estacionarias armónicas que cumplen esta condición se escriben :

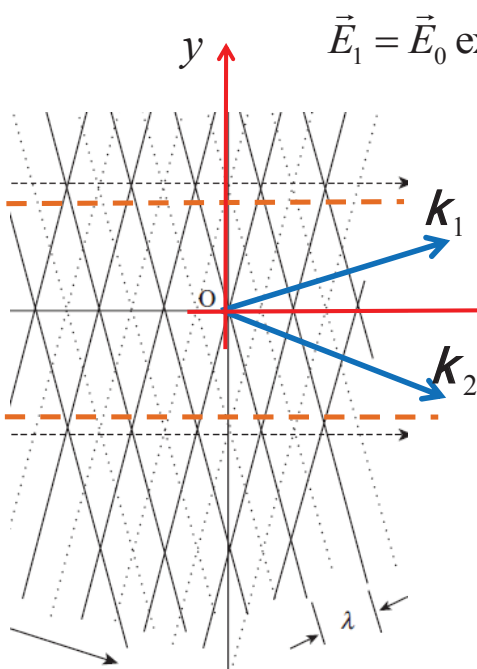
$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 \sin(k_n z) e^{-i\omega_n t}, \text{ con } L = n \frac{\lambda}{2} \Rightarrow k_n = n \frac{\pi}{L}, \omega_n = ck_n$$



Las ondas estacionarias que pueden darse en una cavidad se llaman **MODOS de la cavidad**

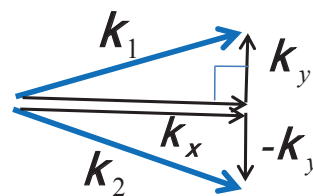
## Interferencia de 2 ondas con ángulo relativo

CASO 1(b): dos ondas planas de igual frecuencia y polarización, pero distinta dirección:



$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 \exp[i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)] , \vec{E}_2 = \vec{E}_0 \exp[i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)]$$

Con el sistema de referencia dibujado, las componentes  $x$  de los vectores de onda son iguales, y las componentes  $y$  son opuestas:



El campo total  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  vale:

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 \left( e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} + e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)} \right) &= \vec{E}_0 e^{i(k_x x - \omega t)} \left( e^{ik_y y} + e^{-ik_y y} \right) \\ \Rightarrow \vec{E} &= 2\vec{E}_0 \cos(k_y y) e^{i(k_x x - \omega t)} \end{aligned}$$



La amplitud depende solo de la coordenada  $y$ , no depende del tiempo, y se anula en todo punto  $\vec{r}$  en el que se cumple la condición:  $k_y y = \pi(n + 1/2)$

Tales puntos forman una especie de onda estacionaria, pero sólo en la dirección  $y$ : esto se conoce como **franjas de interferencia**. La existencia del patrón de interferencia depende de que haya una componente antiparalela de los vectores  $\mathbf{k}$

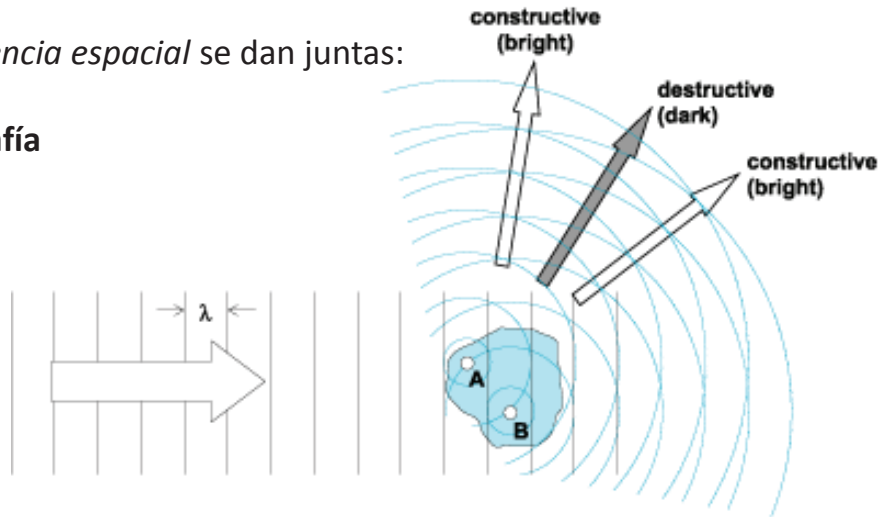


# Difracción e interferencia

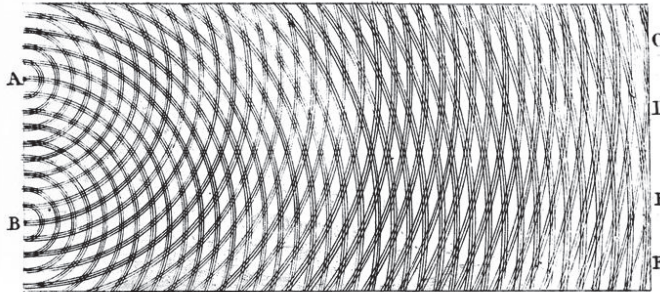
Son los fenómenos fundamentales de las ondas. La difracción (o esparcimiento) es de hecho la base de muchos fenómenos macroscópicos, como reflexión, refracción y difusión

Muchas veces *difracción e interferencia espacial* se dan juntas:

→ **difracción de Bragg y cristalografía**



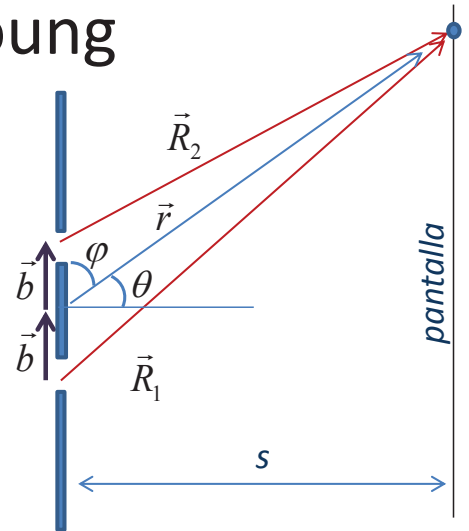
→ **experimento de Young (naturaleza ondulatoria de la luz)**



Veremos en el TEMA 5 que **para describir algunos fenómenos como el del experimento de Young, es suficiente calcular una transformada de Fourier (en 2D)**

## \*El experimento de Young

En 1801 Young demostró la naturaleza ondulatoria de la luz. El experimento "tipo" es así: un haz de luz colimado y monocromático (onda plana armónica) incide sobre dos rendijas delgadas (o dos agujeros pequeños) en una pared. En cada rendija (agujero) se genera una onda cilíndrica (resp. esférica), idénticas y en fase la una con la otra. Las dos ondas crean un patrono de interferencia en una pantalla detrás de la pared. En un punto P de la pantalla, la intensidad de las ondas es casi constante, mientras que hay una diferencia de fase entre ambas, debido a la diferente distancias recorridas por las dos ondas hasta la pantalla. El campo óptico total vale:



$$E_{tot} = E_1 + E_2 = \frac{E_0}{\sqrt{R_1}} e^{i(kR_1 - \omega t + \phi_0)} + \frac{E_0}{\sqrt{R_2}} e^{i(kR_2 - \omega t + \phi_0)} \approx \frac{E_0}{\sqrt{R}} e^{i(-\omega t + \phi_0)} (e^{ikR_1} + e^{ikR_2}). \text{ De la figura se tiene:}$$

$$\vec{R}_1 = \vec{r} + \vec{b}, \vec{R}_2 = \vec{r} - \vec{b} \quad \text{Así:} \quad R_{1,2} = \sqrt{(\vec{r} \pm \vec{b}) \cdot (\vec{r} \pm \vec{b})} = \sqrt{r^2 + b^2 \pm 2\vec{r} \cdot \vec{b}} = r \left( 1 \pm 2 \frac{\hat{r} \cdot \vec{b}}{r} + \frac{b^2}{r^2} \right)^{1/2}$$

$$\text{Al 1º orden en } b \text{ (expansión de Taylor):} \quad R_{1,2} = r \left( 1 \pm \frac{1}{2} 2 \frac{\hat{r} \cdot \vec{b}}{r} \right) = r \pm \hat{r} \cdot \vec{b} = r \pm b \cos \varphi = r \pm b \sin \theta$$

$$\text{Hallamos así:} \quad E_{tot} \approx \frac{E_0}{\sqrt{R}} e^{i(-\omega t + \phi_0)} (e^{i(kr + kb \sin \theta)} + e^{i(kr - kb \sin \theta)}) = 2 \frac{E_0}{\sqrt{R}} e^{i(kr - \omega t + \phi_0)} \cos(kb \sin \theta)$$

La irradiancia es el promedio temporal del cuadrado de la parte real de  $E_{tot}$ . Con  $\mathfrak{I}_0 = \frac{E_0^2}{2}$ , se ha:

$$\mathfrak{I}_{tot} = \frac{4I_0}{R} \cos^2(kb \sin \theta) = \frac{4I_0}{R} \cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} b \sin \theta\right) = \frac{4I_0}{R} \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta\right) \quad (d = 2b = \text{separación entre rendijas})$$



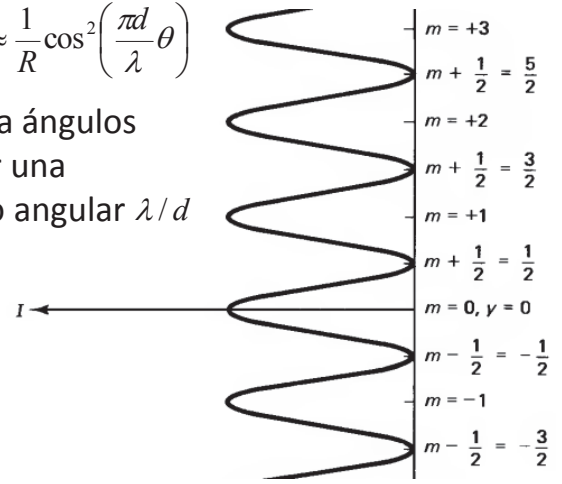
# \* Patrono de interferencia de Young

El patrono de difracción de Young es:  $\mathfrak{I}_{tot} \propto \frac{1}{R} \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta\right) \approx \frac{1}{R} \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \theta\right)$

En el último paso se ha utilizado la aproximación, válida para ángulos pequeños, que  $\sin \theta \approx \theta$ . El patrono de difracción es  $1/R$  por una modulación periódica (sinoidal) de la intensidad, de período angular  $\lambda/d$  (la función  $\cos^2$  tiene periodo de  $\pi$ , no  $2\pi$ )

En función de la coordenada  $y$  a lo largo de la pantalla, bajo la aproximación en que  $\sin \theta \approx \theta \approx \tan \theta = \frac{y}{s}$ , el patrono es (a parte el término  $1/R$ ):

$$\mathfrak{I}_{tot} \approx 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda s} y\right)$$



La periodicidad espacial del patrono para ángulos pequeños, o sea la distancia entre dos franjas de interferencia (máximos de irradiancia) es por lo tanto:  $\Delta y \approx \lambda \frac{s}{d}$

Esta ecuación permite calcular la longitud de onda de la luz a partir de un experimento simple

## Example

Light from a narrow slit passes through two identical and parallel slits, 0.2 mm apart. Interference fringes are seen on a screen 1 m away, with a separation of 3.29 mm. How does the irradiance at the screen vary, if the contribution of one slit alone is  $I_0$ ? What is the wavelength of the light?

$$I = 4I_0 \cos^2 [\pi a y / \lambda s]. \text{ In this case, } I = 4I_0 \cos^2 [\pi (0.0002)y / (658 \times 10^{-9})(1)] = 4I_0 \cos^2 (955y)$$

$$\text{Hence: } \lambda = a \Delta y / s = (0.0002)(3.29 \times 10^{-3}) / 1 = 658 \text{ nm}$$

## Interferencia temporal

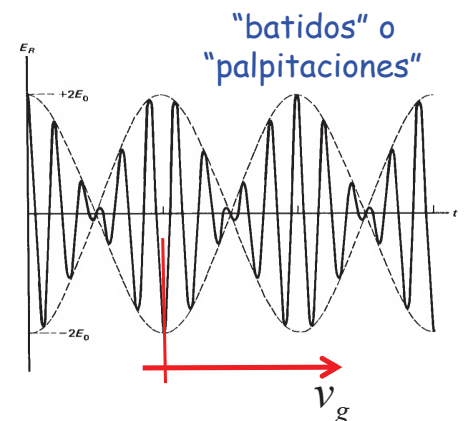
CASO (2): suma de 2 ondas de distinta frecuencia, de pulsación  $\omega + \Delta\omega$  y  $\omega - \Delta\omega$ , ambas de la misma amplitud  $a$ . El patrono de interferencia (suma) es:

$$ae^{i[(\omega+\Delta\omega)t-(k+\Delta k)x]} + ae^{i[(\omega-\Delta\omega)t-(k-\Delta k)x]} = ae^{i\omega t - kx} (e^{i[(\Delta\omega)t-(\Delta k)x]} + e^{-i[(\Delta\omega)t-(\Delta k)x]}) = 2iae^{i\omega t - kx} \cos(\Delta\omega t + \Delta k x)$$

La parte real vale:  $-2a \cos(\Delta\omega t - \Delta k x) \sin(\omega t - kx)$

La resultante es una onda de frecuencia  $\omega$  con una modulación sinusoidal de la amplitud, como en el fenómeno de los batidos  $\rightarrow$  Una onda monocromática de frecuencia  $\omega$  se propaga a la velocidad  $v = \omega/k = c$ . La modulación tipo "batidos", o sea la modulación de amplitud  $\cos(\Delta\omega t - \Delta k x)$ , se mueve con velocidad  $v_g = \Delta\omega / \Delta k$ , o en el límite  $\Delta\omega \rightarrow 0$ :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad \text{Velocidad de grupo}$$



No existen ondas armónicas infinitas: las ondas reales siempre están limitadas en el tiempo, es decir, tienen un ancho de banda no nulo. Toda onda e.m. es un "paquete" de ondas de distinta frecuencia, que no se propaga a la "velocidad de fase"  $v_f = \omega/k = c/n$ , sino con velocidad

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv_f)}{dk} = v_f + k \frac{d(v_f)}{dk} = v_f + kc \frac{dn}{dk}$$

En el espacio vacío, la velocidad de fase (o  $n$ ) no depende de  $k \Rightarrow$  la velocidad de grupo es igual a la de fase. (Sin embargo, veremos que en un material la velocidad de fase sí depende de la frecuencia: ondas de frecuencia distinta se propagan con diferente velocidad, por lo que  $v_g \neq v_f$ )

# Trasformada de Fourier (temporal)

Se puede hacer algo parecido a la análisis de Fourier también con una función no periódica (si es finita y limitada): una tal función resulta en general de la suma de un conjunto continuo de frecuencias, que no son múltiplos de una frecuencia fundamental. La generalización de la serie de Fourier al caso continuo es la TRASFOMADA de FOURIER.

La transformada de Fourier de una función (pulso)  $f(t)$  se define como:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t) dt \quad \text{("espectro de frecuencia" o "de pulsación")}$$

*Interpretación:* las componentes en frecuencia de una onda oscilan con períodos distintos.

Supongamos que la onda sea la suma de componentes de frecuencia  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ :

$$f(t) = A + Be^{-i\omega_1 t} + Ce^{-i\omega_2 t} + De^{-i\omega_3 t} + \dots$$

Si multiplicamos la onda por el factor  $\exp(i\omega_1 t)$ , la componente a frecuencia  $\omega_1$  (y sólo ella) "deja de oscilar", de forma que cuando integramos en el tiempo (que es como promediar en el tiempo), sólo esta componente da una contribución distinta de cero mientras las demás, que siguen oscilando, dan una contribución promedia nula. La integración que define la amplitud  $F(\omega)$  a la pulsación  $\omega$  es equivalente a seleccionar la componente de la onda que oscila a una frecuencia determinada. Así pues, vemos que la función  $F(\omega)$  es distinta de cero cada vez que  $\omega$  es una pulsación "contenida" en el desarrollo de  $f(t) \Rightarrow F(\omega) = \text{espectro complejo de frecuencias de } f(t)$

*NOTA:* Si la función  $f(t)$  es real,  $F(-\omega) = F^*(\omega)$ , y viceversa. Por lo tanto toda la información sobre el espectro de un pulso (real) ya está contenida en la parte de frecuencias positivas.

*NOTA2:* la serie de Fourier se puede considerar como caso especial de transformada de Fourier

## Espectro de potencia

Módulo de  $F(\omega)$  = peso relativo de cada componente de frecuencia

Fase de  $F(\omega)$  = desfaseamiento relativo de cada componente

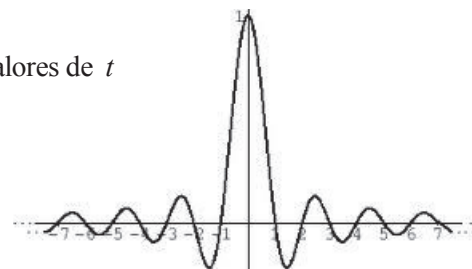
El módulo al cuadrado de  $F(\omega)$  se llama **ESPECTRO DE POTENCIA** y contiene la información espectral más importante:

$$|F(\omega)|^2 = \text{ESPECTRO de POTENCIA}$$

**1-35** Calcula y dibuja el espectro de frecuencias  $P(\omega)$  del pulso  $p(t)$  rectangular dado por:

$$p(t) = \begin{cases} h & \text{para } |t| < \frac{b}{2} \\ 0 & \text{para otros valores de } t \end{cases}$$

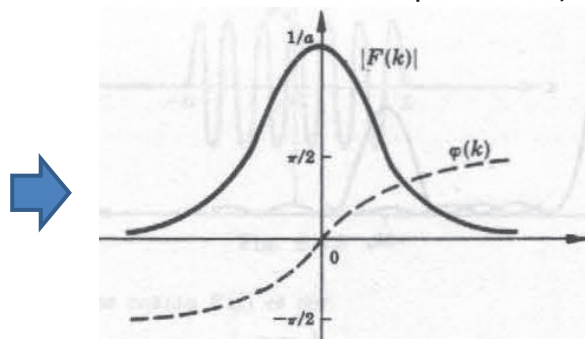
$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} p(t) dt = h \int_{-b/2}^{b/2} e^{i\omega t} dt = \left[ \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} \right]_{-b/2}^{b/2} = hb \operatorname{sinc}(\omega b/2)$$



**1-37** Calcula y dibuja el espectro de  $E(t) = U(t)e^{-at}$  (destello con decaimiento exponencial)

$$F(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{i\omega t} e^{-at} dt = \frac{1}{a - i\omega}$$

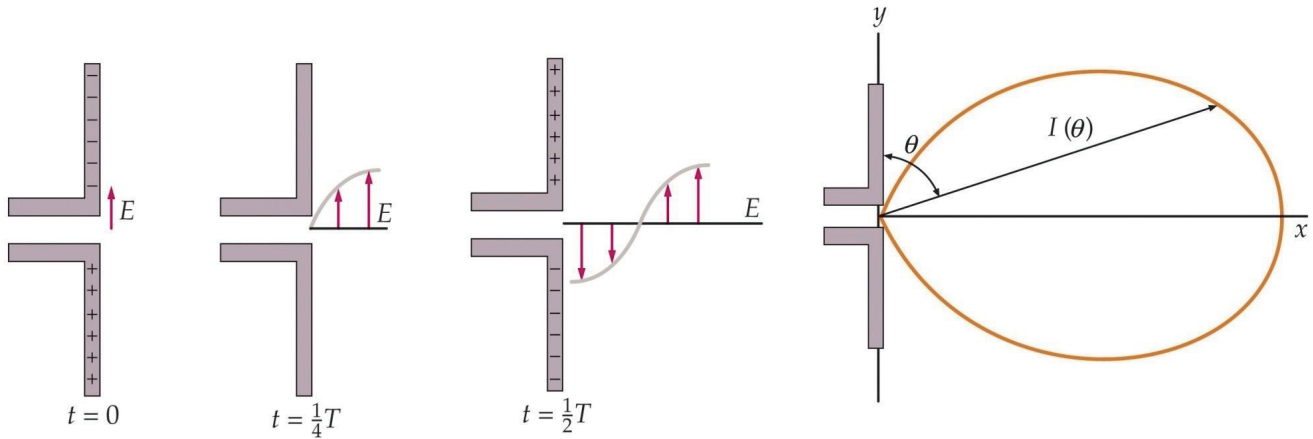
En forma polar:  $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} e^{i \tan^{-1}(\omega/a)}$



# Fuentes "clásicas" de luz: cargas aceleradas

Según las ecuaciones de Maxwell, cualquier carga acelerada genera ondas electromagnéticas. ¿Por qué una carga acelerada genera ondas e.m.? Como corriente variable, genera un campo **B** variable en  $t$ ; como carga que se desplaza, también genera un campo **E** variable en  $t$ .

Ejemplo: una antena de radio.



La onda se «autopropaga» ya que un campo **E** que varía en el tiempo genera un campo magnético (ley de Ampère-Maxwell) y un campo **B** variable genera un campos eléctrico (ley de Faraday)

## \*Descripción de las fuentes clásicas

Según las ecuaciones de Maxwell, cualquier carga acelerada genera ondas electromagnéticas. ¿Por qué una carga acelerada genera ondas e.m.? Como corriente variable, genera un campo **B** variable en  $t$ ; como carga que se desplaza, también genera un campo **E** variable en  $t$ .

En electrostática  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ , que implica que **E** puede escribirse como gradiente de un potencial escalar  $V$ :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V, \text{ con } V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{electrostática}$$

De una forma parecida, la ecuación de Maxwell  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  implica que **B** puede escribirse, en general, como rotacional de un «potencial vector» **A**:  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

En magnetostática se puede demostrar que el potencial **A** está dado por una ecuación parecida a la que define el potencial escalar, pero en función de la corriente en lugar de la carga:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \text{ con } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{magnetostática}$$

Estas ecuaciones valen para cargas y corrientes estacionarias. Para cargas y corrientes variables, la (única) modificación que tenemos que hacer en los potenciales **V** y **A** es considerar que los campos tardan un tiempo en propagarse, ya que lo hacen a la velocidad de la luz, que es muy grande pero finita. El resultado es

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \frac{\rho(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{ondas e.m.}$$

# \* Demostración ecuación para los potenciales

$$\begin{array}{l}
 \text{Ec. de Maxwell} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\
 \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \\
 \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
 \end{array} \right.
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{De la 1ª ecuación se tiene que B puede escribirse como } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \\
 \text{Sustituyendo en la 2ª ecuación se ha: } \vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} V \\
 \rightarrow \text{Tenemos entonces: } \left\{ \begin{array}{l}
 \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \\
 \vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Escribiendo **E** y **B** en función de **A** y **V** en las 2 últimas ecuaciones de Maxwell se obtiene:

$$\begin{array}{l}
 \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \frac{\partial V}{\partial t} \\
 \left. \begin{array}{l}
 \text{Utilizando } \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\vec{\nabla}^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}), \text{ se halla:} \\
 -\vec{\nabla}^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{j} \\
 \text{ec. de Gauss } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla}^2 V - \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{\partial t} = \rho / \epsilon_0 \Rightarrow -\vec{\nabla}^2 V - \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{\partial t} = \rho / \epsilon_0
 \end{array} \right\} \text{ Ecuaciones de onda para los potenciales}
 \end{array}$$

Estas ecuaciones son complicadas, y lo son aún más las ecuaciones para **E** y **B**. Sin embargo, la elección de los potenciales no es unívoca, sino que hay cierta libertad a la hora de elegirlos.

Imponiendo la *condición de Lorentz*:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}$ , las ecuaciones de onda se reducen a:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} V - \nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

, cuyas soluciones son las expresiones al final de la transparencia anterior

## Ecuación fundamental de las fuentes clásicas

Para describir la generación de ondas por cargas/corrientes variables se utiliza la ecuación:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\tau' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Esta es la ecuación fundamental para describir la radiación de ondas e.m. por fuentes clásicas no relativistas, y se usa por ejemplo para calcular el funcionamiento de las antenas.

Onda producida por una corriente oscilante → Lo más fácil es primero sacar el campo **B** como rotacional de **A**, y luego el campo **E** con la ecuación de Faraday (o sea, multiplicando B por c).

El único caso que consideraremos es el de una pequeña antenita de longitud pequeña  $\ell$ , paralela al eje vertical  $\hat{k}$ , que sólo contiene un elemento infinitésimo  $\vec{j} d\tau = I \ell \hat{k}$ . La ecuación para el potencial vector **A** de una antenita centrada en el origen se reduce a la forma simple: (nótese que **A** es paralelo a la corriente):

$$\vec{A}_{\text{antenita}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} I \left( t - \frac{r}{c} \right) \ell \hat{k}$$

Para calcular los campos **E** y **B** de la onda radiada por la antena, calculamos primero  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$r$  aparece 2 veces en **A** ⇒  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  tiene 2 términos: uno disminuye con la distancia como  $\vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{r} \hat{k} \right) \propto \frac{1}{r^2}$ , el otro como  $1/r$ . A grandes distancias del dipolo oscilante domina el segundo,

dado por:

$$\vec{B}_{\text{rad}}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \ell}{4\pi r} \vec{\nabla} \times I \left( t - \frac{r}{c} \right) \hat{k} = \frac{\mu_0 \ell}{4\pi r} \frac{dI \left( t - \frac{r}{c} \right)}{dr} \hat{r} \times \hat{k} = \frac{\mu_0 \ell}{4\pi r} \frac{dI \left( t - \frac{r}{c} \right)}{dr} \sin \theta \hat{\phi}$$

# Dipolo eléctrico oscilante (hertziano)

El campo oscilante  $\vec{B}_{rad}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \ell}{4\pi r} \frac{dI(t-r/c)}{dr} \sin \theta \hat{\phi}$  se llama **campo B de radiación**

Supongamos que la corriente I varia de forma armónica:  $I(t) = \text{Re}\{I_0 e^{-i\omega t}\}$ . Entonces se ha:

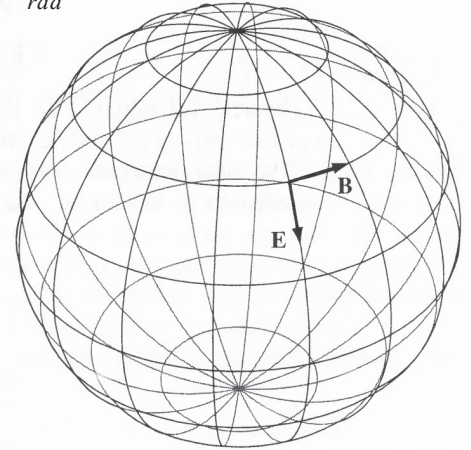
$$I\left(t - \frac{r}{c}\right) = \text{Re}\left\{I_0 \exp\left(-i\omega t + i\frac{\omega r}{c}\right)\right\} \quad \text{y} \quad \frac{dI(t-r/c)}{dr} = \text{Re}\left\{I_0 e^{-i\omega t} \frac{d}{dr} e^{i\frac{\omega r}{c}}\right\} = \text{Re}\left\{I_0 e^{-i\omega t} i\frac{\omega}{c} e^{i\frac{\omega r}{c}}\right\}$$

Por tanto:  $\vec{B}_{rad}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \ell}{4\pi r} \sin \theta \text{Re}\left\{i\frac{\omega}{c} I_0 e^{-i\omega t + i\omega r/c}\right\} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 \ell I_0}{4\pi r} \frac{\omega}{c} \sin \theta \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} r\right) \hat{\phi}$

Esto tiene sentido, ya que es la ecuación de una onda esférica !!! El campo eléctrico de radiación  $\vec{E}_{rad}$  correspondiente se halla de  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , o sea de:  $\vec{E}_{rad} = cB_{rad} \hat{\theta}$

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}, t) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi r} \ell I_0 \omega \sin \theta}_{E_{0rad}(r, \theta)} \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c} r\right) \hat{\theta}$$

**campo E de radiación**



A grandes distancias del dipolo oscilante, **E** y **B** disminuyen pues como  $1/r$ , mucho menos rápido que el campo **B** de una corriente estacionaria ( $1/r^2$ ) o el campo electrostático de un dipolo ( $1/r^3$ ).  
 → Este hecho es en definitiva lo que permite la telecomunicación por ondas e.m. a grandes distancias.

[http://ocw.mit.edu/ans7870/8/8.02T/f04/visualizations/light/02-dipoleRadiationReversing/02-SmPointDipole\\_320.html](http://ocw.mit.edu/ans7870/8/8.02T/f04/visualizations/light/02-dipoleRadiationReversing/02-SmPointDipole_320.html)

## Antenas emisoras de dipolo eléctrico

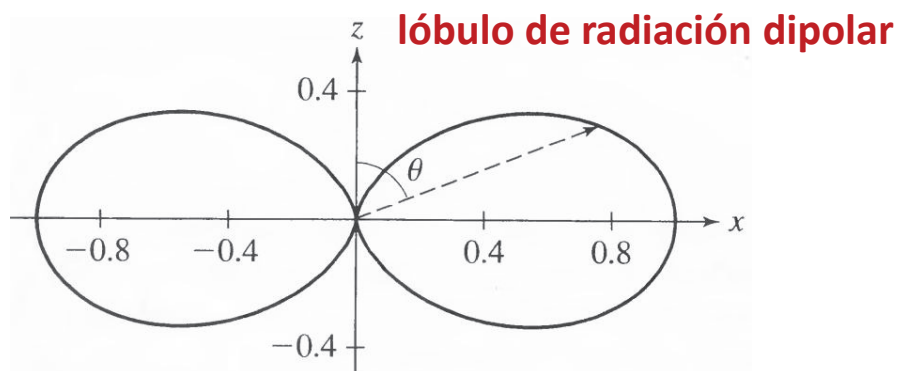
La irradiancia de la antenita es:  $\mathfrak{S} = \frac{1}{2\mu_0 c} E_{0rad}^2 = \frac{1}{2\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0}{4\pi r} \ell I_0 \omega \sin \theta\right)^2 = \frac{\mu_0}{32\pi^2 c} (\ell I_0 \omega)^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} = \mathfrak{S}(r, \theta)$

De la irradiancia sacamos la potencia total por integración:

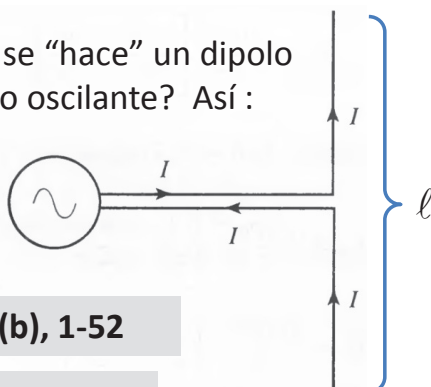
$$\wp = \int_{\text{esfera deradiador}} \mathfrak{S} da = \iint \mathfrak{S}(r, \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$\Rightarrow \wp_{radiada} = \frac{\mu_0}{12\pi c} (I_0 \ell \omega)^2$$

$$\Rightarrow \mathfrak{S} = \frac{3\wp \sin^2 \theta}{8\pi r^2}$$



¿Cómo se "hace" un dipolo eléctrico oscilante? Así:



1-47(b), 1-52

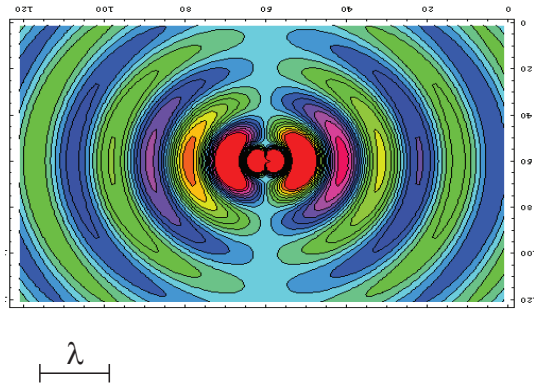
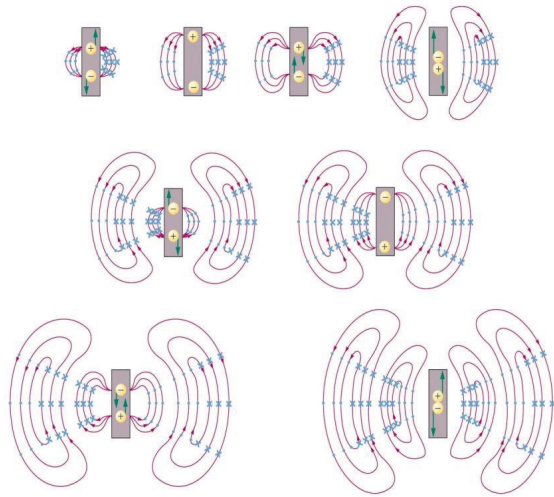
1-50, 1-53

**Antena de media onda.** Hicimos el cálculo para una antena puntual, y el resultado encontrado vale para antenas de longitud  $\ell \ll \lambda$ . Si tenemos en cuenta el tamaño de la antena, resulta que el lóbulo de radiación es casi idéntico al lóbulo dipolar, y que la máxima eficiencia de una antena de dipolo eléctrico que emite a la longitud de onda  $\lambda$  se ha cuando:  $\ell = \lambda/2$

En tal caso la potencia radiada es:  $\wp \approx 36.5 I_0^2$



# Radiación de dipolo eléctrico



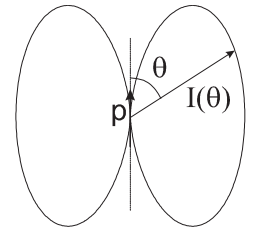
Por qué «dipolo»? Una antena pequeña (“hertziana”) se puede considerar como equivalente a

un dipolo eléctrico oscilante  $\vec{p}(t) = q(t)\vec{\ell}$ , ya que:  $I\vec{\ell} = \frac{dq}{dt}\vec{\ell} = \frac{d(q\vec{\ell})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Poniendo  $\vec{p}(t) = p_0\hat{k}e^{i\omega t}$  se ha  $I(t)\ell\hat{k} = \frac{dq}{dt}\vec{\ell} = \frac{d(q\vec{\ell})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = -i\omega p_0\hat{k}e^{-i\omega t}$  Por tanto:

$$I(t)\ell\hat{k} = I_0e^{-i\omega t}\ell\hat{k} = -i\omega p_0\hat{k}e^{-i\omega t} \Rightarrow |I_0\ell| = |\omega p_0| . \text{ Esto da:}$$

$$\mathcal{P}_{radiada} = \frac{\mu_0}{12\pi c} p_0^2 \omega^4$$



## Resumen antenas emisoras lineales

En las transparencias anteriores se ha demostrado que el patrón de emisión de una antenita pequeña (hertziana) es un lóbulo de radiación dipolar. Resulta que también para una antena de media onda, el patrón de emisión es básicamente el mismo, con una irradiancia proporcional al seno al cuadrado del ángulo acimutal. Por ello, es conveniente reescribir las fórmulas vistas anteriormente en una forma válida tanto para antenas hertzianas como para antenas de media onda, escribiéndolas en función de la potencia emitida. Para un patrón de emisión dipolar, la relación entre potencia e irradiancia (como se ha visto para la antena hertziana) es:

La amplitud correspondiente de campo eléctrico es:

$$\mathfrak{S} = \frac{3\mathcal{P}}{8\pi} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$

$$E_{amplitud} = \sqrt{2\mu_0 c \mathfrak{S}} = \sqrt{2\mu_0 c \frac{3\mathcal{P}}{8\pi} \frac{\sin^2 \theta}{r}} = 3\sqrt{10\mathcal{P}} \frac{\sin \theta}{r} \quad \text{Así pues:}$$

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}, t) \approx 3\sqrt{10\mathcal{P}} \frac{\sin \theta}{r} \sin(\omega t - \frac{\omega}{c}r) \hat{\theta}$$

$$\vec{B}_{rad}(\vec{r}, t) \approx \frac{3}{c} \sqrt{10\mathcal{P}} \frac{\sin \theta}{r} \sin(\omega t - \frac{\omega}{c}r) \hat{\phi}$$

$$\mathfrak{S} = \frac{3\mathcal{P}}{8\pi} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$

con:

$$\mathcal{P}_{antena \text{ media onda}} \approx 36.5 I_0^2$$

$$\ell = \lambda/2$$

$$\mathcal{P}_{antena \text{ hertziana}} = \frac{\mu_0}{12\pi c} (I_0 \ell \omega)^2$$

$$\ell \ll \lambda$$

# Aplicaciones

**Antenas receptoras.** La antena dipolar también se usa como antena receptora. Si la resistencia de la antena es  $R$ , la tensión generada por una onda e.m. entre sus extremos es  $V = E_T L$ , siendo  $L$  la longitud de la antena y  $E_T$  la componente del campo  $E$  de la onda tangente a la antena (el campo magnético de la onda induce una corriente menoscupible)

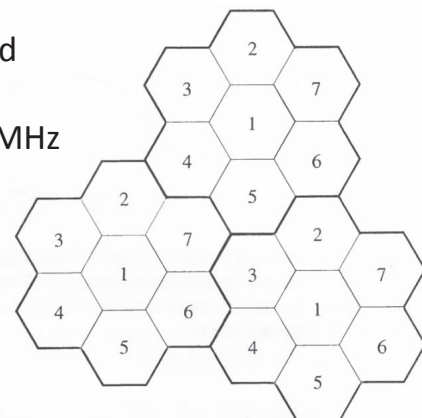
## Radio y telefonía móvil

Para la radio se utiliza modulación de frecuencia (FM) o de amplitud (AM). Para la AM se usa la llamada "banda de onda media" entre 535 y 1705 kHz. Para la FM se usan las frecuencias entre 87 y 108 MHz

<http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Amfm3-en-de.gif>

Los móviles funcionan en dos bandas de frecuencia "ultra-alta" (UHF), una cerca de 800 MHz y otra cerca de 1900 MHz.

Inicialmente se usaba en modo FM, ahora la modulación es digital. Para poder seguir el "desplazamiento" de la antena de un móvil o de un car audio, se tiene que utilizar un conjunto de antenas distribuidas en todo el espacio, que utilizan frecuencias ligeramente distintas

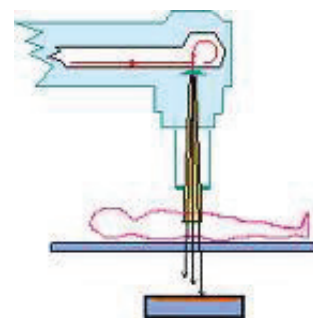
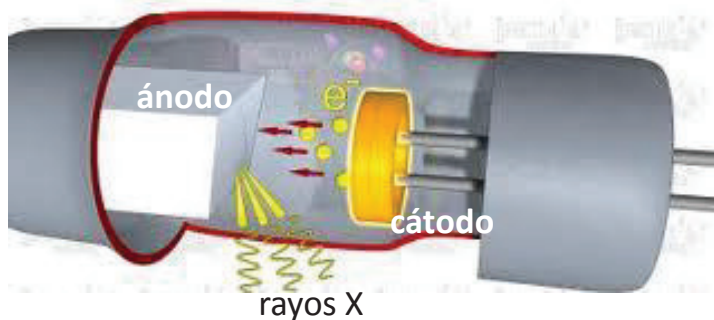


## Horno de microondas

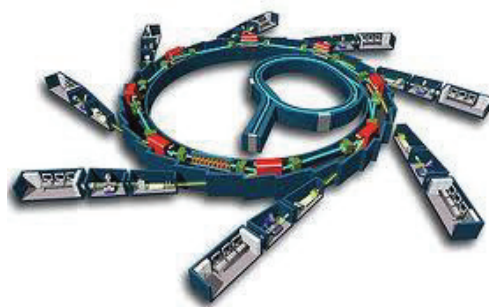
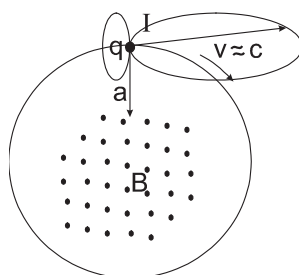
Las microondas tienen frecuencias aún más altas, y se utilizan también para telecos. La frecuencia 2.45 GHz del horno de microondas es absorbida por el agua líquida, cuya frecuencia de resonancia de absorción de microondas a temperatura ambiente es de aproximadamente 20 GHz. La energía absorbida se disipa como calor. (Se utiliza una frecuencia menor para lograr que las microondas penetren en profundidad y no se reflejen en la superficie, véase más adelante).

# Otras fuentes de luz clásicas

**Bremsstrahlung** («radiación de desaceleración»: fuentes de rayos X)

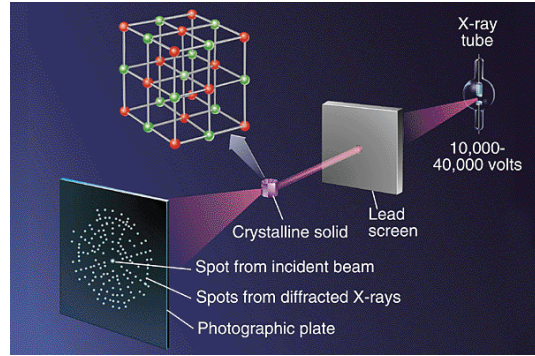
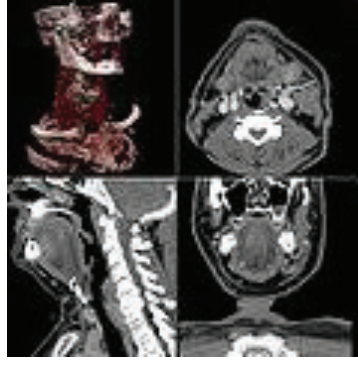


**Sincrotrón (ALBA)** (electrones relativistas)



Fuentes clásicas { con electrones de conducción en metales (electrónica):  $f$  hasta 300 GHz  
con electrones libres en el vacío:  $f$  hasta rayos X duros!

# Fuentes y aplicaciones de los rayos X



- En un tubo de rayos X se generan electrones de energía muy alta (entre 10 y 50 keV) y se hacen colisionar con una pieza metálica. Los electrones son frenados bruscamente y emiten radiación de frenada (bremsstrahlung) en forma de espectro ancho y continuo que se extiende hasta una frecuencia máxima dada por la energía cinética justo antes de la colisión.
- Los rayos X se utilizan para el diagnóstico médico (ejemplos: las **radiografías** y otras técnicas más sofisticadas como la **Tomografía Axial Computerizada o TAC**) y en cristalografía (**difracción de rayos X**, que tienen longitud de onda parecida a la distancia entre los átomos del sólido).
- Los rayos X son una radiación ionizante, y una larga exposición puede provocar quemaduras y hasta cáncer (por mutación genética del ADN debida a reacciones nucleares y químicas por irradiación con rayos X)

## Óptica “clásica” (TEMA 2) Esparcimiento (scattering)

Luz: campo **E** (y **B**) oscilante que interactúa con las cargas en la materia, especialmente con las que más se mueven: los electrones. El efecto de la onda es el de generar una oscilación de los electrones; esta oscilación se parece a la de un dipolo radiante: el electrón es acelerado por el campo óptico, y debido a su aceleración, emite a la vez a la misma frecuencia en una dirección que puede ser distinta de la de la onda inicial, con un lóbulo de emisión dipolar.

Este fenómeno se llama “esparcimiento” (scattering) elástico (o también “dispersión” elástica) de la luz, y es el que determina muchos fenómenos ópticos en la materia (basicamente todos menos la emisión de luz): la distinta velocidad de fase en un medio, la reflexión y la refracción, la actividad óptica, los espejismos, todo ello puede explicarse a partir del esparcimiento elástico de la luz.

Hablaremos de dos tipos de scattering:

- **Scattering Rayleigh** (átomos y moléculas, aislantes)
- **Scattering de plasma** (electrones en un metal o en un plasma)

El scattering Rayleigh describe la propagación de la luz en un aislante, el scattering de plasma describe la propagación en un metal o plasma

Esparcimiento en un sólido: movimiento de electrones en un campo **E** armónico  
**Metal: electrones libres**                      **Aislante: electrones ligados**

# Scattering en metales

Esparcimiento en un metal: movimiento de electrones (casi) libres en campos  $E$  armónicos.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -eE = -eE_0 e^{-i\omega t} \rightarrow x = x_0 e^{-i\omega t}, \quad x_0 = \frac{eE_0}{m\omega^2} \Rightarrow x(t) = \frac{eE_0}{m\omega^2} e^{i\omega t}$$

→ el electrón y el campo incidente oscilan en fase. Un electrón que se mueve de movimiento armónico es como un dipolo puntual oscilante (puede añadirse una carga positiva fija en  $x = 0$ ).

El momento de dipolo asociado es  $p(t) = -ex(t) = -\frac{e^2}{m\omega^2} E(t) = p_0 e^{-i\omega t}$ , con:  $p_0 = -ex_0 = -\frac{e^2}{m\omega^2} E_0$

Sea  $N$  = número de electrones en volumen unitario (densidad de número de los electrones). El campo de polarización producido por la onda incidente está dado por:

$$P = Np = -\frac{Ne^2}{m\omega^2} E = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 E, \text{ donde } \epsilon_r (= 1 + \chi) \text{ es la constante dieléctrica relativa}$$

$$\Rightarrow n^2 = \epsilon_r = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{con: } \omega_p = e \sqrt{\frac{N}{\epsilon_0 m}} \quad \text{frecuencia de plasma}$$

Para  $\omega > \omega_p$ ,  $n$  es real; para  $\omega < \omega_p$ ,  $n$  es puramente imaginario

(Nota:  $\chi$  es la susceptibilidad eléctrica, definida por  $P = \chi \epsilon_0 E$ ; la constante dieléctrica relativa está definida por:  $D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_r \epsilon_0 E$ , siendo  $D$  el campo de desplazamiento)

## Índice de refracción imaginario o complejo

$$n = n' + in'' \text{ complejo} \Rightarrow \text{vector de onda complejo: } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{\lambda f} = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c} n = \frac{\omega}{c} n' + i \frac{\omega}{c} n''$$

Sustituyendo en la expresión de una onda monocromática:

$$\vec{E} = E_0 \exp\{i(k'x + ik''x) - i\omega t\} = E_0 \exp\{i(k'x - \omega t)\} \exp\{-k''x\}. \text{ Definiendo } k_0 = \frac{\omega}{c}, \text{ se ha:}$$

$$\Rightarrow E_0 \exp(-n'' k_0 x) \exp\{i(n' k_0 x - \omega t)\}$$

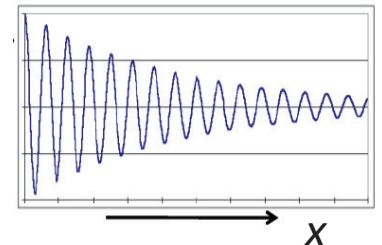
→ La parte real de  $n$  describe la velocidad de fase en el material



→ La parte imaginaria de  $n$  nos da la **atenuación** de la onda en el material, o sea las pérdidas debidas a scattering y absorción.

**Un índice  $n$  puramente imaginario significa que la onda no penetra en el material, sino que es totalmente reflejada.**

⇒ **un material muy absorbente es muy buen reflector**



Se define una **longitud de atenuación**:  $\delta = \frac{1}{k''}$

P. ej. en un metal o plasma a muy baja frecuencia  $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \approx \sqrt{-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = i \frac{\omega_p}{\omega} = in''$ , por lo que:

$$k'' = \frac{\omega}{c} n'' = \frac{\omega_p}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_p} \quad \text{y} \quad \delta = \frac{\lambda_p}{2\pi}$$

2-3, 2-5, 2-11

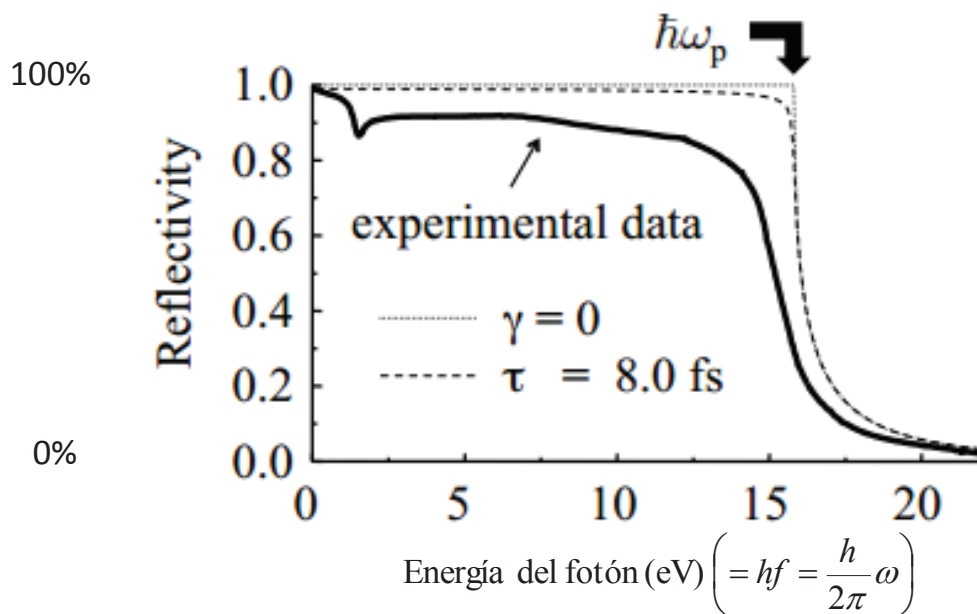
2-6, 2-7, 2-9

La irradiancia disminuye según la **ley de Beer**:  $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0 e^{-\alpha x}$ , con  $\alpha = \frac{2}{\delta} = 2k'' = 2\left(\frac{\omega}{c}\right)n''$

Estos parámetros resumen a la vez el efecto de la absorción y del esparsamiento



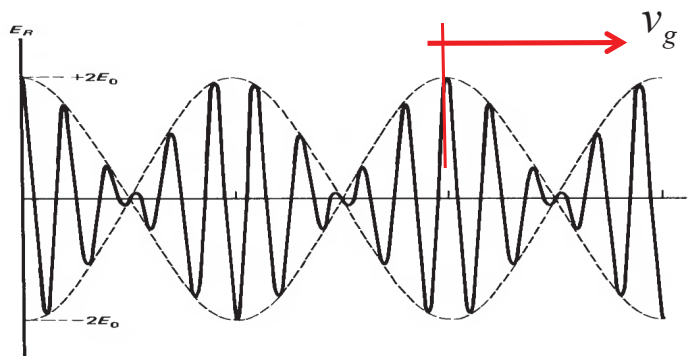
# Reflectividad del aluminio



## Medios dispersivos: velocidad de grupo

Dos ondas de igual amplitud  $a$ , una de pulsación  $\omega - d\omega$  y la otra  $\omega + d\omega$ , dan resultante de

la forma  $Ae^{i(kx - \omega t)} \left( e^{i[(dk)z - (d\omega)t]} + e^{-i[(dk)z - (d\omega)t]} \right) = 2Ae^{i(kz - \omega t)} \cos[(dk)z + (d\omega)t]$



→ “grupo” de ondas que se desplaza con velocidad :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

**Velocidad  
de grupo**

2-20(a,b)

Una onda perfectamente monocromática se propaga a la “velocidad de fase”  $v_f = \omega/k = c/n$

En un medio material tal velocidad de fase (o, lo que es lo mismo,  $n$ ) depende de la frecuencia. Esto hace que la velocidad de grupo  $v_g$ , que es la velocidad de un grupo de ondas o de un pulso,

sea distinta de  $v_f$ :  $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv_f)}{dk} = v_f + k \frac{d(v_f)}{dk} \neq v_f$



# Scattering en aislantes (Rayleigh)

Esparcimiento en un aislante: movimiento de electrones ligados en campos  $E$  armónicos.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E_0 e^{-i\omega t} \rightarrow x(t) = \frac{e}{m} \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\beta\omega} \Rightarrow P = Nex_0 = \frac{Ne^2}{m} \frac{E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\beta\omega}$$

$$\Rightarrow n^2 = \epsilon_r = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2 - i\beta\omega)} \Rightarrow n^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - i\beta\omega - \omega^2}$$

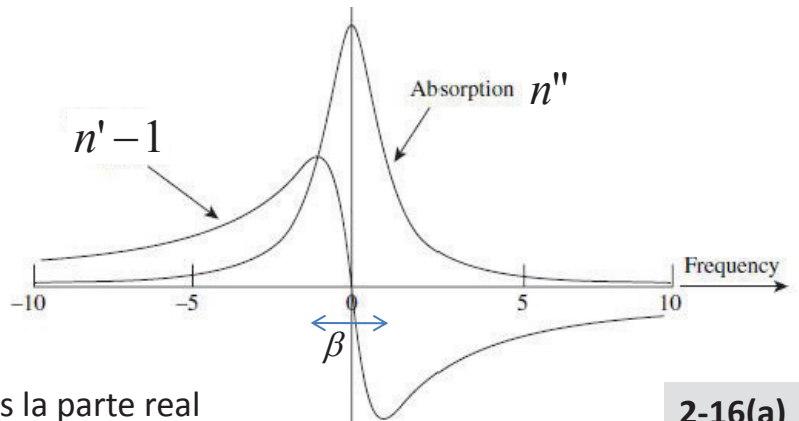
2-13

→  $n$  es en general complejo:  $n = n' + in''$  y además depende de la frecuencia

Si  $n'-1 = \Delta n'$  y  $n''$  son pequeños, como es el caso para un gas a baja presión, se ha aprox. :

$$\begin{cases} n' = 1 + \Delta n' = 1 + \frac{\omega_p^2}{2} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\beta\omega)^2} \\ n'' = \frac{\omega_p^2}{2} \frac{\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\beta\omega)^2} \end{cases}$$

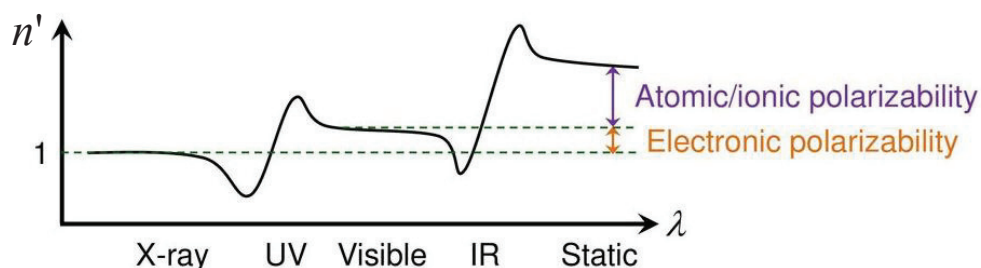
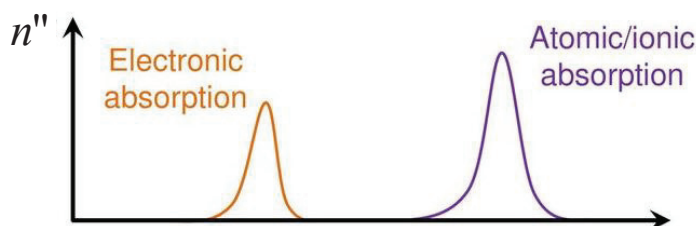
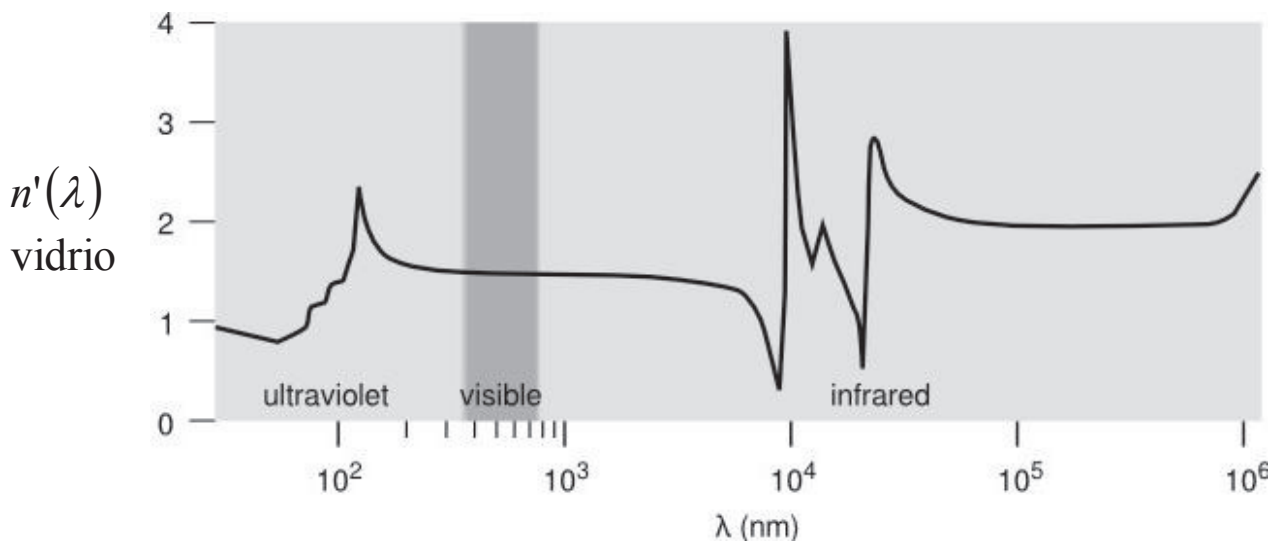
Del gráfico de  $n''$  se ve que  $\beta$  = ancho a media altura



2-16(a)

NOTA: lejos de la resonancia ( $\omega_0$ ), al menos la parte real del índice de refracción puede hallarse utilizando fórmulas aproximadas que derivan de las anteriores, conocidas como ecuaciones de Sellmeier y de Cauchy

2-14



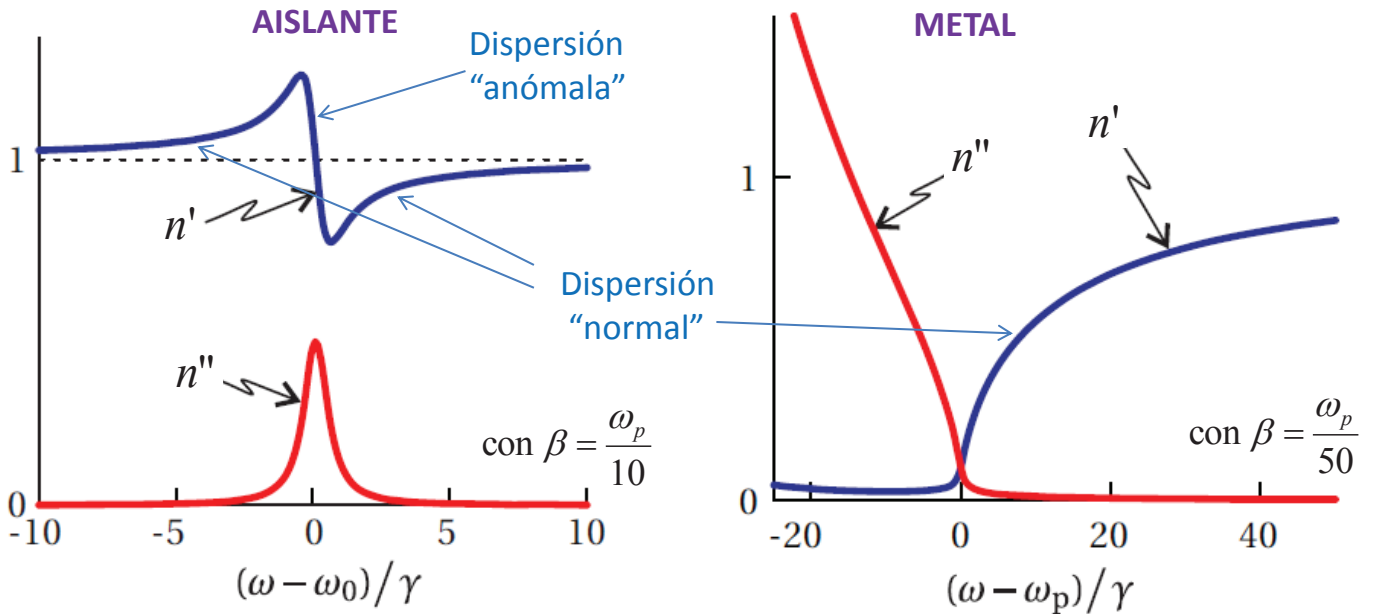
# Fórmulas generales para el esparcimiento

En el caso de que no haya fricción (o sea,  $\beta = 0$ ) ni resonancia (o fuerza elástica, o sea si  $\omega_0 = 0$ ), la teoría de Lorentz y Rayleigh de la transparencia anterior se vuelve idéntica a la teoría del esparcimiento en un plasma:

$$n^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - i\beta\omega - \omega^2} \rightarrow n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

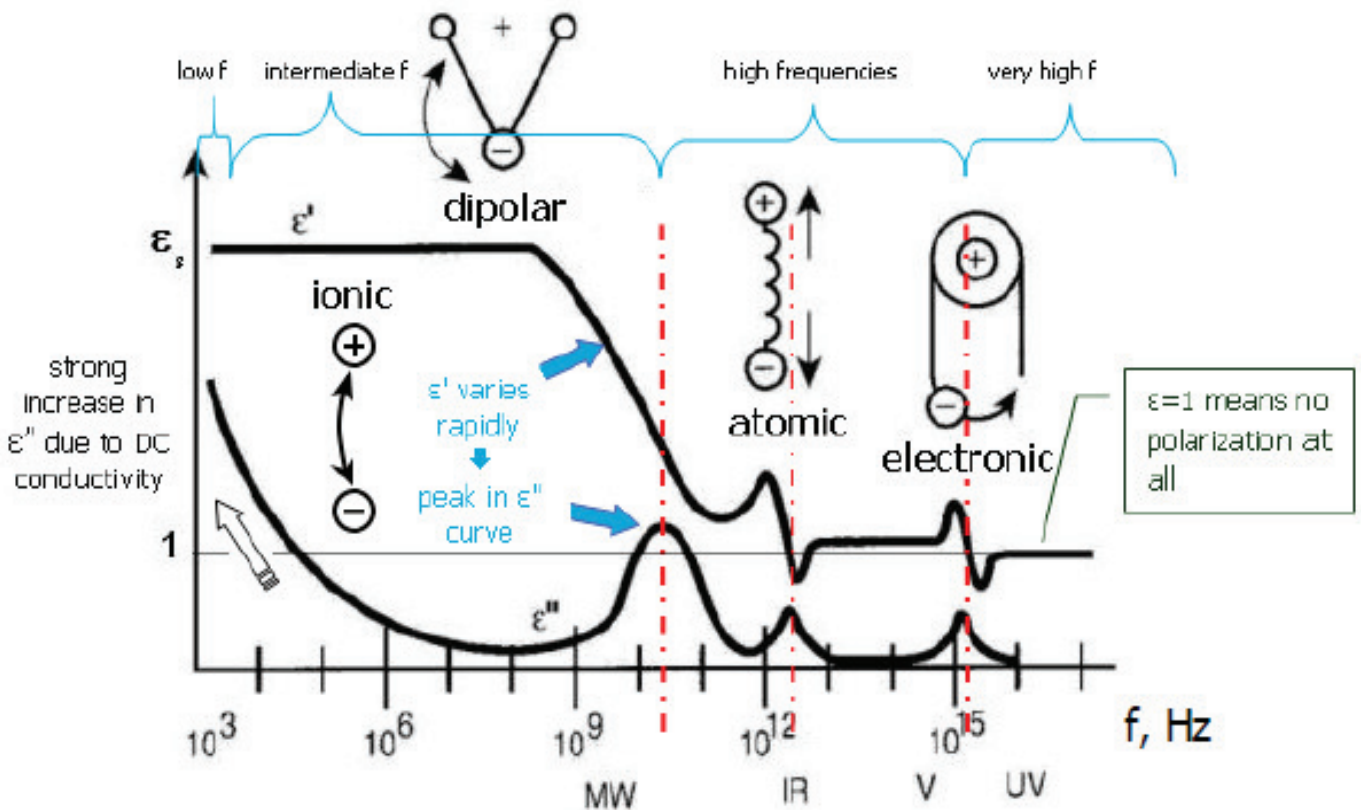
Sin embargo podemos hacer una aproximación menos fuerte, poniendo  $\omega_0 = 0$  pero con  $\beta \neq 0$ :

$$n^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - i\beta\omega - \omega^2} \rightarrow n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{i\beta\omega + \omega^2}$$



## Respuesta en frecuencia de los dieléctricos

$n^2 = \epsilon_r$ ;  $\epsilon_r$  (como  $n$ ) es complejo  $\rightarrow$  se suele representar como  $\epsilon_r'$  y  $\epsilon_r''$



# Scattering Rayleigh

El movimiento de un electrón ligado en un campo  $\mathbf{E}$  armónico es  $x(t) = \frac{e}{m} \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + ib\omega}$ , con aceleración  $a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$ . Los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  de radiación son proporcionales a  $\frac{d^2 p}{dt^2} = e \frac{d^2 x}{dt^2}$

$\Rightarrow$  la potencia radiada es proporcional a  $a^2 \Rightarrow \wp \propto \frac{E_0^2 \omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2 - ib\omega)^2}$

Muy por debajo de la resonancia ( $\omega \ll \omega_0$ ) el denominador es básicamente constante y vale  $\omega_0^4$ . Si la luz incidente tiene un espectro en frecuencia plano y limitado a la región  $\omega \ll \omega_0$ , la potencia esparcida es:

$$\wp_{Rayleigh} \propto \omega^4 / \omega_0^4$$

 2-15

$P$  es proporcional a la cuarta potencia de la frecuencia, igual que para una antena de dipolo eléctrico (de hecho un electrón atómico oscilante es muy parecido a una pequeña antena). En comparación en un metal  $x(t) = -\frac{eE_0}{m\omega^2} e^{i\omega t}$ , por lo que  $a^2$  y  $\wp$  no dependen de la frecuencia.

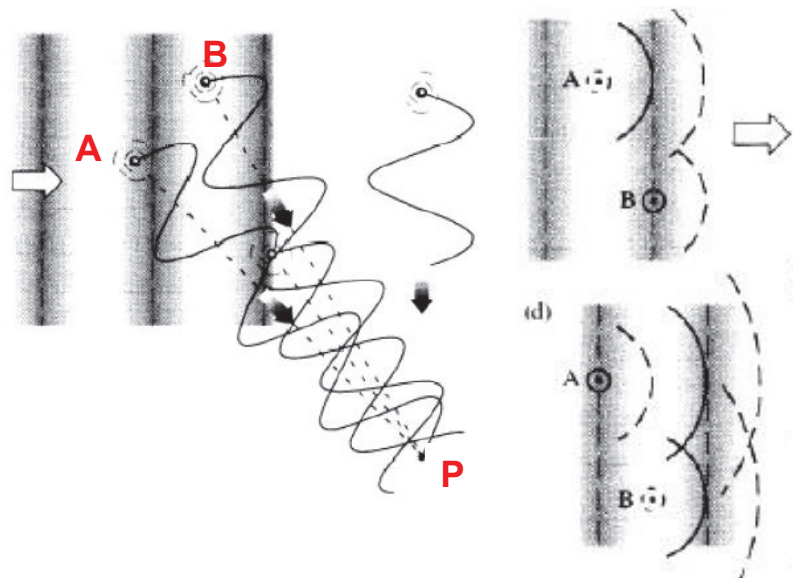
Cuando la luz del sol atraviesa un gas como el aire, cuyas moléculas ( $N_2$ ,  $O_2$ ) no tienen niveles de absorción en el visible sino en el ultravioleta, solo puede ser esparcida y no absorbida (dado que  $\omega \ll \omega_0$ ). La amplitud de las oscilaciones aumenta con la frecuencia; más oscilaciones significan más esparcimiento, así que la luz violeta es esparcida más que la luz azul, ésta más de la luz verde, etc.. El haz transmitido se vuelve cada vez más rojo, mientras que la luz esparcida es sobretodo azul (la luz solar no contiene mucho UV). De allí el rojo de las puestas del sol y el azul del cielo, que sin scattering Rayleigh sería negro como el espacio exterior.

<https://www.youtube.com/watch?v=LSf7IRD5Jws>

## Fenómenos debidos a scattering Rayleigh + interferencia: Esparcimiento en medios muy diluidos

En un gas a baja presión la separación entre moléculas es mucho mayor que la longitud de onda de la luz, así que las ondas esparcidas por distintas moléculas A y B llegan a un punto P lejano con fases arbitrarias. Algunas interfieren de manera constructiva y otras destructiva: esto anula en promedio los efectos de interferencia, y hace que siempre haya una onda esparcida. La única dirección en que esto no ocurre es la del haz, pues en tal caso hay una relación de fase fija entre la radiación emitida por A y B, ya que las ondas incidente y la esparcida recorren en tal caso la misma distancia entre A a B.

El esparcimiento atmosférico que determina el color azul del cielo se produce en las capas exteriores (menos densas) de la atmósfera. NOTA: A nivel del mar la atmósfera es todo menos diluida: en un cubo de lado 500 nm (longitud de onda típica de la luz visible) hay 3 millones de moléculas de aire; las moléculas son tan cercanas que radian con fases muy parecidas, con efectos importantes de interferencia



**Un medio diluido con absorción en el UV esparce la luz visible; la luz esparcida es incoherente**

# Fenómenos debidos a scattering Rayleigh + interferencia: Ausencia de esparcimiento en medios densos

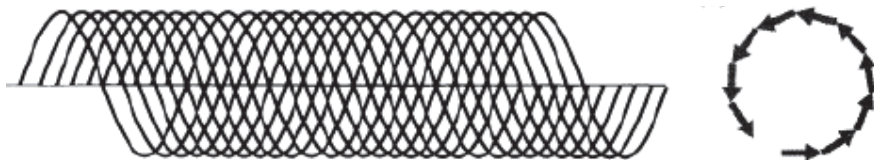
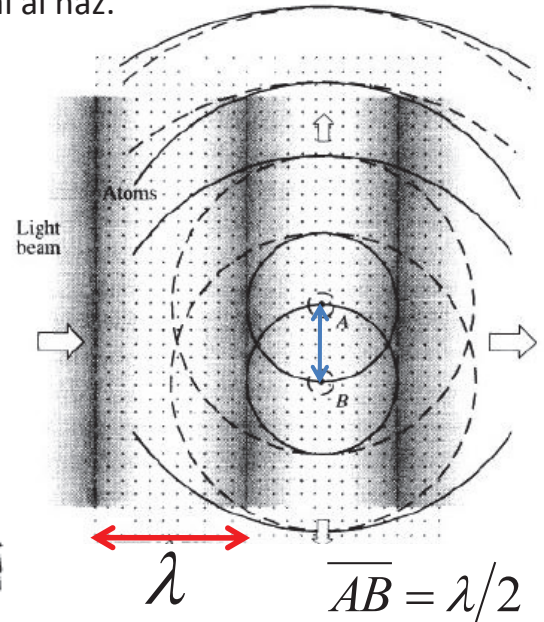
En un gas a alta presión como la atmósfera terrestre a nivel del mar no hay esparcimiento, y lo mismo ocurre en líquidos y sólidos, que son 10 veces más densos (el vidrio y el aire no son azulados). ¿Cómo puede ser, si hay muchas más moléculas debido a la alta densidad? Como para los medios diluidos, hay interferencia constructiva en dirección de propagación ya que la luz esparcida está entonces en fase. Sin embargo, el esparcimiento está inhibido en otras direcciones debido a la interferencia destructiva. ¿Cómo ocurre esto?

Cada molécula difunde mayormente en dirección transversal al haz.

Debido a la alta densidad, por cada molécula A que difunde la luz, siempre se puede encontrar otra B a una distancia  $\lambda/2$ , que radia con fase opuesta a la de A; en dirección transversal, la interferencia es pues totalmente destructiva.

Más en general, en una dirección cualquiera fuera del haz llegan un número muy alto de onditas de intensidad muy pequeña y fase arbitraria. La suma de todas ellas es nula o como mucho muy pequeña, así que la potencia esparcida es insignificante.

**en un medio denso y homogéneo no ocurre esparcimiento**



## Velocidad de propagación = velocidad de grupo

Vimos en el tema 1 que la velocidad de propagación de una onda no perfectamente monocromática es

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad \text{Velocidad de grupo}$$

Dado que no existen ondas perfectamente monocromática, la velocidad de grupo  $v_g$  es la velocidad real de propagación de la luz en un medio (mientras la velocidad de fase  $v_f$  NO lo es).  $v_g$  puede hallarse como :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \left( \frac{dk'}{d\omega} \right)^{-1} = \left( \frac{d(\omega n'/c)}{d\omega} \right)^{-1} = \left( \frac{n'}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn'}{d\omega} \right)^{-1} = \left[ \frac{n'}{c} \left( 1 + \frac{\omega}{n'} \frac{dn'}{d\omega} \right) \right]^{-1} = \frac{c}{n'} \left( 1 + \frac{\omega}{n'} \frac{dn'}{d\omega} \right)^{-1}$$

Es decir: 
$$v_g = v_f \left( 1 + \frac{\omega}{n'} \frac{dn'}{d\omega} \right)^{-1}$$

Por tanto, si  $n'$  es función de la frecuencia  $v_g \neq v_f$

$\Rightarrow v_f$  **NO** es la velocidad de propagación de la luz

Es útil expresar la velocidad de grupo también en función de  $\lambda$ . Dado que

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda, \text{ se ha: } \frac{k}{n'} \frac{dn'}{dk} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{n'} \left( \frac{d\lambda}{dk} \frac{dn'}{d\lambda} \right) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{n'} \left( -\frac{\lambda^2}{2\pi} \right) \frac{dn'}{d\lambda} = -\frac{\lambda}{n'} \frac{dn'}{d\lambda}$$

Por lo tanto: 
$$v_g = v_f \left( 1 + \frac{\lambda}{n'} \frac{dn'}{d\lambda} \right)$$



# Luz en dieléctricos y metales: descripción e.m.

Ningún dieléctrico es perfecto y siempre hay alguna corriente; y en un metal pueden también haber efectos de polarización, sobre todo a altas frecuencias. En un material lineal, la densidad de corriente es proporcional al campo eléctrico:  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ , donde  $\sigma$  es la conductividad. Para frecuencias altas,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho = 0$  (en un dieléctrico porque la carga ligada no tiene el tiempo de acumularse con la continua inversión de polaridad, y en el interior de un metal porque los electrones apantallan el campo incidente). De las ecuaciones de Maxwell se saca:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \Rightarrow \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

(con  $\epsilon_r = 1$  para un metal)

## Onda monocromática en un medio:

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}} = \frac{\omega}{c} n = k' + ik'' \Rightarrow n^2 = \left( \frac{c}{\omega} k \right)^2 = \epsilon_r + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}$$

Además:

$$B_0 = E_0 / v_f, \quad \mathfrak{I} = \frac{1}{2\mu_0 v_f} E_0^2 \quad \text{y} \quad v_g = v_f \left( 1 + \frac{\lambda}{n'} \frac{dn'}{d\lambda} \right), \quad \text{con} \quad v_f = \frac{c}{n'}$$

- parte real de  $k$  (o  $n$ ): velocidad de fase y de grupo



- parte imaginaria de  $k$  (o  $n$ ): atenuación:

$$k = k' + ik'' \Rightarrow \vec{E} = E_x \hat{x} \exp\{i(k'x - \omega t)\} \exp(-k''x)$$



$$\delta = \frac{1}{k''}$$

longitud de atenuación

2-22

## Cálculo del índice de refracción complejo

Vimos que el cuadrado de  $n$  es un número complejo  $n^2 = \epsilon_r + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} (= a + ib)$

Si las partes real e imaginaria ( $a$  y  $b$ ) son comparables, para sacar la raíz hay que escribir  $n^2$  en forma polar:

$$n^2 = \sqrt{\epsilon_r^2 + \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right)^2} \exp \left[ i \tan^{-1} \left( \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0 \omega} \right) \right] \Rightarrow n = \sqrt{\sqrt{\epsilon_r^2 + \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right)^2}} \exp \left[ i \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0 \omega} \right) \right]$$

Sin embargo, a veces este cálculo se puede simplificar. Por ejemplo si  $a \gg b$ , entonces

$$n = \left( \epsilon_r + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right)^{\frac{1}{2}} = \left[ \epsilon_r \left( 1 + i \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0 \omega} \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \epsilon_r^{1/2} \left( 1 + i \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0 \omega} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \sqrt{\epsilon_r} \left( 1 + \frac{1}{2} i \frac{\sigma}{\epsilon_r \epsilon_0 \omega} \right) = \sqrt{\epsilon_r} + i \frac{\sigma}{2\sqrt{\epsilon_r} \epsilon_0 \omega}$$

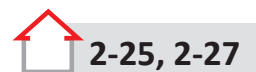
Aquí se ha utilizado la aproximación  $(1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ , válida también para  $x$  complejo si  $|x| \ll 1$

Por otro lado si  $b \gg a$ , entonces  $n^2 \approx i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}$ . Esto se da por ejemplo cuando la frecuencia  $\omega$  es

pequeñas (en un metal o dieléctrico). En tal caso:  $n^2 \approx i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} = e^{i\pi/2} \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \Rightarrow n \approx e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}}$

$$\Rightarrow n' = n'' = \sqrt{b/2} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}} \Rightarrow k' = k'' = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\sigma \omega}{2\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\sigma \omega \mu_0}{2}}$$

2-24, 2-26



En el caso de un metal,  $\epsilon_r = 1 \Rightarrow n \approx 1$  para  $\omega$  suficientemente alta ( $\omega > \sigma/\epsilon_0$ ),

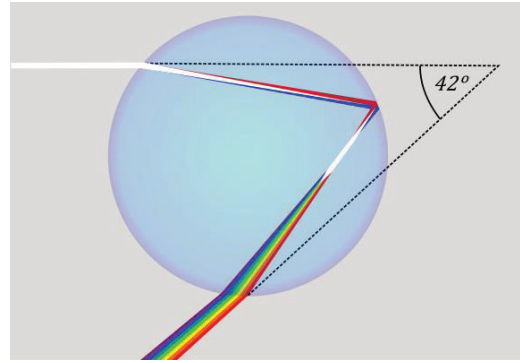
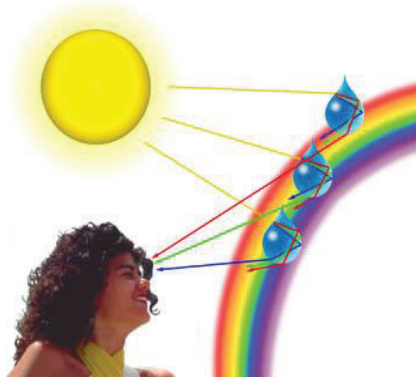
( $\rightarrow$  compara con la predicción del modelo de plasma: un metal es transparente  $\Leftrightarrow \omega > \omega_p$ )



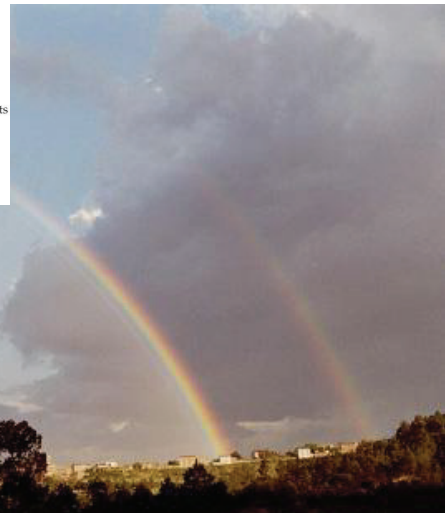
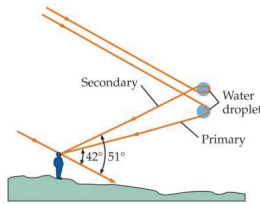
# Refracción y medios dispersivos: arco iris

Dispersión: el índice  $n(\lambda)$  depende de la longitud de onda

<http://www.atoptics.co.uk/rainbows/primrays.htm>



Arco primario y secundario



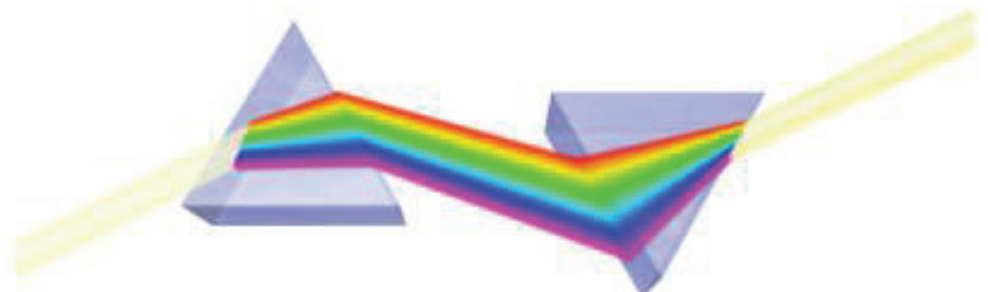
Halos



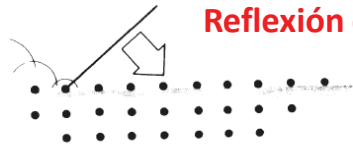
# Prisma y aberración cromática de las lentes



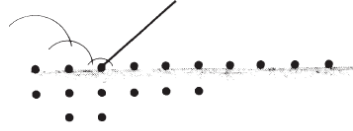
Debido a la dependencia del índice de refracción de la longitud de onda, las lentes focalizan la luz en puntos distintos dependiendo del color! (aberración cromática). La corrección de este defecto cromático se hace mediante sistemas de más lentes  
Dos lentes = dos prismas



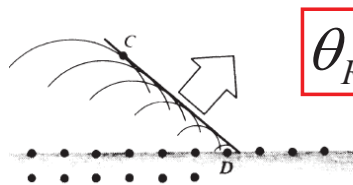
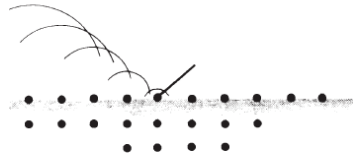
# Interpretación basada en el esparcimiento



Reflexión especular



Reflexión difusa



$$\theta_R = \theta_I$$

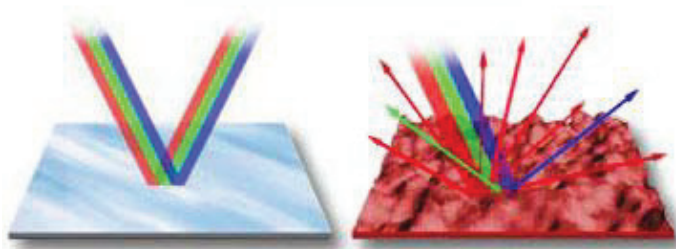


**Figure 5.2** A person's face, like everything else we ordinarily see in reflected light, is covered with countless atomic scatterers.

reflexión, refracción, propagación en un medio material, dispersión: todas son manifestaciones macroscópicas del *esparcimiento* en la escala microscópica

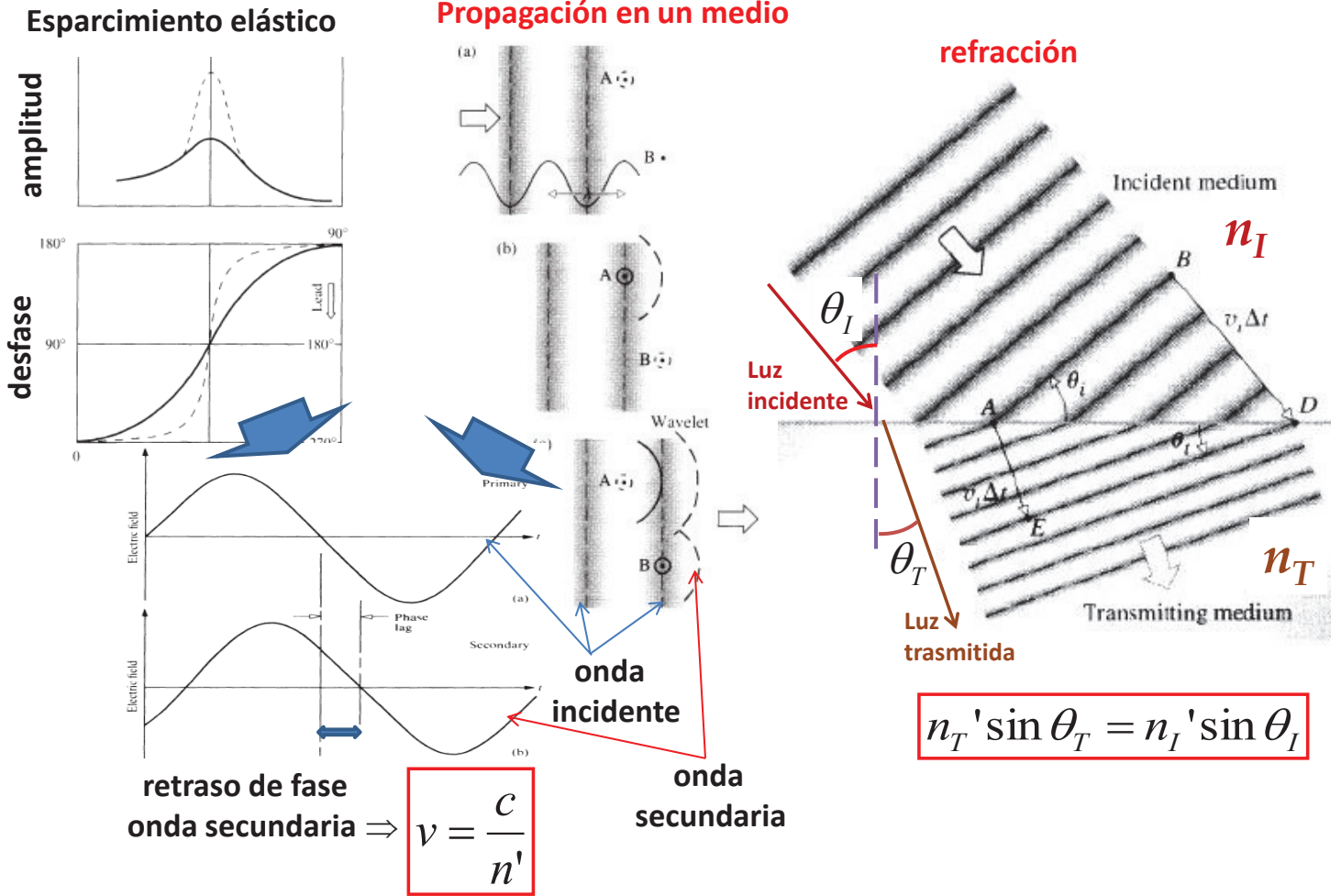
Reflexión especular

Reflexión difusa



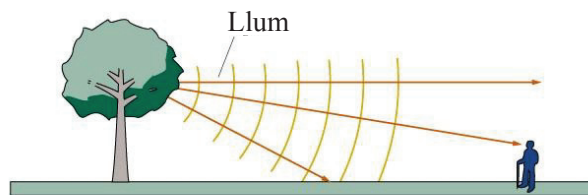
Superficie ondulada

# \*Esparcimiento: velocidad de fase y refracción



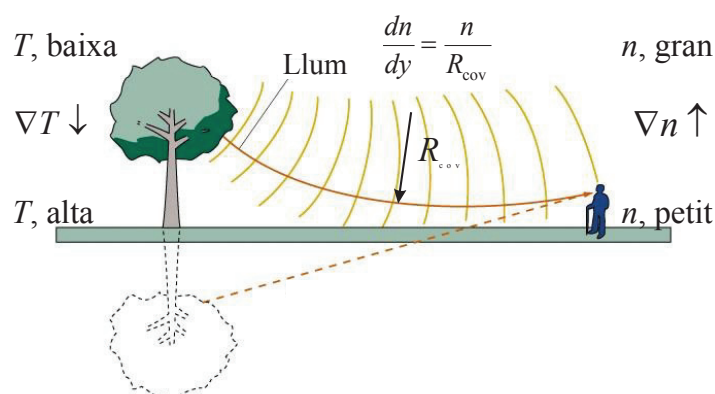
## Propagación en medios no homogéneos

- Medio homogéneo: trayectoria rectilínea



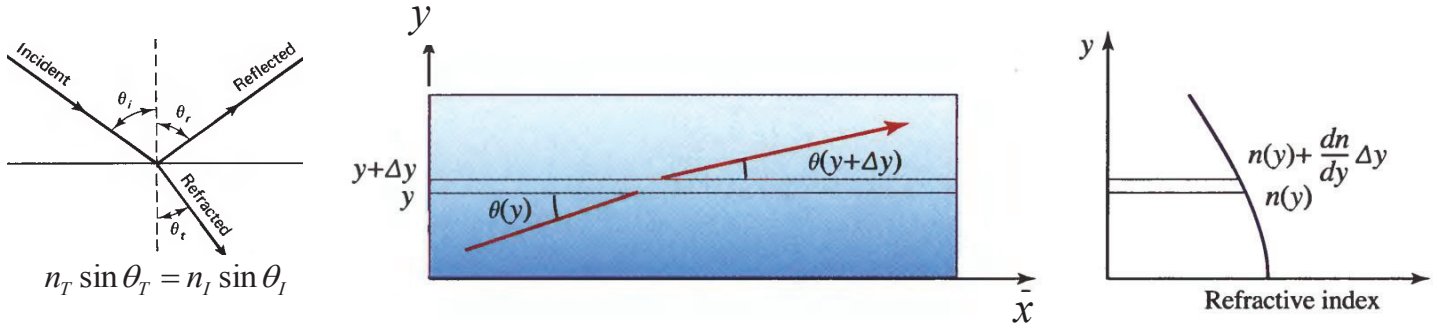
- Medio no homogéneo: trayectoria curva

Suposem un medi estratificat amb índex  $n$  creixent i apliquem la llei de Snell a cada interfície: El raig de llum es corba cap a índex alts





# \* Propagación en medios no homogéneos



Consideremos un medio no homogéneo con índice de refracción dependiente de la altura  $y$ . En el dibujo se ve un rayo casi horizontal que forma, a la posición  $x$  y altura  $y$ , un ángulo  $\theta$  con la horizontal, cuya tangente está dada por  $\tan \theta = \frac{dy}{dx}$ . Al pasar la luz a través de un espesor  $\Delta y$  del medio, el ángulo  $\theta(y)$  varía al valor  $\theta(y + \Delta y)$  debido a la refracción. Por la

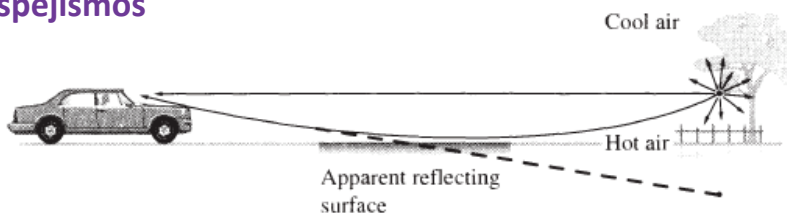
**ley de Snell:** 
$$n(y) \cos \theta(y) = n(y + \Delta y) \cos \theta(y + \Delta y) = \left( n(y) + \frac{dn}{dy} \Delta y \right) \left( \cos \theta(y) - \sin \theta \frac{d\theta}{dy} \Delta y \right)$$

(se ha utilizado la expansión en serie de Taylor de  $n$  y del coseno del ángulo). Menospreciando el término en  $\Delta y^2$ , se halla  $\frac{dn}{dy} = n \frac{d\theta}{dy} \tan \theta = n \frac{d\theta}{dy} \frac{dy}{dx} = n \frac{d\theta}{dx}$ . Para  $\theta$  pequeño se ha:  $\theta \approx \tan \theta = \frac{dy}{dx}$

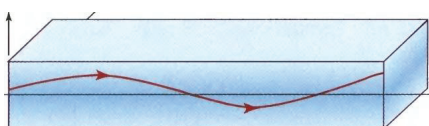
$\Rightarrow$  la ecuación de la trayectoria de la luz en el medio es: 
$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{n(y)} \frac{dn}{dy}$$

## Luz en medios no homogéneos

### → Espejismos



### → Materiales GRIN (graded-index, «índice graduado») para lentes y fibras ópticas



<http://www.youtube.com/watch?v=d8zUHBbfmM>

# Reflectividad para incidencia normal

Condiciones de frontera para la óptica:  $\mathbf{B} = \text{const}$ ,  $E_{//} = \text{const}$ . Para incidencia normal esto es:

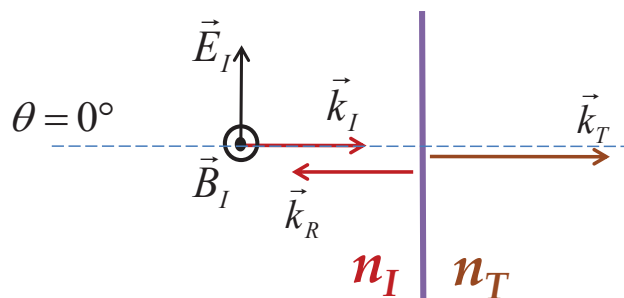
$$\begin{cases} E_{0I} + E_{0R} = E_{0T} \\ B_{0I} + B_{0R} = B_{0T} \end{cases}$$

Por la Ley de Faraday (3ª ec. de Maxwell):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow kE_0 = \omega B_0 \Rightarrow B_0 = \frac{E_0}{\omega/k} = n \frac{E_0}{c}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{0I} + E_{0R} = E_{0T} \\ n_I E_{0I} - n_I E_{0R} = n_T E_{0T} \end{cases}$$

el signo menos proviene del cambio de orientación relativa de E y B en la onda reflejada (al ser  $\vec{k}_R = -\vec{k}_I$ )



Resolviendo para las amplitudes transmitida y reflejada:

$$\begin{cases} E_{0T} = \frac{2n_I}{n_I + n_T} E_{0I} \\ E_{0R} = \frac{n_I - n_T}{n_I + n_T} E_{0I} \end{cases} \Rightarrow \frac{E_{0R}}{E_{0I}} = \frac{n_I - n_T}{n_I + n_T}$$

→ REFLECTIVIDAD

$$R = \frac{\mathfrak{I}_R}{\mathfrak{I}_I} = \frac{|E_{0R}|^2}{|E_{0I}|^2} = \left| \frac{n_I - n_T}{n_I + n_T} \right|^2$$

2-39

NOTAS IMPORTANTES:  $R$  es la misma si la luz incide desde un medio o desde el otro.

Para una separación aire/vidrio ( $n = 1.5$ ) →  $R = 4\%$ . También se define una "transmisividad"  $T$ .

Por la conservación de la energía electromagnética total es:  $T = \frac{\mathfrak{I}_T}{\mathfrak{I}_I} = 1 - R$



2-36, 2-38

## Reflexión desde un espejo metálico

La ecuación  $\frac{E_{0R}}{E_{0I}} = \frac{n_I - n_T}{n_I + n_T}$  es en realidad una igualdad entre números complejos. Para luz que

incide desde aire ( $n_{\text{aire}} = n_{\text{aire}}' = 1$ ) sobre un metal o un material que absorbe luz, tal ecuación da:

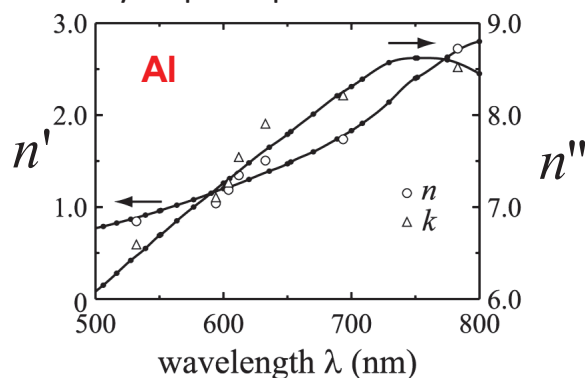
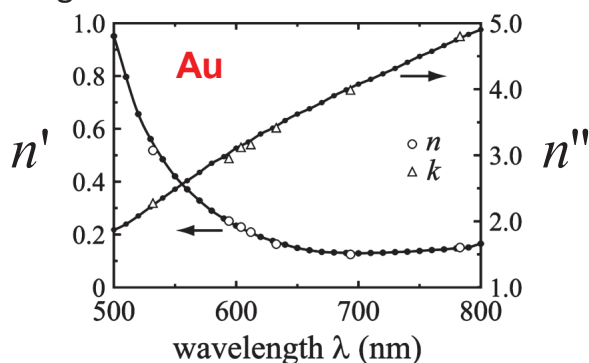
$$\frac{E_{0R}}{E_{0I}} = \frac{1 - n_T' - in_T''}{1 + n_T' + in_T''}$$

La reflectividad es entonces:

$$R = \left| \frac{E_{0R}}{E_{0I}} \right|^2 = \left| \frac{1 - n_T' - in_T''}{1 + n_T' + in_T''} \right|^2$$

2-40

La parte imaginaria del índice de refracción de un metal es mayor que la parte real incluso en el visible:



Para la reflectividad  $R$  de un metal (o medio absorbente) hay que tomar  $n_T$  como una cantidad compleja. En el visible  $n_T''$  es comparable con  $n_T'$ ; mientras para frecuencias en el infrarrojo o menores,  $n_T^2$  es esencialmente imaginario y valen las fórmulas aproximadas:

$$n_T^2 \approx i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} = e^{i\pi/2} \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \Rightarrow n_T \approx e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}} \Rightarrow n_T' = n_T'' = \sqrt{b/2} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}}$$

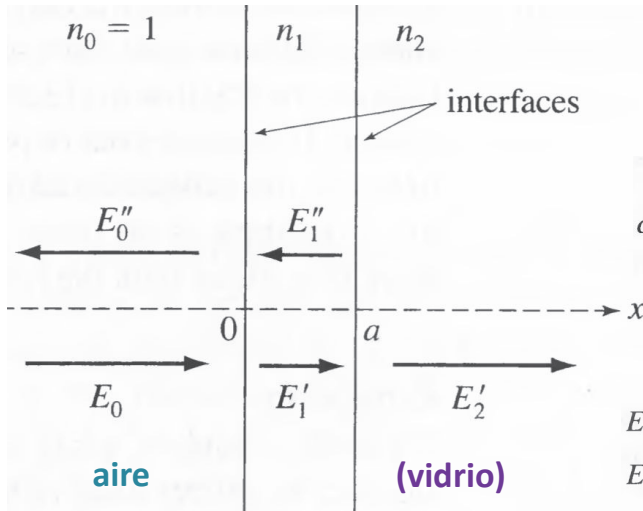


2-42, 2-43



# \*Recubrimiento antirreflejo

2-46



$$E(x, t) = \begin{cases} E_0 \hat{j} e^{i(kx - \omega t)} + E_0'' \hat{j} e^{-i(kx + \omega t)} & \text{for } x \leq 0 \\ E_1' \hat{j} e^{i(k_1 x - \omega t)} + E_1'' \hat{j} e^{-i(k_1 x + \omega t)} & \text{for } 0 \leq x \leq a \\ E_2' \hat{j} e^{i(k_2 x - \omega t)} & \text{for } x \geq a \end{cases}$$

$$cB(x, t) = \begin{cases} E_0 \hat{z} e^{i(kx - \omega t)} - E_0'' \hat{z} e^{-i(kx + \omega t)} & \text{for } x \leq 0 \\ n_1 E_1' \hat{z} e^{i(k_1 x - \omega t)} - n_1 E_1'' \hat{z} e^{-i(k_1 x + \omega t)} & \text{for } 0 \leq x \leq a \\ n_2 E_2' \hat{z} e^{i(k_2 x - \omega t)} & \text{for } x \geq a. \end{cases}$$

Condiciones de frontera →

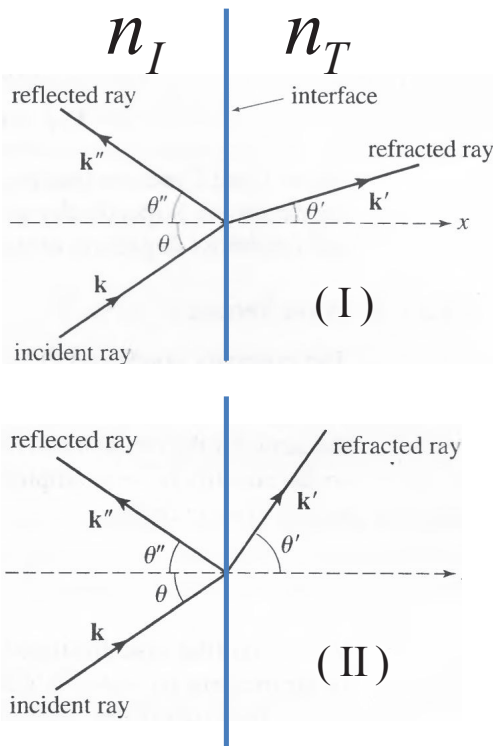
en  $x = 0$ :  $E_0 + E_0'' = E_1' + E_1''$   
 $E_0 - E_0'' = n_1 (E_1' - E_1'')$

en  $x = a$ :  $E_1' e^{ik_1 a} + E_1'' e^{-ik_1 a} = E_2' e^{ik_2 a}$   
 $n_1 (E_1' e^{ik_1 a} - E_1'' e^{-ik_1 a}) = n_2 E_2' e^{ik_2 a}$

$$E_0'' = 0 \Leftrightarrow \text{Cero reflectividad} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = \sqrt{n_2} \\ a = \lambda_1/4, 3\lambda_1/4, \dots \end{cases}$$

Las lentes (de vidrio,  $n_2 = 1.5$ ) de las cámaras se recubren de una capa delgada de fluoruro de magnesio ( $MgF_2$ ), que tiene índice de refracción  $n_1 = 1.38$ , de modo que se cumpla la condición  $n_1 = \sqrt{n_2}$  (sólo aproximadamente). El grosor del recubrimiento se elige de forma de utilizar la cantidad mínima de  $MgF_2$ , con  $\lambda$  en el medio del espectro visible. El recubrimiento maximiza la cantidad de luz transmitida, y es importante porque de otra forma cada separación vidrio-aire disminuye del 4% la intensidad incidente.

El mismo concepto se utiliza con aviones de guerra, para hacerlos "invisibles" a los radares



## Ángulo crítico

$$n_T \sin \theta_T = n_I \sin \theta_I$$

caso I)  $n_I < n_T$

Ej: luz que incide desde el aire sobre un material. El ángulo del rayo refracto con la normal es menor que el ángulo incidente

caso II)  $n_I > n_T$

2-50



2-47, 2-48

Ej: luz incidente desde dentro del material

El ángulo de refracción es mayor que el de incidencia

→ existe un ángulo de incidencia ( **ángulo crítico** ) por el que el ángulo de refracción es  $90^\circ$  :

$$n_T \sin 90^\circ = n_T = n_I \sin \theta_c \Rightarrow \theta_c = \arcsin \frac{n_T}{n_I}$$

para ángulos  $\theta_I > \theta_c$  se ha **reflexión total interna**

El vector de onda transmitido tiene componentes:  $\vec{k}_T = (k_T \cos \theta_T, k_T \sin \theta_T) = (k_T \sqrt{1 - \sin^2 \theta_T}, k_T \sin \theta_T)$   
 Utilizando la Ley de Snell, la componente horizontal (ortogonal a la separación) es:

$$k_{T,x} = k_T \sqrt{1 - \left( \frac{n_I}{n_T} \sin \theta_I \right)^2}$$

Para reflexión total interna ( $\theta_I > \theta_c$ ),  $k_{T,x}$  es imaginario ⇒ la onda transmitida decae rápidamente en la dirección normal

→ **onda evanescente**, con longitud de atenuación  $\delta = 1/|k_{T,x}|$

2-52

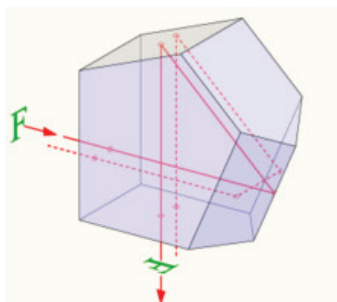
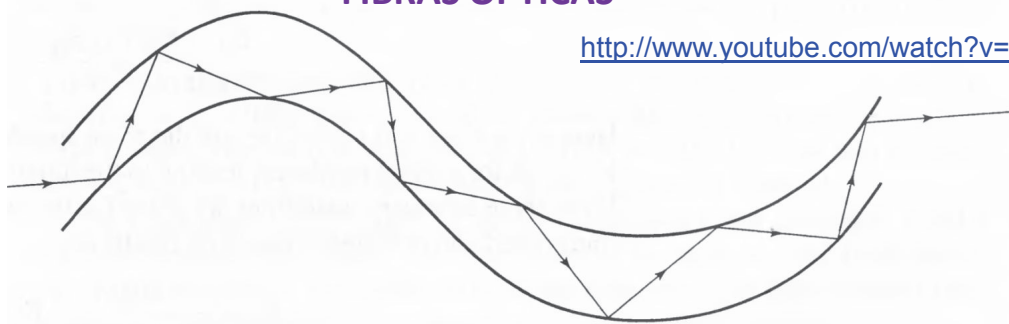


2-53

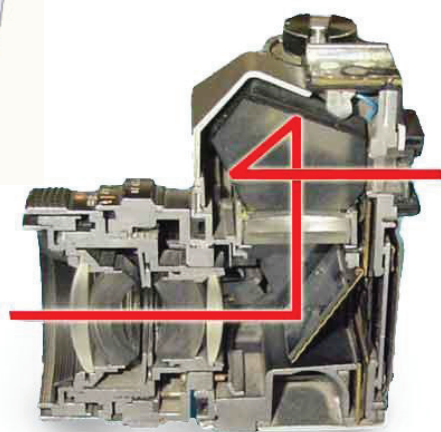
# Aplicaciones de la reflexión total interna

## FIBRAS ÓPTICAS

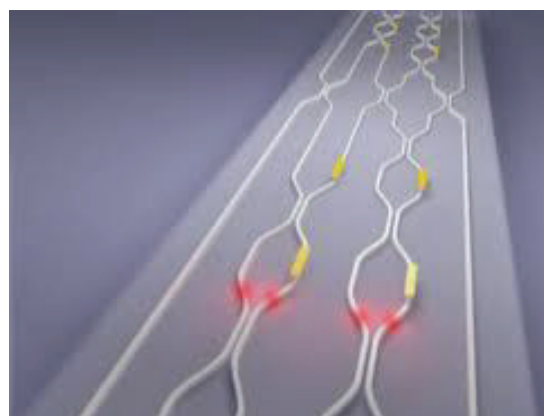
[http://www.youtube.com/watch?v=hBQ8fh\\_Fp04&feature=related](http://www.youtube.com/watch?v=hBQ8fh_Fp04&feature=related)



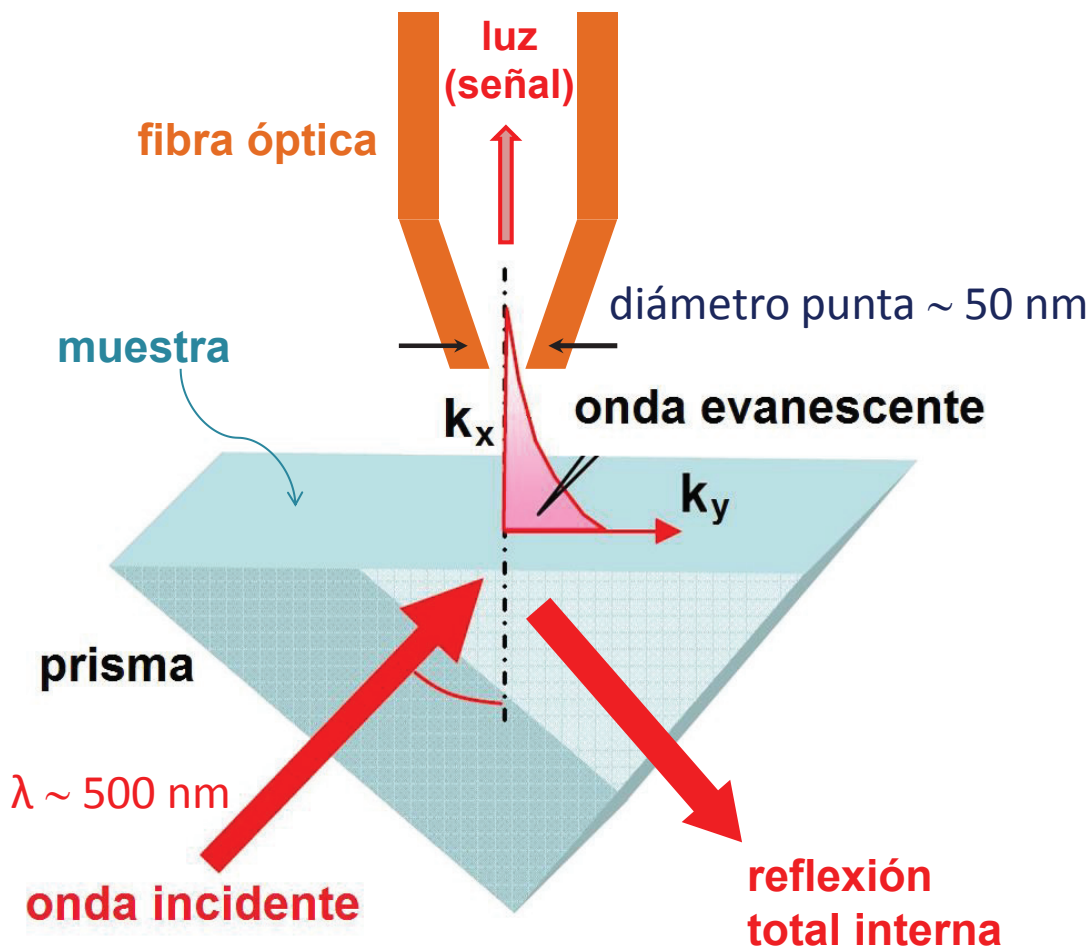
## PENTAPRISMA CÁMARA REFLEX



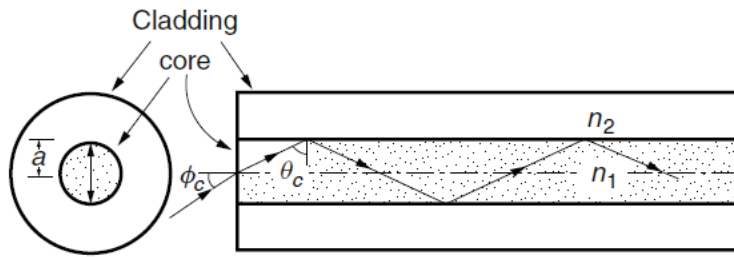
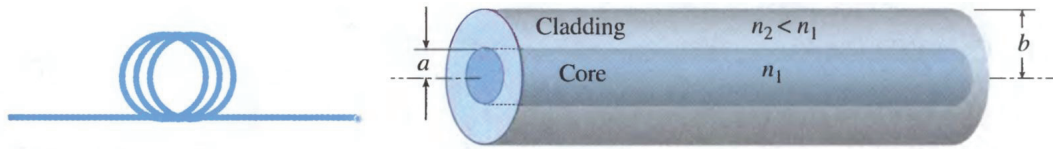
## ÓPTICA INTEGRADA



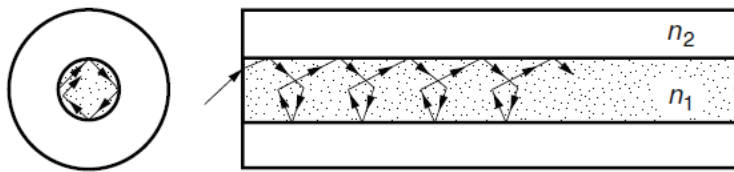
## Microscopio de campo cercano



# La luz en las fibras ópticas



Rayo meridional



Rayo no meridional

(a)

(b)

Para rayos meridionales:

ángulo de aceptación:  $\sin \phi_a = \frac{1}{n_0} (n_f^2 - n_c^2)^{1/2}$

2-55

apertura numérica (AN):  $AN = n_0 \sin \phi_a = (n_f^2 - n_c^2)^{1/2}$



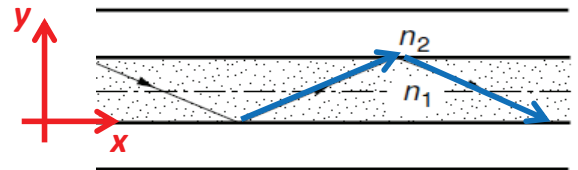
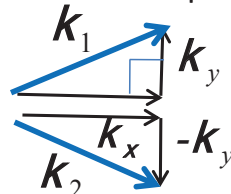
2-56, 2-58

## Modos de una fibra óptica

Interferencia entre reflexiones: **modos de la fibra** (ondas que se propagan en la dirección del eje pero que son estacionarias en las 2 direcciones ortogonales al eje). La aproximación más simple consiste en considerar rayos meridionales, para los que la onda resultante se puede calcular como suma de dos ondas planas con dirección de propagación (ligeramente) distinta:

El campo total  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  es:

$$\vec{E}_0 \left( e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} + e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)} \right) = \vec{E}_0 e^{i(k_x x - \omega t)} \left( e^{ik_y y} + e^{-ik_y y} \right) \Rightarrow$$



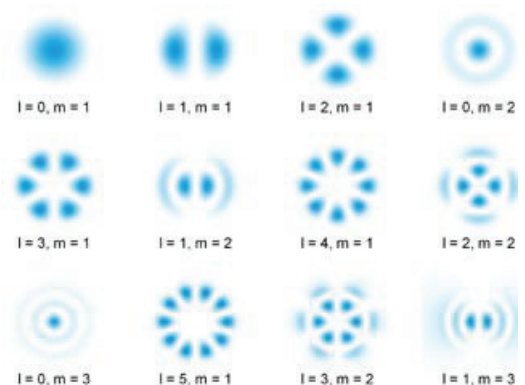
$$\vec{E} = 2\vec{E}_0 \cos(k_y y) e^{i(k_x x - \omega t)} = 2\vec{E}_0 e^{i(k_x x - \omega t)} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_{núcleo}} \sin \theta y\right)$$

Para interferencia constructiva se tiene que formar una onda estacionaria, o sea, la diferencia de fase entre  $y = 0$  e  $y = D$  tiene que ser un múltiplo entero de  $\pi$  ( $= 180^\circ$ ):

2-59

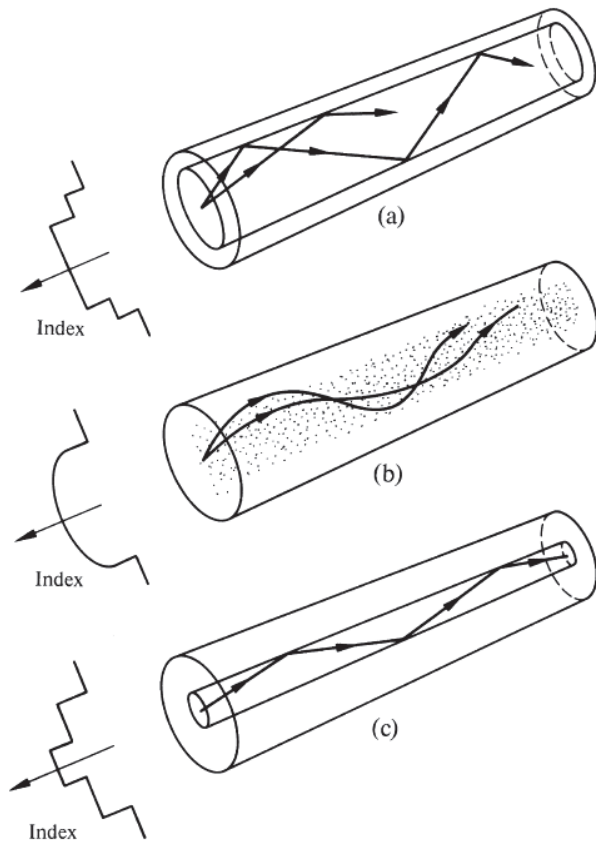
$$\frac{2\pi}{\lambda_{núcleo}} \sin \theta D = m\pi \Rightarrow \sin \theta_m = m \frac{\lambda_{núcleo}}{2D} \quad \text{con } m = 1, 2, 3, \dots$$

En realidad las "franjas de interferencia" de los modos de propagación en una fibra óptica son más complicadas, debido a la simetría cilíndrica de la misma, y depende también de otro entero  $l$ . He aquí un esquema del patrono de irradiancia en una sección ortogonal a la fibra de los modos que forman distintos ángulos (promedios) respecto del eje de la fibra  $\rightarrow \rightarrow$





# Tipos de fibras ópticas



## Fibra multimodo

### Fibra de índice graduado

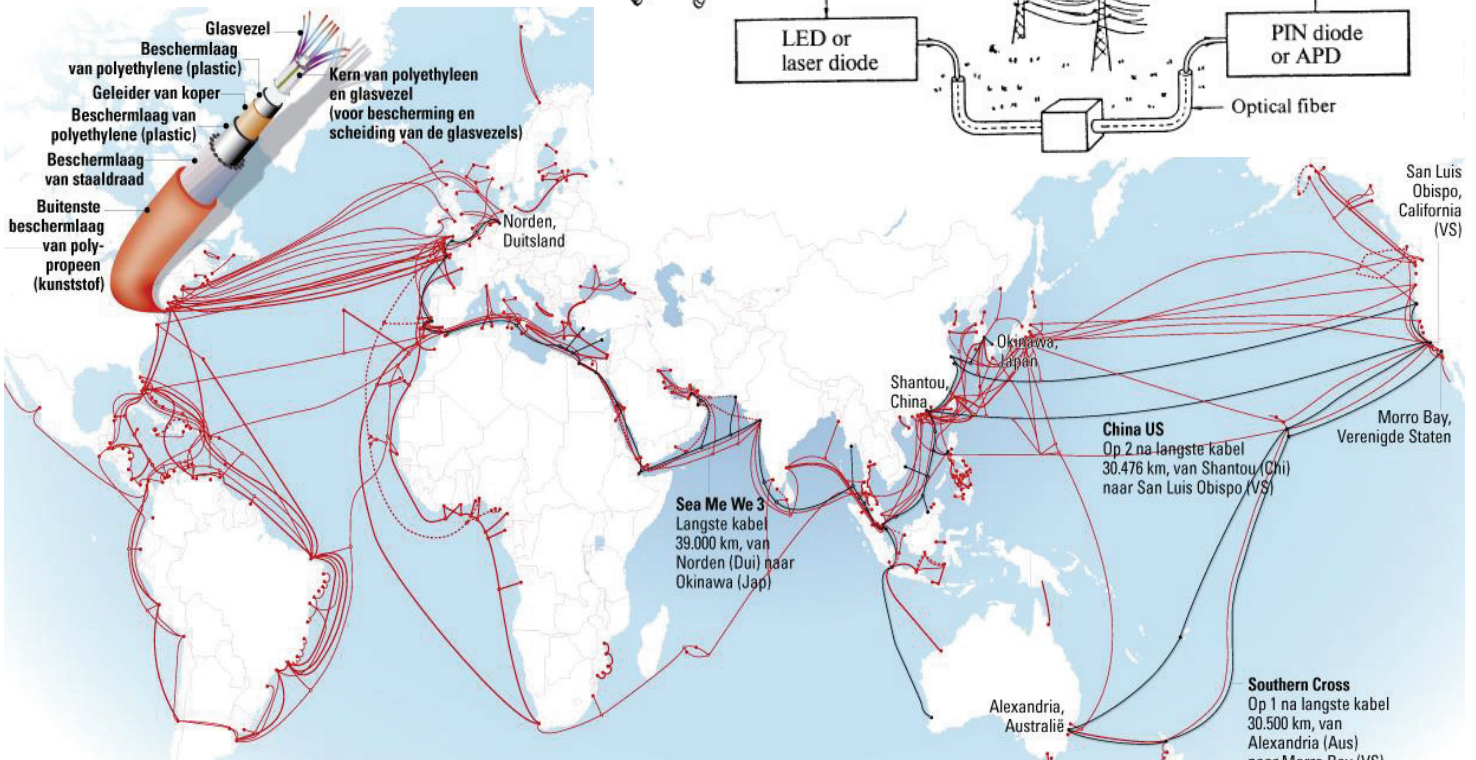
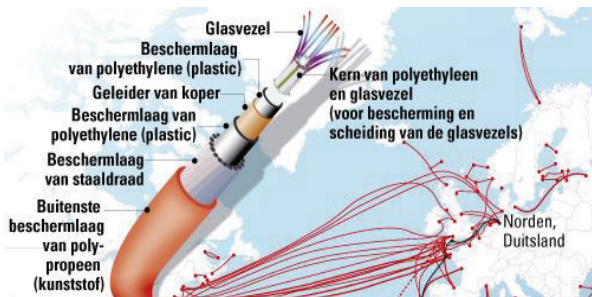
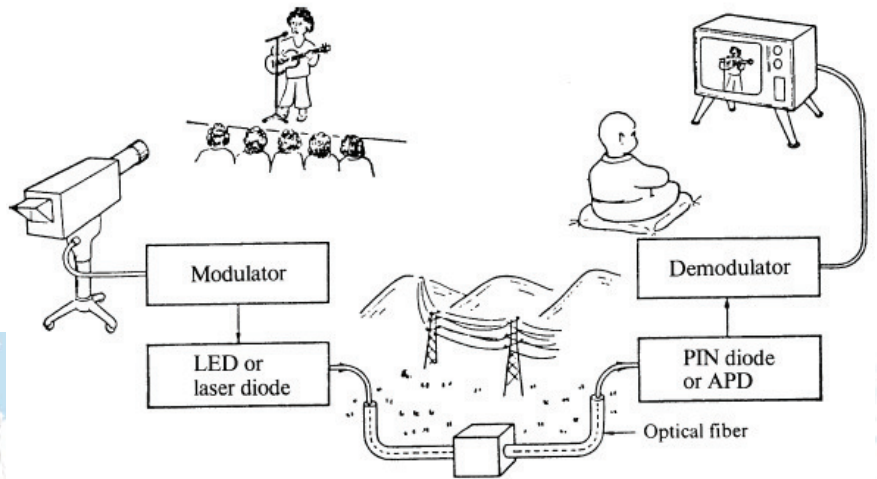
(en esta fibra hay una compensación al menos parcial de la dispersión modal)

### Fibra monomodo

(sin dispersión modal: es en este tipo de fibra donde se notan más los efectos de la dispersión de la guía y del material)

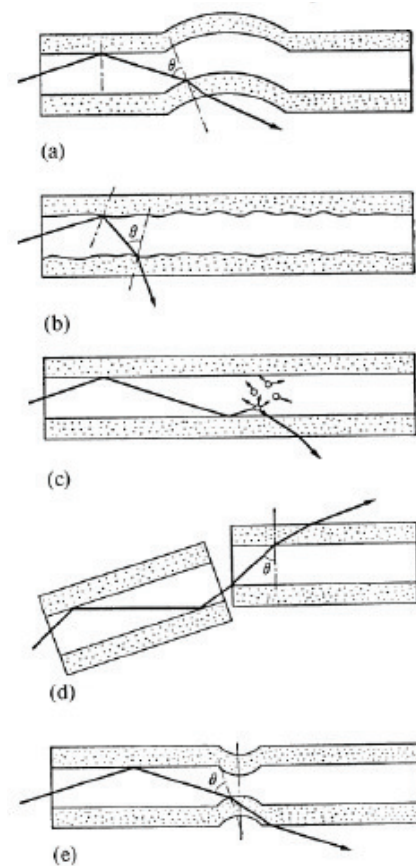
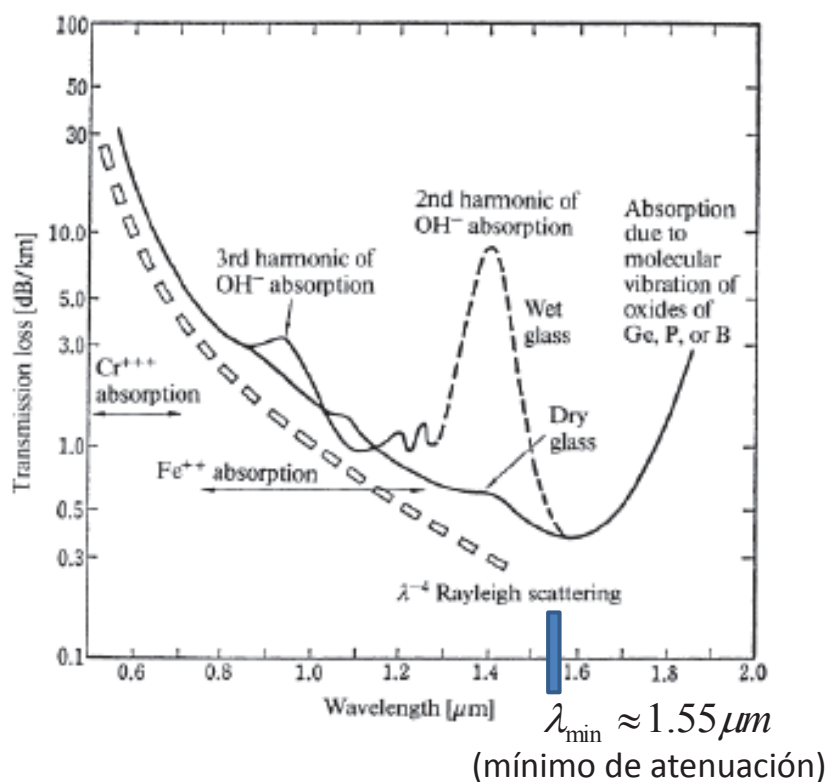


## Comunicación por fibra óptica



# Pérdidas y atenuación

Las pérdidas pueden ser debidas a absorción y/o esparcimiento dentro del material, o ser causadas por defectos estructurales o de las conexiones/uniones →



The OH<sup>-</sup> ion has its fundamental absorption line at  $\lambda = 2.8\mu\text{m}$  with second and third harmonics at 1.4 and 0.95  $\mu\text{m}$ , respectively.

2-61, 2-63

## Comunicación por fibra óptica

Telecomunicaciones: *antena* (mucha energía gastada por bit transmitido: la información llega a toda una región del espacio, no sólo de un punto A a otro B), *fibra óptica*, *cable de cobre*

### Ventajas de la comunicación por fibra

- **bajas pérdidas de potencia** (alta pureza y calidad del vidrio – en el vidrio común, las impurezas hacen que la potencia disminuya de un factor dos en pocos centímetros; en una fibra óptica de calidad esto ocurre al cabo de más de 10 km de propagación ; en un buen cable coaxial de cobre que se utiliza a 50 MHz, la atenuación típica es al menos de un factor 10 por cada km)
- **grande ancho de banda** (frecuencia de la luz es 10000 veces mayor que la frecuencia máxima que se puede obtener en cable con la electrónica (microondas) → más información transmitida a la vez (a frecuencias distintas): 1 fibra = 10<sup>4</sup> equipos de comunicación por microondas)
- **material** más ligero que el cobre, con punto de fusión más alto, y básicamente ilimitado
- **sin interferencias** ni ruido electromagnéticos, sin problemas de puesta a tierra
- **sin generación ni uso de radiación electromagnética** (potencialmente dañina en dosis grandes)
- no hay sobrecalentamiento ni cortocircuitos → no hay peligros de chispas ni incendios (por estas últimas dos propiedades, se utiliza p. ej. en la industria petrolera, dentro y cerca de plantas eléctricas, y en los aviones en lugar de cables apantallados que pesan más)

### Desventajas

- Las conexiones entre fibras son más difíciles de realizar
- La fibra es menos flexible del cobre
- La miniaturización es más problemática que con cobre y silicio



# Ancho de banda y bits por segundo

Una señal temporal compleja varía rápidamente en el tiempo, es decir, tiene frecuencias muy altas y un espectro de frecuencias muy ancho.

Senal	Ancho de banda
Telefono	4 kHz
Cadena FM	200 kHz
Cadena TV	6 MHz

La comunicacion por cable está limitada por la velocidad de modulación de la corriente; si se utiliza una modulación a 300 MHz, y se divide el ancho de banda correspondiente en canales para cadenas de televisión que usan cada una 6 MHz de ancho de banda, se obtienen  $300 \text{ MHz} / 6 \text{ MHz} = 50$  canales que pueden viajar en un cable. Si por otro lado se utiliza luz infraroja a  $1 \mu\text{m}$  de longitud de onda, la frecuencia maxima correspondiente es  $3 \times 10^{14} \text{ Hz} = 3 \times 10^8 \text{ MHz}$ . Esto da un numero de canales  $3 \times 10^8 \text{ MHz} / 6 \text{ MHz} = 50'000'000$  !!!

Para comunicaciones digitales, una señal compleja supone un alto numero de bytes (1 byte = 8 bits) que hay que enviar por segundo. Segun el teorema de muestreo ("sampling"), la frecuencia con la que se digitaliza una señal analógica tiene que ser al menos el doble de la frecuencia máxima que contiene (o sea 2 veces el ancho de banda). Para una cadena de televisión a 6MHz ésto supone codificar a un ritmo de  $2 \times 6 \text{ MHz} = 12 \text{ MHz}$ , es decir, un envío de información de  $8 \times 12 \text{ Megabytes} = 96 \text{ megabits}$  por segundo. El número de bits por segundo que pueden enviarse por fibra depende de la dispersión de la luz en la fibra.

## Dispersión en las fibras ópticas

Cuando un pulso corto se propaga por una fibra, además de bajar en intensidad debido a las pérdidas, también adquiere una durada mas larga debido a fenómenos de dispersión. Las principales fuentes de dispersión son tres. La primera es la más importantes para fibras multimodo; las últimas dos son importantes en fibras monomodo:

- **Dispersión modal**  **2-64**

(distinta velocidad de propagación de grupo de los varios rayos/modos que componen el pulso)

- **Dispersión del material**  **\*2-66**

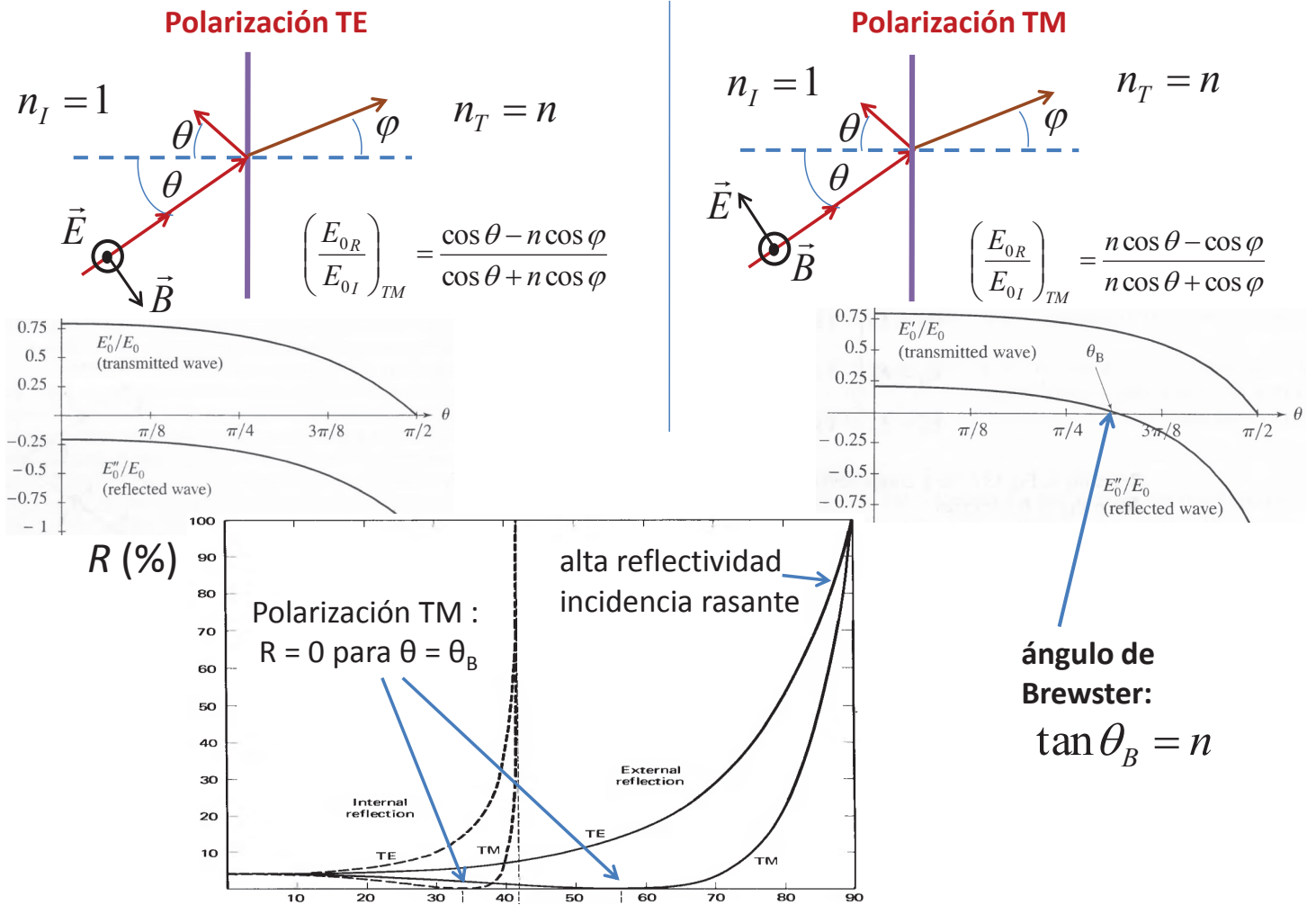
(diferente velocidad de las componentes en frecuencia de un pulso)

- **Dispersión de la guía**

(diferente patrono de propagación en función de la frecuencia: frecuencias distintas tienen distinta distribución de amplitud de campo → la luz penetra más o menos en la funda de la fibra y sufre por tanto más o dispersión causada por a la diferencia de índice entre fibra y funda)

La dispersión limita la comunicación por fibra óptica de manera distinta que las pérdidas por atenuación: **mientras a la atenuación se puede obviar utilizando amplificadores de fibra óptica (VER TEMA 3) para recuperar la intensidad inicial, la dispersión ensancha los pulsos en el tiempo**, transformando un pulso p. ej. rectangular en un pulso de forma arbitraria, "mezclando" así el pulso correspondiente a un bit con el anterior y/o el siguiente; la única manera de obviar a esto es colocar un detector seguido por un emisor (láser de fibra óptica o diodo, ver tema 3) que emita un nuevo pulso de la misma calidad que el pulso inicial.

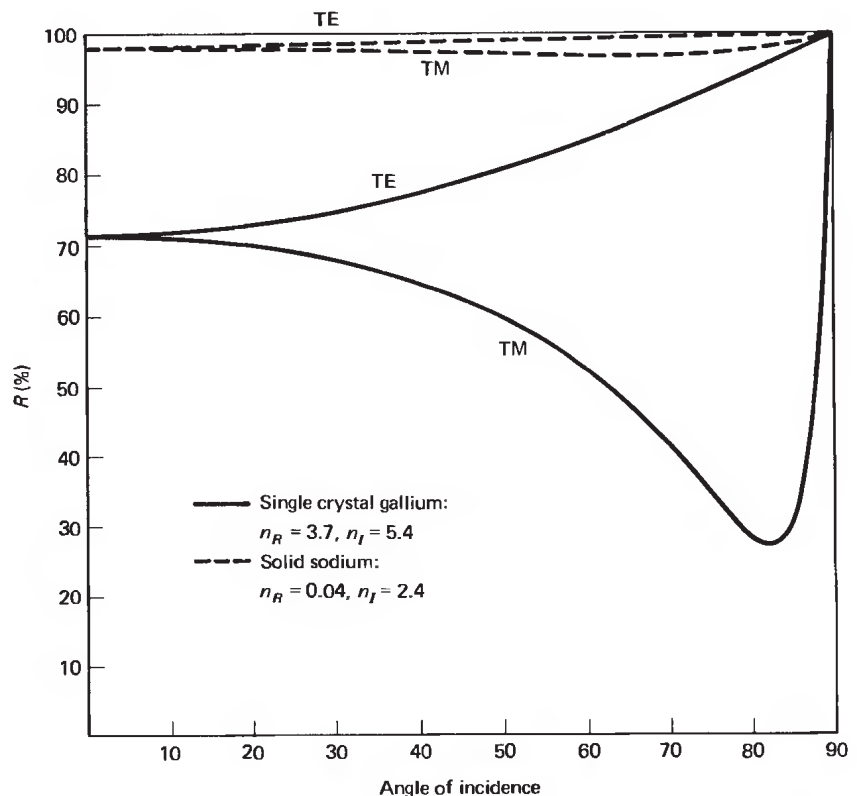
# \* Ecuaciones de Fresnel y ángulo de Brewster



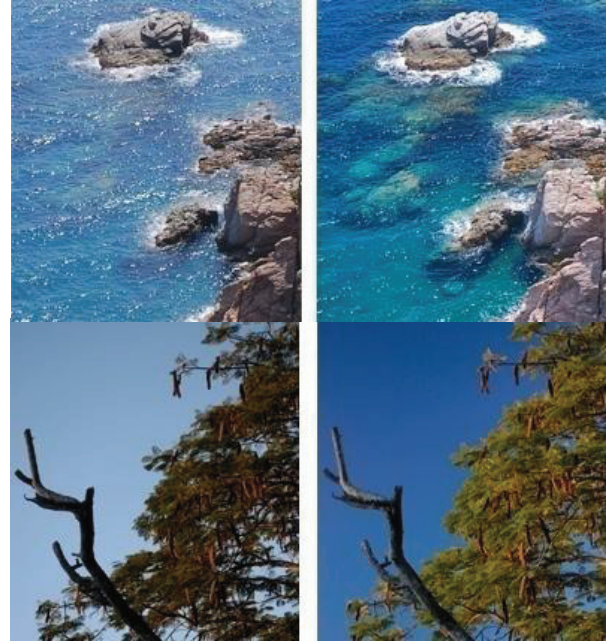
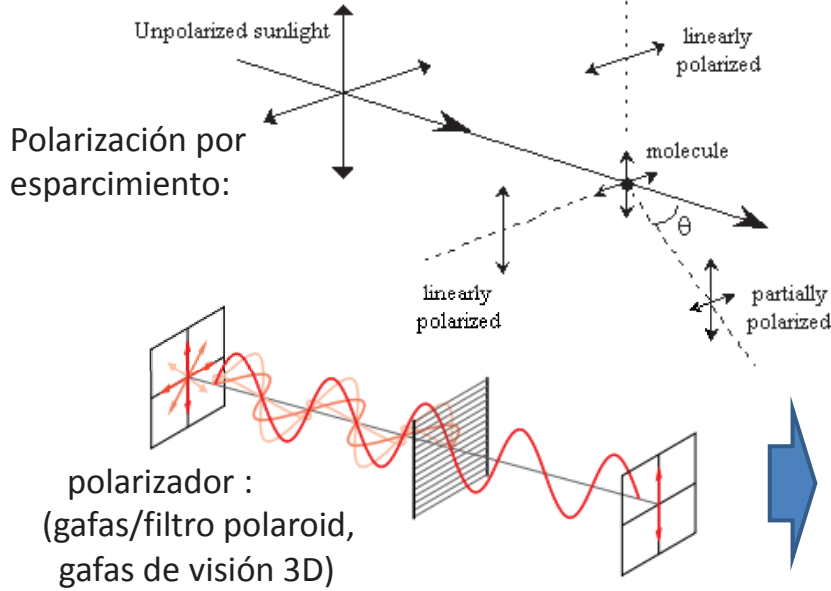
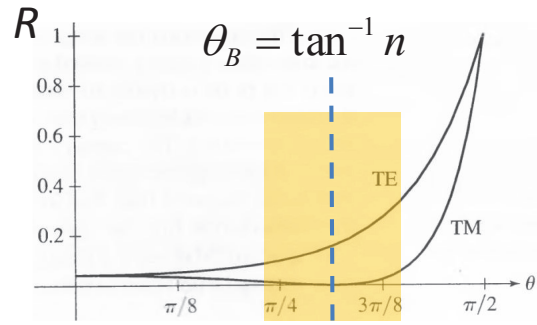
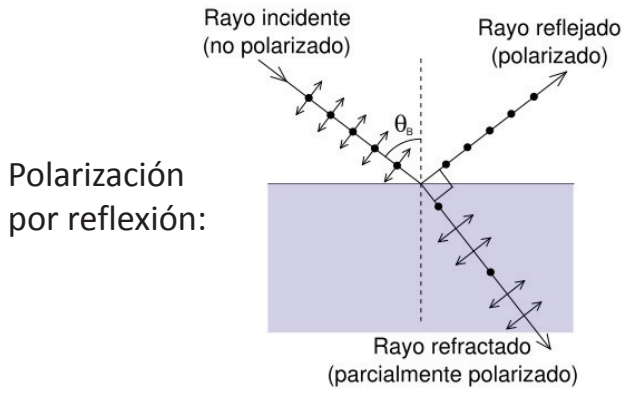
# \* Ecuaciones de Fresnel para un metal

TE:  $\frac{E_R}{E} = \frac{\cos \theta - \sqrt{(n_R^2 - n_I^2 - \sin^2 \theta) + i(2n_R n_I)}}{\cos \theta + \sqrt{(n_R^2 - n_I^2 - \sin^2 \theta) + i(2n_R n_I)}}$

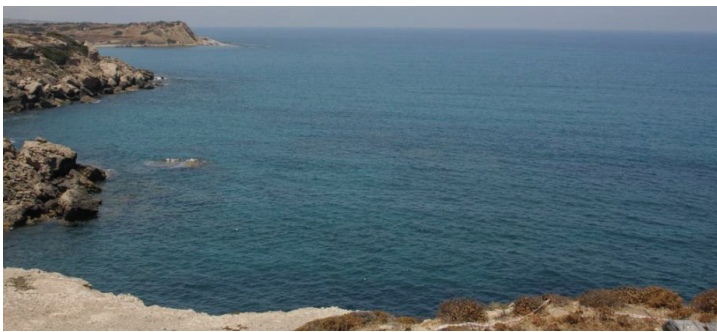
TM:  $\frac{E_R}{E} = \frac{[n_R^2 - n_I^2 + i(2n_R n_I)] \cos \theta - \sqrt{(n_R^2 - n_I^2 - \sin^2 \theta) + i(2n_R n_I)}}{[n_R^2 - n_I^2 + i(2n_R n_I)] \cos \theta + \sqrt{(n_R^2 - n_I^2 - \sin^2 \theta) + i(2n_R n_I)}}$



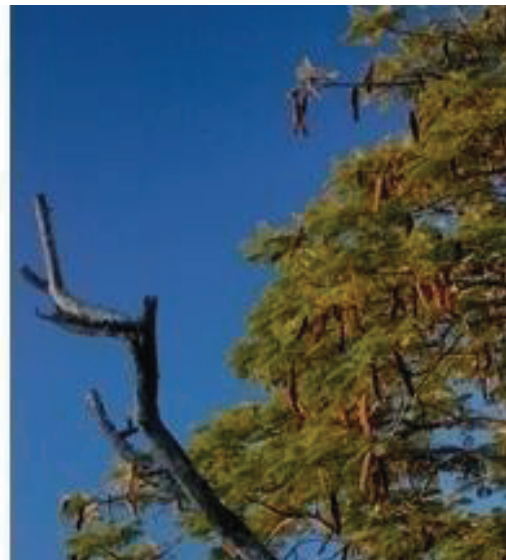
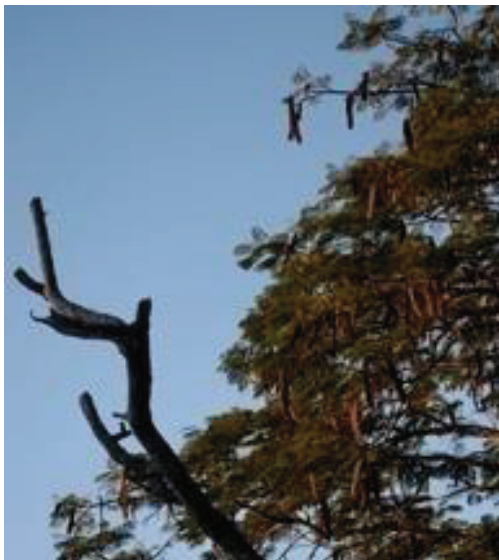
# Polarización: filtros y gafas polaroid



SIN gafas polaroid



CON gafas polaroid





# \*Luz en medios magnéticos

Hasta ahora hemos considerado que los medios en que se propaga la luz eran no magnéticos, o sea caracterizados por  $\mu_r = 1$ , con lo que el índice de refracción estaba dado por  $n(\omega) = [\epsilon_r(\omega)]^{1/2}$ . Sin embargo, según las ecuaciones de Maxwell la expresión para  $n$  en un medio magnético es

$$n(\omega) = [\epsilon_r(\omega)\mu_r(\omega)]^{1/2}$$

Sabemos que la permitividad relativa  $\epsilon_r$ , sobre todo cerca de resonancias de absorción, es en general compleja, y se puede escribir por tanto como:  $\epsilon_r = |\epsilon_r| \exp(i\phi_\epsilon)$

De la misma manera, cabe esperar que en materiales con resonancias de tipo magnético, la permeabilidad relativa  $\mu_r$  sea también compleja, es decir:  $\mu_r = |\mu_r| \exp(i\phi_\mu)$

El índice de refracción resulta:  $n = (\epsilon_r \mu_r)^{1/2} = \sqrt{|\epsilon_r| |\mu_r|} \exp\left(i \frac{\phi_\epsilon + \phi_\mu}{2}\right)$

De aquí se ve que la fase del índice de refracción es el promedio entre las fases de  $\epsilon_r$  y  $\mu_r$ . Para un medio magnético en el que  $\mu_r$  es real (como lo es  $\epsilon_r$  en un dieléctrico perfecto sin corrientes), la permeabilidad magnética tan sólo cambia el valor de la velocidad de propagación de la luz en el medio. Sin embargo, cerca de resonancias de tipo magnético pueden aparecer fenómenos muy inusuales. Por ejemplo, si las partes reales de  $\epsilon_r$  y  $\mu_r$  son ambas negativas, la parte real del índice de refracción también es negativa: si por ejemplo  $\epsilon_r = \mu_r = -1 = \exp(i\pi)$ , entonces

$$n = \sqrt{|\epsilon_r| |\mu_r|} \exp\left(i \frac{\phi_\epsilon + \phi_\mu}{2}\right) = \sqrt{1} \exp\left(i \frac{\pi + \pi}{2}\right) = \exp(i\pi) = -1$$

Los materiales (artificiales) con índice de refracción negativo se llaman METAMATERIALES

# \*Metamateriales e índice de refracción negativo

La condición que la parte real de la permitividad sea negativa es imposible en electrostática, pero no lo es para campos oscilantes. Por ejemplo, según el modelo de Lorentz se ha:

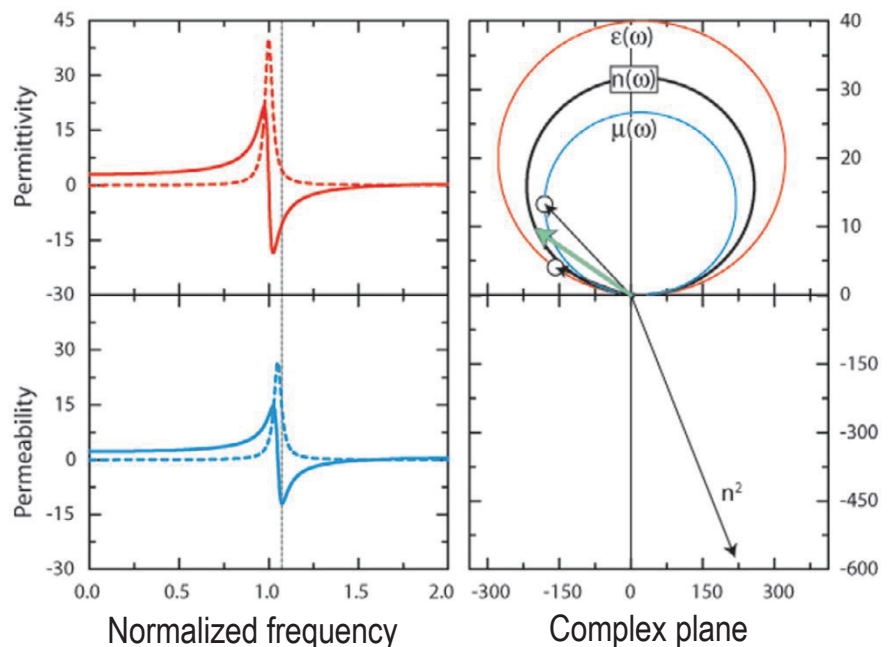
$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\beta\omega} = 1 + \omega_p^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\beta\omega)(\omega_0^2 - \omega^2 + i\beta\omega)} = 1 + \underbrace{\frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\beta\omega)^2}}_{\epsilon_r'} + i \underbrace{\frac{\beta\omega\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\beta\omega)^2}}_{\epsilon_r''}$$

Vemos que la parte imaginaria  $\epsilon_r''$  de la permitividad es siempre positiva, pero la parte real  $\epsilon_r'$  puede ser negativa, sobre todo cerca de la resonancia de absorción  $\omega_0$ .

De la misma forma, para campos oscilantes la permeabilidad  $\mu_r$  puede escribirse, cerca de una resonancia de tipo magnético (a la frecuencia  $\omega_m$ ) como:

$$\mu_r(\omega) = 1 + \frac{F\omega^2}{\omega_m^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} = \mu_r' + i\mu_r''$$

Si  $\omega_0$  y  $\omega_m$  están bastante cerca, entonces para frecuencias ligeramente superiores a ambas las partes reales de  $\epsilon_r$  y  $\mu_r$  y por lo tanto de  $n$  también, pueden ser negativas, como se ve en la gráfica

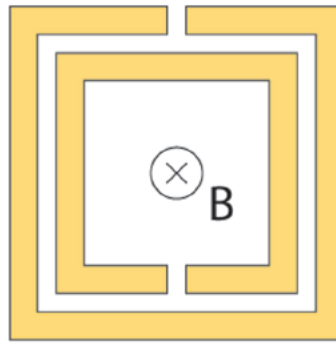


# \*Resonancias magnéticas y eléctricas

Las estructuras que se utilizan para obtener resonancias de tipo magnético son circuitos metálicos abiertos como los de la derecha: ("split-ring resonator", SRR)

Actúan como pequeños circuitos LC: por la ley de Faraday, el campo magnético de la luz incidente genera corrientes inducidas y por tanto acumulación de carga en los huecos.

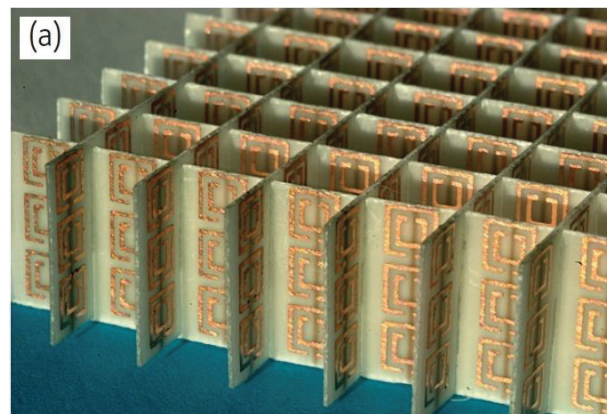
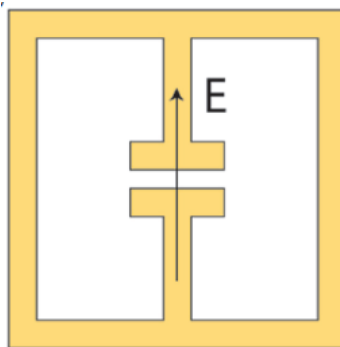
Tales circuitos LC tienen una resonancia para  $\omega_m \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$



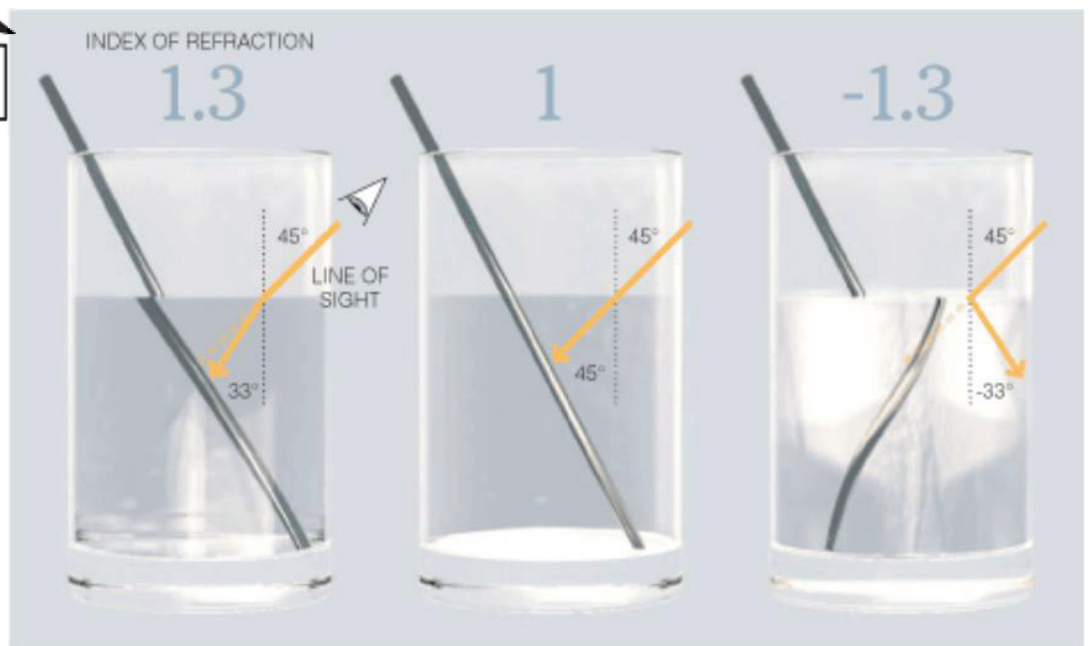
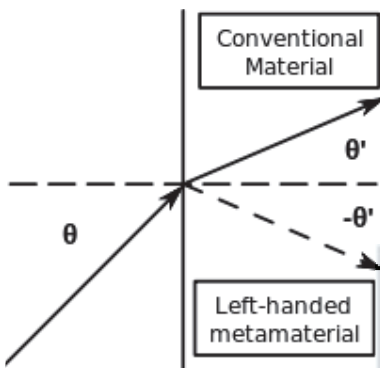
D. R. Smith, et al., Phys. Rev. Lett. 84, 4184 (2000)



Resonancias eléctricas a frecuencias cercana a  $\omega_m$  se obtienen utilizando estructuras como esta → (que funciona como pequeño condensador), o más bien utilizando una red periódica de hilos/postes metálicos



# \*Refracción negativa



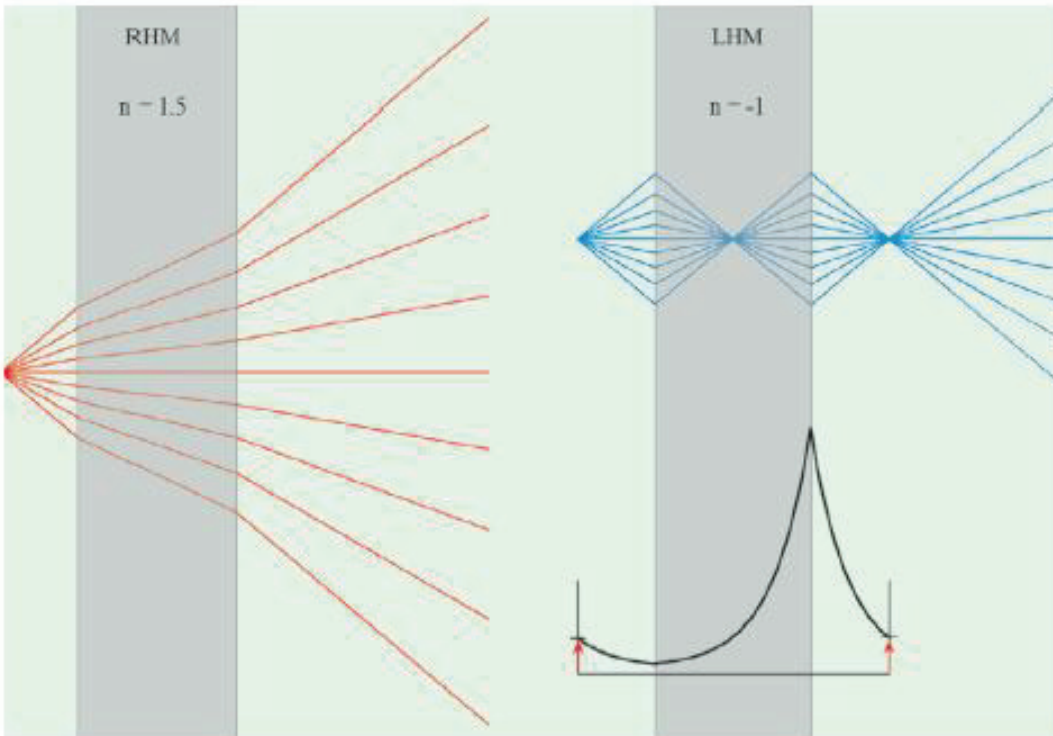
**POSITIVE REFRACTION**  
With a refraction index of 1.3, water bends light inward, closer to the perpendicular.

**NO REFRACTION**  
A hypothetical liquid with a refraction index of 1, the same as the surrounding air, would not distort light.

**NEGATIVE REFRACTION**  
A hypothetical liquid with a negative refraction index would bend light the "wrong" way.



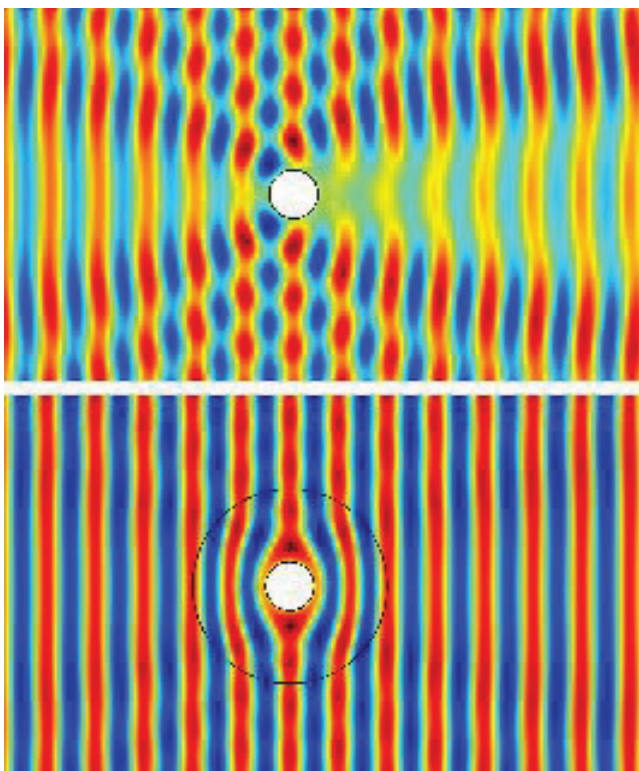
## \*Aplicación: superlentes



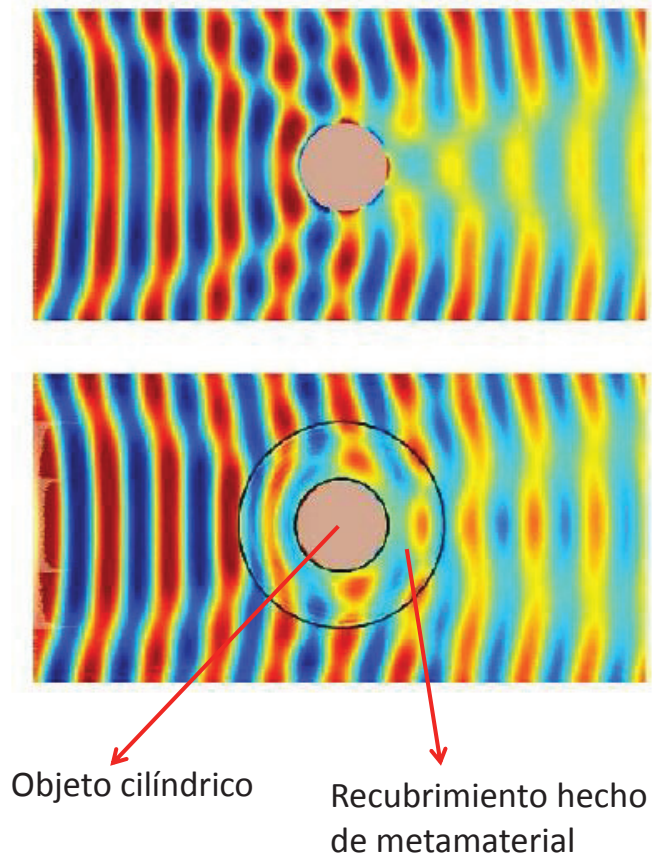
Un índice de refracción negativo afecta muchas propiedades ópticas: la ley de Snell queda completamente modificada, y por tanto una lente convergente se vuelve divergente y viceversa; la velocidad de fase es invertida respecto a un medio normal; la presión de radiación se vuelve una tensión de radiación; también la emisión de luz por cargas/fuentes en movimiento se ve afectada (el efecto Doppler funciona al revés, y la radiación Cerenkov se emite en dirección contraria a la en un material normal)

## \*Invisibilidad electromagnética

Simulación



Experiment



Objeto cilíndrico

Recubrimiento hecho de metamaterial