Cronología tecnológica

Protagonistas

Asignaturas

1650 Instrumentos mecánicos, hidráulicos, a gas ...

Arqímedes, Kepler, Galileo, Hooke, Newton, Euler, Huygens, d'Alembert — Mecánica

primeros sistemas de vapor

1750

Carnot, Joule, Kelvin, Clausius, Boltzmann, Helmholtz, Gibbs — Termodinámica

1780-1830: **1ª revolución industrial** (máquinas de vapor)

Lavoisier, Gay-Lussac, Avogadro, Dalton, Arrhenius, Mendeleev, Kekulé, Lewis — Química

1850

1870-1900: **2ª revolución industrial** (electricidad + química industrial (petróleo, fármacos...))

Franklin, Volta, Ohm, Kirchoff, Ampère, Faraday, Maxwell, Hertz — Electromagnetismo

Materiales

1950

1960-1990: **3ª revolución industrial** (electrónica (silicio), informática, optoelectrónica)

Óptica aplicada

Hoy y mañana: genética, nanotecnología, energías limpias

Tiempo (año d.C.)

Aplicaciones de la mecánica: máquinas simples (amplifican la fuerza humana): plano inclinado, martillo, polea, polipasto, palanca (normal e hidráulica), torno y además: ruedas, suspensiones, amortiguadores, relojes de péndulo...

Mecànica Fonamental

http://atenea.upc.edu

roberto.macovez@upc.edu (despacho 11.45, planta 11)

http://gcm.upc.edu/members/roberto-macovez

Mecánica: ESTUDIO DEL MOVIMIENTO Y SUS CAUSAS

- Sistemas rígidos (cuerpos sólidos)
  - Cinemática
  - Estática y Dinámica
- Sistemas blandos o elásticos (líquidos, gases, muelles)
  - Fluidoestática
  - Oscilaciones y Ondas

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$NOTA = \underbrace{0.6EXfinal + 0.1MQ + 0.1EvC1 + 0.1EvC2}_{\text{4 pruebas escritas}} + \underbrace{0.1LAB}_{\text{3 sesiones}}$$

1ª sesión de LAB: mitad de septiembre! LAB: planta 6

Entregar por parejas el problema 1.5.1 (escrito a mano)

Leer párrafos 1.3 y 1.5 de las notas de clase

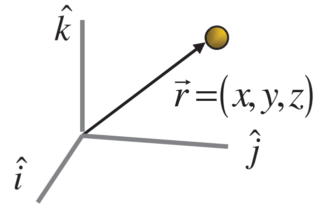
MOVIMIENTO de un cuerpo = TRANSLACIÓN + ROTACIÓN + DEFORMACIÓN

§1.7 Cinemàtica de la partícula

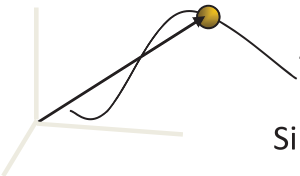
Una partícula (o "punto material") es un objeto de dimensiones despreciables respecto a las dimensiones de su trayectoria (distancias y radio de curvatura), y que no gira sobre si misma.

El **vector posición** de una partícula (o "punto material") es el vector:

$\vec{r} = (x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, de módulo $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



En el espacio, la partícula tiene tres **grados de libertad**, ya que se necesitan 3 números para especificar su posición (en el plano, sólo 2)

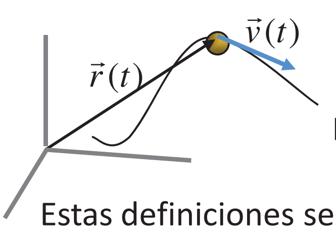


La **trayectoria temporal** de la partícula es la curva $\vec{r}(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$ descrita por la partícula. El **desplazamiento** entre dos puntos de la trayectoria es el vector $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Si los dos puntos están infinitamente próximos: $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$

El **vector velocidad instantánea** $\vec{v}(t)$ de la partícula es la derivada vectorial de la posición:

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)}$$



El vector velocidad es tangente a la trayectoria en cada punto (se ve gráficamente tomando el límite)

La aceleración de la partícula es: $\boxed{\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right)}$

Estas definiciones se pueden invertir para sacar (por ejemplo) la posición de la velocidad:

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt + \vec{C} = \left(\int v_x(t)dt + C_x, \int v_y(t)dt + C_y, \int v_z(t)dt + C_z\right)$$

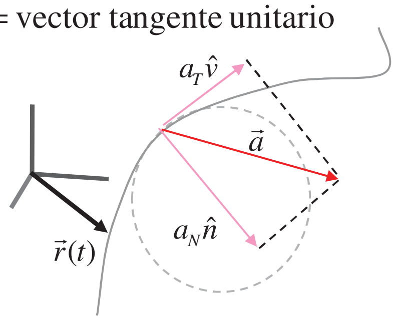
P-1.7.3 + lo mismo con $\vec{a}(t) = (0, 0, -g)$ y $\vec{v}(t=0) = (2, 0, 1)$

P-1.3.1 (sin punto (d)), P-1.7.2

El vector velocidad $\vec{v}(t)$ es siempre tangente a la trayectoria $\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}(t) = v(t)\hat{v}(t) = v\hat{v} \\ \hat{v} = \text{vector tangente unitario} \end{cases}$

La aceleración es $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\hat{v}\,v)}{dt} = \hat{v}\frac{dv}{dt} + v\frac{d\hat{v}}{dt}$. Ya que $\frac{d\hat{v}}{dt} \perp \hat{v}$

(esto sigue de $\frac{d(\hat{v}\cdot\hat{v})}{dt} = 2\hat{v}\cdot\frac{d\hat{v}}{dt} = \frac{d(|\hat{v}|^2)}{dt} = 0$), llamando $\hat{n}$ el vector de módulo 1 ortogonal a $\hat{v}$ $\Rightarrow$ $\vec{a}(t) = \hat{v}\frac{dv}{dt} + v\left|\frac{d\hat{v}}{dt}\right|\hat{n} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$



$\Rightarrow$ $\vec{a}$ tiene una componente tangente a la trayectoria y otra normal

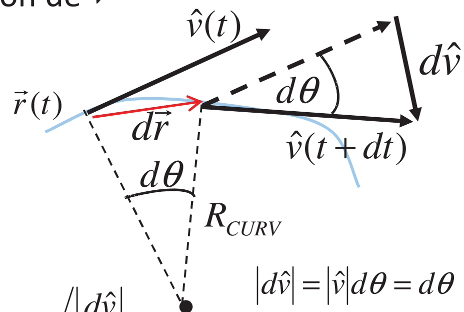
variación del módulo de $\vec{v}$

variación de dirección de $\vec{v}$

Aceleración normal y radio de curvatura:

Para un desplazamiento $d\vec{r}$ infinitésimo, la curva se confunde con el segmento rectilíneo y con el arco de círculo tangente:

$|d\vec{r}| = d\ell = R_{CURV}\,d\theta$, donde R_{CURV} es el "radio de curvatura"



$|d\hat{v}| = |\hat{v}|d\theta = d\theta$

Se ve gráficamente que $\frac{|d\hat{v}|}{|\hat{v}|} = d\theta = \frac{|d\vec{r}|}{R_{CURV}}$. Dado que $|\hat{v}| = 1$,

$\Rightarrow \left|\frac{d\hat{v}}{dt}\right| = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R_{CURV}}\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{v}{R_{CURV}}$. Por lo tanto $\boxed{\vec{a}_N = \hat{n}\frac{v^2}{R_C}}$ y $R_{CURV} = v \Big/ \left|\frac{d\hat{v}}{dt}\right|$

Resumen fórmulas: (todas se calculan a partir de $\vec{v}(t)$)

$$\begin{cases} \hat{v}(t) = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \\ \hat{n}(t) = \frac{d\hat{v}}{dt} \Big/ \left|\frac{d\hat{v}}{dt}\right| \end{cases}$$

$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$

$\vec{a}_N = \hat{n}v\left|\frac{d\hat{v}}{dt}\right| = \hat{n}\frac{v^2}{R_C}$ $\quad \vec{a}_T = \hat{v}\frac{dv}{dt}$ $\quad R_C = v \Big/ \left|\frac{d\hat{v}}{dt}\right|$

Casos importantes: movimiento rectilíneo uniforme, uniformemente acelerado o periódico, movimiento circular uniforme

P-1.7.4 (sólo circular uniforme), **P-1.7.5**

Tema 2: Mecánica de una partícula

Las leyes de este tema son válidas para partículas. Más adelante (§3.2) veremos que también valen para describir el movimiento de translación de un cuerpo rígido sometido a fuerzas exteriores. En concreto, la aceleración del centro de masas del cuerpo es dada por la 2ª Ley de Newton (tomando sólo las fuerzas exteriores).

§2.1 y 2.2 Leyes de Newton, fuerza, masa, momento lineal

1ª Ley de Newton: un cuerpo sobre que no actúa ninguna "causa" (fuerza), se mueve con velocidad constante (movimiento rectilíneo uniforme) (ESTÁTICA → $\vec{F} = 0$).

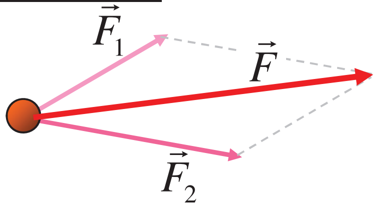
2ª Ley de Newton: la fuerza que actúa sobre una partícula es proporcional a la aceleración de la misma; la constante de proporcionalidad es la masa de la partícula, o sea la cantidad de materia (←→relacionada con su peso).

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a} = \dot{\vec{p}}}$$

El vector $\vec{p} = m\vec{v}$ se llama momento lineal o cantidad de movimiento

La 2ª Ley implica la 1ª. Ambas son válidas sólo en sistemas de referencia inerciales (es decir, fijos o en movimiento rectilíneo uniforme)

Como las aceleraciones, que son vectores, las fuerzas también se suman como vectores:



La unidad de fuerza en el SI es el newton (N): $1\mathrm{N} = 1\mathrm{kg}\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

$\vec{F} = m\vec{a}$ {
Define la fuerza: la fuerza es la causa de la aceleración de la partícula; puede ser función de la posición y de la velocidad (y del tiempo), pero **no** de la aceleración.
Define la masa: si sobre la misma partícula actúan fuerzas diferentes $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \ldots$, que causan acceleraciones $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \ldots$, el cociente de los módulos es constante, igual a la **masa (inercial)** de la partícula: $m = \dfrac{F_1}{a_1} = \dfrac{F_2}{a_2} = \ldots$
}

Se define el **impulso $\vec{I}$ suministrado por una fuerza $\vec{F}$ en el intervalo** $t_1 \mapsto t_2$ como $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$

De la 2ª Ley de Newton sigue inmediatamente el: $\boxed{\textbf{Teorema del momento lineal: } \vec{I} = \Delta\vec{p}}$

§2.5 Aplicación directa de la 2ª Ley de Newton

P-2.1.2 , P-2.1.3, P-2.2.1, P-2.5.5

P-2.2.2, P-2.2.3, P-4.1.1

La 2a ley de Newton nos dice como se mueve la partícula: es una ecuación diferencial que en algunos casos puede ser integrada (dos veces) para encontrar la trayectoria temporal $\vec{r}(t)$.
En cada integración se introduce una constante (vectorial): $\vec{C}_1$y $\vec{C}_2$. Si conocemos posición y velocidad en un instante t_0 inicial $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$ tendremos: $\begin{cases} \vec{r}_0 = \vec{f}(\vec{C}_1, \vec{C}_2, t_0) \\ \vec{v}_0 = \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial t}(\vec{C}_1, \vec{C}_2, t_0) \end{cases}$

Si conocemos la función *f*, $\vec{C}_1, \vec{C}_2$ se calculan a partir de $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$, para encontrar: $\vec{r}(t) = \vec{r}(\vec{r}_0, \vec{v}_0, t)$

Ej.: **fuerza que sólo depende del tiempo** $\vec{F} = \vec{F}(t)$

→ Integración directa → $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_t(t) \Rightarrow \vec{r}(t) = \dfrac{1}{m}\int\left(\int \vec{F}_t(t)\,dt\right)dt$

Caso particular: fuerza constante. En este caso la 2a Ley de Newton es: $m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m} = \mathrm{ct}$

Integrando 2 veces: $\vec{r}(t) = \vec{C}_1 + \vec{C}_2\, t + \dfrac{1}{2}\dfrac{\vec{F}}{m}t^2$

Con las condiciones iniciales $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$, $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$, se ha pues:

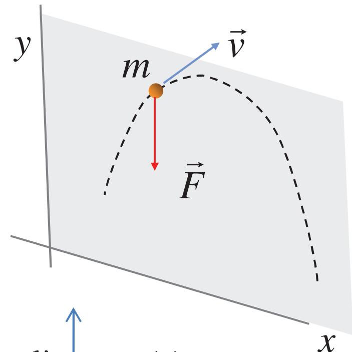
$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 = \vec{C}_1 + \vec{C}_2\, t_0 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\vec{F}}{m}t_0^2 \\ \dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0 = \vec{C}_2 + \dfrac{\vec{F}}{m}t_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{C}_2 = \vec{v}_0 - \dfrac{\vec{F}}{m}t_0 \\ \vec{C}_1 = \vec{r}_0 - \vec{v}_0 t_0 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\vec{F}}{m}t_0^2 \end{cases}$$

La ecuación de la trayectoria es pues:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\,(t - t_0) + \frac{1}{2}\frac{\vec{F}}{m}(t - t_0)^2}$$

Casos particulares de fuerzas constantes: **peso** y **fricción dinámica**

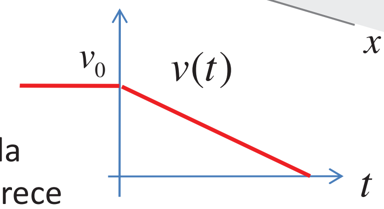
Fuerza peso: $m\vec{a} = \vec{F} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m} = \vec{g} = \text{ct}$



Si tomamos un sistema de referencia con el eje y paralelo a la fuerza y tal que la velocidad inicial esté en el plano (x, y), la trayectoria

$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\,(t - t_0) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\vec{F}}{m}(t - t_0)^2$ es una parábola en tal plano.

Rozamiento dinámico: $\left|\vec{F}_{RD}\right| = \mu_D N \;,\quad \vec{F}_{RD} = -\mu_D N \hat{v}$



Si N = const, $\left|\vec{F}_{RD}\right|$ = const. Si además $\hat{v}$ = const, $\vec{F}_{RD}$ = const

La ley horaria (deceleración uniforme) vale sólo hasta que la partícula se para, es decir hasta que v = 0, porque entonces la fricción desaparece

1) Calcular a que ángulo respecto del suelo hay que lanzar un objeto para que llegue lo más lejos posible, y calcular la velocidad del objeto justo antes que toque el suelo; 2) Hallar la dinámica de una masa sujeta a fricción dinámica ($\mu_D = 0.1$) que sale del origen con $v_0 = 3\,\text{ms}^{-1}$

Otro caso de fuerza integrable: **fuerza de un muelle** (movimiento armónico)

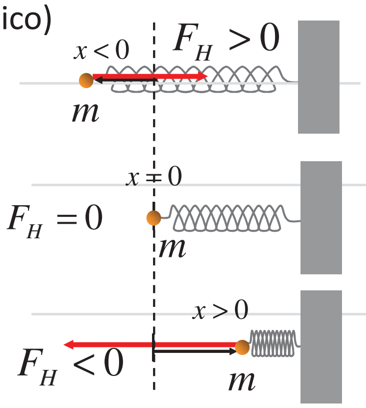
Fuerza de un muelle (o de Hooke): $F_H = -k(l - l_N)$

Definiendo un nuevo sistema de referencia en que $x = l - l_N$, se ha:

$F = m\ddot{l} = m\ddot{x} = -kx$, o sea: $\ddot{x} = -\dfrac{k}{m}x$, cuya solución general es:

$\boxed{x(t) = A\sin(\omega(t - t_0) + \varphi_0)}$, con:

$\boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi/\omega}$, $\boxed{\sin\varphi_0 = \dfrac{x(t_0)}{A}}$, $\boxed{A = \sqrt{x(t_0)^2 + \dfrac{v(t_0)^2}{\omega^2}} = \sqrt{\dfrac{2E}{k}}}$



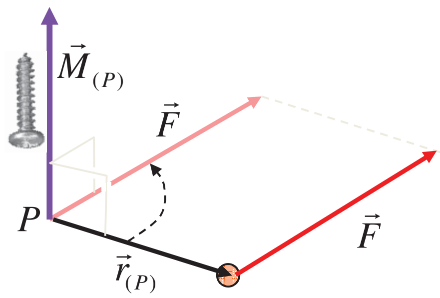
Práctica 1 de laboratorio

P-2.5.3

Otras estrategias para determinar el movimiento: <u>momento angular y energía</u>

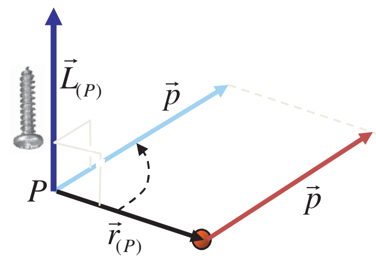
§2.3 Momento de una fuerza y momento angular

Se define el **momento** $\vec{M}_{(P)}$ **de una fuerza** $\vec{F}$ **respecto a un punto** P como: $\boxed{\vec{M}_{(P)} = \vec{r}_{(P)} \times \vec{F}}$



$\vec{r}_{(P)} = \vec{r} - \vec{r}_P$ es el vector posición medido desde el punto de aplicación P de la fuerza.

Se define el **momento angular** $\vec{L}_{(P)}$ **de una partícula respecto a** P como: $\boxed{\vec{L}_{(P)} = \vec{r}_{(P)} \times \vec{p}}$



A partir de la Ley de Newton $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, multiplicamos ambos términos a la izquierda por $\vec{r}_{(P)} \times$

Si P es un punto fijo del sistema de referencia (inercial), $\dot{\vec{r}}_{(P)} = \vec{v}$

Entonces $\vec{r}_{(P)} \times \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\vec{r}_{(P)} \times \vec{p})$, ya que $\vec{v} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$. De esto se obtiene que:

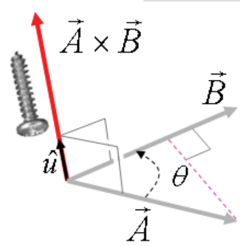
$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{(P)}}{dt} = \vec{M}_{(P)}}$$

Si en particular el momento de la fuerza que actúa sobre la partícula es cero, entonces el momento angular se mantiene constante (cuidado: respecto al mismo punto *P*!!)

P-2.3.1

P-2.3.4

Producto vectorial: $\vec{A} \times \vec{B} \equiv \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \left(A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x\right)$



$\vec{A} \times \vec{B} = B\,A\sin\theta\,\hat{u}$

Definiendo el **impulso angular** $\vec{Y}_{(P)}$ **suministrado por el momento** $\vec{M}_{(P)}$ **de una fuerza en el intervalo** $t_1 \mapsto t_2$ como:

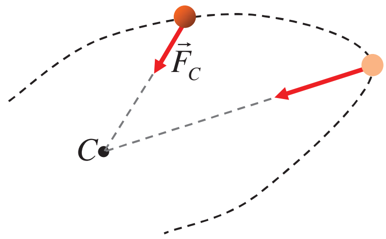
$$\vec{Y}_{(P)} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{(P)} dt$$, tenemos el **Teorema del momento angular:** $\boxed{\vec{Y}_{(P)} = \Delta\vec{L}_{(P)}}$

El momento angular se mantiene constante en particular en tres casos importantes:

1) Si $\vec{F} = 0$ (movimiento rectilineo uniforme), $\vec{L}_{(P)} = \text{const} \ \ \forall P$
2) En un movimiento circular uniforme, $\vec{L}_{(O)} = \text{const}$, siendo *O* el centro del círculo
3) En caso de fuerza central dirigida hacia un punto *C*, $\vec{L}_{(C)} = \text{const}$

Fuerzas centrales

Una fuerza central es una fuerza cuya recta de acción siempre pasa por un mismo punto C. Ejemplos: la fuerza gravitatoria del Sol sobre un planeta; la fuerza electrostática de una carga fija sobre otra partícula cargada; la tensión de una cuerda fijada en un extremo.

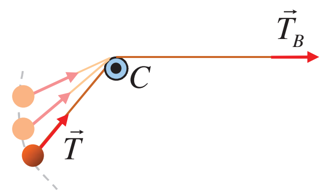


$$\vec{F}_{GU} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

P-2.3.4

En el caso de fuerza central, el momento de la fuerza respecto al punto C Es siempre cero, y por tanto

$$\frac{d\vec{L}_{(C)}}{dt} = \vec{M}_{(C)} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{(C)}}{dt} = 0$$



Se puede demonstrar que toda fuerza central cumple la:
2ª Ley de Kepler (como consecuencia de la conservación de $\vec{L}_{(C)}$)
→ **Ver e2.3.2**

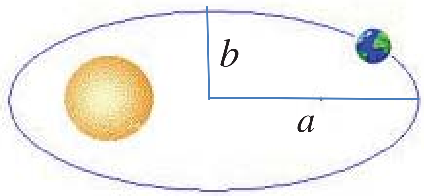
P-2.3.3 P-2.3.5

Leyes de Kepler

(se demuestran a partir de la 2ª Ley de Newton con $\vec{F}_{GU} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$)

Primera Ley

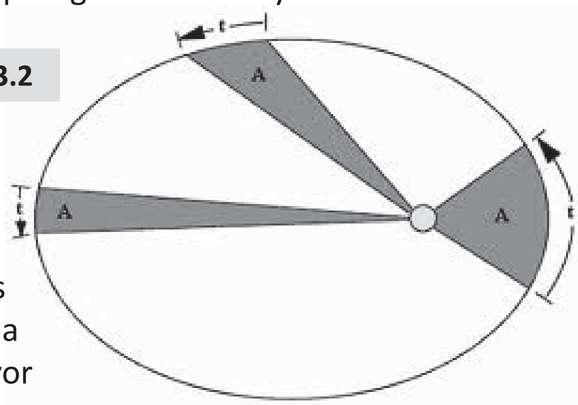
Los planetas describen orbitas elípticas alrededor del sol, con el sol ocupando uno de los focos de la elipse



Segunda Ley

La velocidad de un planeta varía en el tiempo, de forma que el vector que une el sol al planeta cubre áreas iguales en tiempos iguales. Esta ley es una consecuencia directa de $\vec{L}_{(C)} = const$

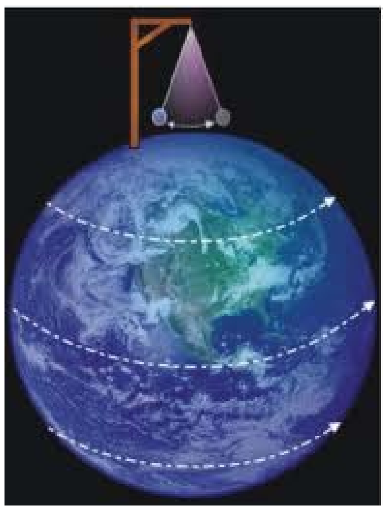
e-2.3.2



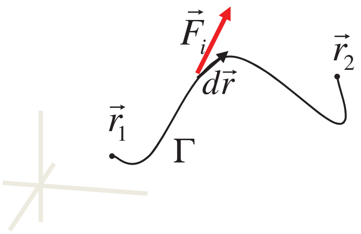
Tercera Ley

El cuadrado del periodo de revolución de un planeta es directamente proporcional a la longitud del semieje mayor al cubo: $T^2 \propto a^3$

Otra "aplicación" en la que tan sólo se conserva la dirección de $\vec{L}_{(C)}$: péndulo de Foucault →



§2.4 Trabajo, potencia, energía potencial, energía cinetica



El **trabajo** W_i de una fuerza $\vec{F}_i$ a lo largo de una curva Γ de un punto $\vec{r}_1$ a otro $\vec{r}_2$ es el integral: $\boxed{W_i = \int_{\Gamma:\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}}$

Si la curva Γ es la trayectoria de una partícula, $d\vec{r} = \vec{v}dt$, y el trabajo W_i puede escribirse como:

$W_i = \int_{t_1}^{t_2} \wp_i \, dt$, siendo $\wp_i = \vec{F}_i \cdot \vec{v}$ la **potencia** (instantánea) desarrollada por la fuerza $\vec{F}_i$

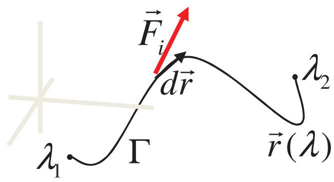
P-2.4.2

La unidad de trabajo en el SI és el julio: $\mathrm{J} = \mathrm{N\,m}$; la unidad de potencia es el vatio (W): $1\mathrm{W} = 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$

¿<u>como se calcula el trabajo</u>? la trayectoria es una curva 1D y se puede describir a través de un único parámetro real λ (p. ej., un ángulo, o el tiempo *t*). La relación $\vec{r}(\lambda)$ se llama ecuación paramétrica de la curva Γ descrita por la trayectoria. Si se conoce una expresión paramétrica de Γ, el integral que define el trabajo puede escribirse en función del parámetro λ

Si la expresión paramétrica de la curva es p. ej. $\vec{r}(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))$, $P_1 = \vec{r}(\lambda_1)$, $P_2 = \vec{r}(\lambda_2)$,

entonces:
$$W_i = \int_{\Gamma:\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \vec{F}_i \cdot \frac{d\vec{r}}{d\lambda} d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(F_x \frac{dx}{d\lambda} + F_y \frac{dy}{d\lambda} + F_z \frac{dz}{d\lambda} \right) d\lambda$$



P-2.4.1 sin (c) P-2.4.6

¿ <u>Para qué sirve el trabajo</u>? Si consideramos el trabajo de la fuerza total $\vec{F} = \vec{F}_{TOT} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... = m\vec{a}$ tenemos: $dW_{TOT} = \vec{F}_{TOT} \cdot d\vec{r} = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + ... = dW_1 + dW_2 + ...$

Por otro lado $\vec{F}_{TOT} \cdot d\vec{r} = m\vec{a} \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$. Integrando:

P-2.1.1

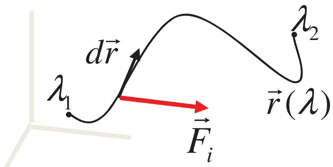
$W = \Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \Delta E_c$. La cantidad $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ se llama **energía cinética**. Así pues: $W_1 + W_2 + ... = \Delta E_c$

> Una fuerza $\vec{F}(\vec{r})$ se dice **conservativa** si $\exists\ U(\vec{r})$ tal que: $\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$

La función *U* se llama **energia potencial** U associada a la fuerza. El trabajo de la fuerza vale:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = -\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = -\int dU$$

Entonces, para $\vec{F}$ conservativa: $W_{1\to 2} = -\int_1^2 dU = -[U(2) - U(1)] = -\Delta U$



> Trabajo de una fuerza conservativa = variación de energía potencial $W = -\Delta U$

$\vec{F}(\vec{r})$ **es conservativa** $\Leftrightarrow \oint_{\text{curva cerrada}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$ **es independiente de la trayectoria**

La función U se calcula como: $U = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} + ct = -\int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) + ct$

- En 1D : cada fuerza es conservativa ya que siempre se puede definir $U(x) = -\int F(x)dx + ct$

  P-2.4.5, Q-2.4.4 + discutir puntos de equilibrio estable e inestable

- En 2D : $dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -F_x dx - F_y dy \Leftrightarrow F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$

  Se demuestra que una función diferenciable de dos variables tiene la propiedad que:

  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ Esto implica que una fuerza en 2D es conservativa $\Leftrightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ **P-2.4.3**

  P-2.4.4, P-2.4.7

- En 3D : Si $\vec{F}$ es radial y sólo depende de $|\vec{r}| = r$ no de otras combinaciones de x, y, z, o sea si $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{r}$, entonces es conservativa y $U(r) = \left(-\int F(r)\hat{r} \cdot d\vec{r}\right) + ct = -\int F(r)dr + ct$

Casos importantes (§2.5 y §3.7)

1) Una fuerza constante (en modulo y dirección) es conservativa:

$$\left.\begin{array}{l} dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r} \\ \vec{F} = \text{cte} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{U = -\vec{F}\cdot\vec{r} + \text{ct}} \; .$$ Ejemplo: $\vec{F}_g = m\vec{g} \to U = m\,g\,y + \text{ct}$

2) $\vec{F} = -\dfrac{k}{r^2}\hat{r} \Rightarrow U(r) = -\dfrac{k}{r}$. Ejemplos: Ley de gravitación universal $\vec{F}_{GU} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$

y Ley de Coulomb $\vec{F}_C = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$

3) $F_H = -kx \Rightarrow U(x) = -\int(-kx)\,dx = \dfrac{1}{2}k\,x^2 + \text{ct}$

4) $\vec{F}_{RDS} = -\mu_D N\hat{v} \Rightarrow W_{1\to 2} = \int_1^2 (-\mu_D N)\hat{v}\cdot d\vec{r} = -\mu_D N\int_1^2 d\ell = -\mu_D N\ell_{1\to 2}$ ← Sólo vale si *N* = const

En muchas situaciones hay fuerzas ortogonales al movimiento (o sea, a la velocidad); muy a menudo éste es el caso de las llamadas “reacciones”, como la fuerza normal debida a una superficie o la tensión de una cuerda en un movimiento circular. Indicándolas con la letra $\vec{R}$, se ha: $\vec{F} = \vec{F}_{TOT} = m\vec{a} = \vec{R}_1 + \vec{F}_2 + \ldots$. Multiplicamos escalarmente por $d\vec{r}$: $m\vec{a}\cdot d\vec{r} = \vec{R}_1\cdot d\vec{r} + \vec{F}_2\cdot d\vec{r} + \ldots$ Al ser $\vec{R} \perp \vec{v} = d\vec{r}/dt$, la fuerza de reacción es ortogonal a $d\vec{r}$, o sea $\vec{R}_1\cdot d\vec{r} = 0$. Esto nos deja con el:

principio de d'Alembert $\boxed{\left(\vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n - m\vec{a}\right)\cdot d\vec{r} = 0}$

Integrando la ec. de d'Alembert, $\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int \vec{F}_1\cdot d\vec{r} + \int \vec{F}_2\cdot d\vec{r} + \ldots + \int \vec{F}_n\cdot d\vec{r}$, se obtiene la **ecuación fundamental de la energía**:

$$\Delta E_c = -\Delta U_{F\text{cons}} + W_{F\ NO\ \text{cons}} \Rightarrow \boxed{W_{F\ NO\ \text{cons}} = \Delta(E_c + U)}$$

P-3.7.3, P-2.5.7,(P-3.10.4 con ac)

P-2.5.1, P-2.5.6, Q-2.1.1, P-3.7.4, P-3.10.1, P-3.10.9, Q-3.10.1, Q-3.10.2

Si no hay fuerzas disipativas, entonces $E_c + U = E = ct$, o sea también: $\boxed{\dfrac{dE}{dt} = 0}$

En algunos casos (por ejemplo si el sistema tiene un solo grado de libertad), esta ecuación es suficiente para hallar la trayectoria temporal del sistema. **P-3.10.3**

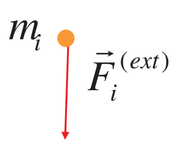
Tema 3: Sistemas de N partículas (*i* = 1, 2, ... N)

3ª Ley de Newton o Ley de acción y reacción: si un cuerpo actúa sobre un segundo con una fuerza $\vec{F}$, entonces éste último genera una fuerza igual y opuesta $-\vec{F}$ sobre el primero

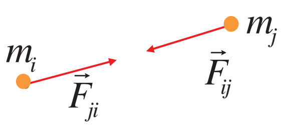
Ejemplo: fuerzas de contacto **P-3.10.2**

Muchas veces estas fuerzas cumplen también otra condición, que es que su dirección es paralela al vector que une las posiciones de las partículas: $\vec{F}_{1\to 2}\ //\ \vec{r}_{1\to 2}\left(= \vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)$

Las fuerzas de gravitación universal y Coulomb cumplen la 3ª Ley de Newton en esta forma “fuerte” (P-3.7.1)



Fuerzas externas $\vec{F}_i^{(ext)}$: son causadas por agentes exteriores, que no pertenecen al sistema considerado



Fuerzas internas: son las fuerzas de las partículas del sistema entre ellas

por la 3ª Ley de Newton: $\vec{F}^{int}_{i\to j} = -\vec{F}^{int}_{j\to i}$

La 2a Ley de Newton para la partícula *i* es: $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_j \vec{F}^{int}_{j\to i} = m_i\vec{a}_i = \dot{\vec{p}}_i$

Sumando sobre *i*: $\vec{F}_{TOT} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i^{ext} = \vec{F}^{ext}_{TOT} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{P}}$, o sea: $\boxed{\vec{F}^{ext}_{TOT} = \vec{F}^{ext} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}}$

→ Si $\vec{F}^{ext} = 0$, entonces $\vec{P} = ct$

Definiendo la coordenada del Centro de Masas (CM) como: $\vec{R}_{CM} = \dfrac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i$, con $M = \sum_i m_i$,

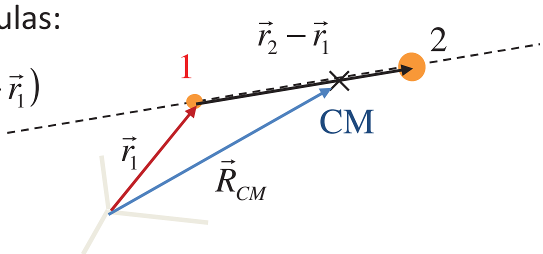
entonces: $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = M\vec{V}_{CM}$ y $\vec{F}^{ext} = \dot{\vec{P}} = M\vec{A}_{CM}$

Aplicación: fuegos artificiales **P-3.11.1, P-3.2.8** Q-3.2.6

P-3.6.7

Nota importante sobre el centro de masas. Para dos partículas:

$$\vec{R}_{CM}=\frac{1}{M}\left(m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2\right)=\frac{1}{M}\left((M-m_2)\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2\right)=\vec{r}_1+\frac{m_2}{M}\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right)$$



Aquí se ha utilizado $M=m_1+m_2\Rightarrow m_1=M-m_2$

Por lo tanto, el centro de masas de un conjunto de dos partículas está a lo largo de la recta que las une, en un punto intermedio entre las dos

§3.4 El momento angular total de un sistema de partículas es: $\vec{L}_{(Q)}=\sum_i \vec{L}_{i\,(Q)}=\sum_i \vec{r}_{i\,(Q)}\times m_i\vec{v}_i$

donde $\vec{r}_{i\,(Q)}=\vec{r}_i-\vec{r}_Q$. **P-3.4.1** $+\vec{R}_{CM}$ Derivando respecto del tiempo:

$$\frac{d\vec{L}_{(Q)}}{dt}=\sum_i \vec{v}_{i\,(Q)}\times m_i\vec{v}_i+\sum_i \vec{r}_{i\,(Q)}\times m_i\vec{a}_i=\sum_i \overbrace{\vec{v}_i\times m_i\vec{v}_i}^{=0}-\sum_i \vec{v}_Q\times m_i\vec{v}_i+\sum_i \vec{r}_{i\,(Q)}\times \vec{F}_i=\vec{M}_{(Q)}-\vec{v}_Q\times\sum_i m_i\vec{v}_i$$

Si las fuerzas internas cumplen la condición $\vec{F}^{\,int}_{i\to j}\,//\,\vec{r}_{ij}$, entonces su momento total es cero, y $\vec{M}_{(Q)}=\vec{M}^{\,ext}_{(Q)}$. Con esto, la ecuación del momento angular queda: $d\vec{L}_{(Q)}/dt=\vec{M}^{\,ext}_{(Q)}-\vec{v}_Q\times M\vec{V}_{CM}$

El 2º término es cero si: (1) Q es un punto fijo; o (2), Q coincide con el centro de masas. Así pues:

$$\boxed{\vec{M}^{\,ext}_{(Q)}=\frac{d\vec{L}_{(Q)}}{dt}\text{, con Q fijo o Q} \equiv \text{CM}}$$

. Esto implica que si $\vec{M}^{\,ext}_{(Q)}=0$, entonces $\vec{L}_{(Q)}=ct$

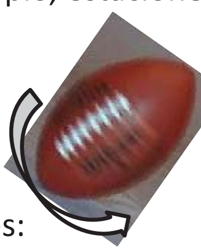
Aplicaciones (Q=CM): fútbol americano, armas de fuego, giroscopio, estaciones, terremotos

Qüestions Parcial2010

P-3.2.1,P-3.3.1,Q-3.4.1,Q.3.4.2,Q-3.4.3

§3.5 Consideremos el trabajo de una pareja de fuerzas internas:

$$dW_{12}=\vec{F}^{\,int}_{1\to2}\cdot d\vec{r}_2+\vec{F}^{\,int}_{2\to1}\cdot d\vec{r}_1=\vec{F}^{\,int}_{1\to2}\cdot\left(d\vec{r}_2-d\vec{r}_1\right)$$



(se ha utilizado la 3ª Ley de Newton) Si la fuerza sólo depende de la coordenada relativa $\vec{r}_{rel}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$ y además es conservativa, entonces:

$$dW_{12}=\vec{F}_{1\to2}\left(\vec{r}_{rel}\right)\cdot d\vec{r}_{rel}=-\vec{\nabla}U\left(\vec{r}_{rel}\right)\cdot d\vec{r}_{rel}=-dU$$

Esto significa que a cada pareja (*i* , *j*) se puede asociar una energía potencial U que sólo depende de la coordenada relativa. Si todas las fuerzas internas y externas son conservativas: $E=E_C+U=ct$, con $U=\sum_i U^{ext}_i+\sum_{parejas} U^{int}_{ij}$. Si hay fuerzas externas no conservativas:

$$\boxed{W_{Fext\ NO\ CONS}=\Delta\left(E_C+U\right)}$$

P-3.5.2, P-3.7.2

P-3.7.4, P-3.5.3, Q-3.3.1, Q-3.5.1, Q-3.5.2, Q-3.5.3

§3.6 Choques

Un choque es una colisión entre dos cuerpos, o sea una interacción de contacto de durada limitada (usualmente se verifica que Δt = 0.01 ÷ 0.001 sec). No consideramos la rotación.

Q-2.2.1 Tomemos como primer ejemplo el de una pelota de masa 80 g que rebota contra una pared. Consideremos los instantes justo antes (A) y justo después (D) de la colisión, y olvidémonos de momento de las eventuales fuerzas exteriores. Si el modulo de la velocidad antes y después del choque es de 30 m/s, el impulso generado por la fuerza debida a la pared durante el choque es $\vec{I} = \Delta\vec{p} = m(\vec{v}_D - \vec{v}_A)$, en modulo $4.8 N\ s$

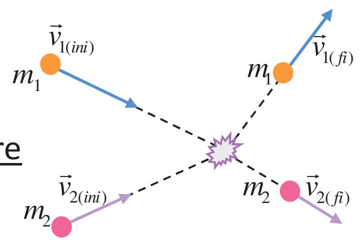
La fuerza media que se genera en el impacto es enorme para una pelota de 80 g, y vale, con Δt = 0.003 sec "PRINCIPIO del MARTILLO"

$$F_{media} = \frac{\left|\vec{I}\right|}{\Delta t} = 1000N$$

Comparado con esto, la fuerza de gravedad (por ejemplo) sobre la pelota es despreciable. Consideremos ahora el choque entre dos o más masas. Se puede suponer que no haya fuerzas exteriores, ya que estas son muy débiles para jugar un papel durante el choque. Por lo tanto, la cantidad de movimiento total del sistema se conserva:

$$\vec{F}^{ext} \approx 0 \;\Rightarrow\; \vec{P} = ct \;\Rightarrow\; \vec{P}_D = \vec{P}_A$$

P-3.6.8 (choque compl. inelástico)

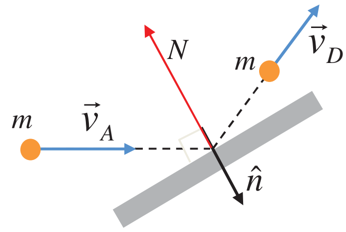


Mientras que el momento lineal se conserva siempre en un choque <u>entre partículas</u>, la energía en general no. Llamamos elástico un choque en que la energía cinética total, y por lo tanto la energía total, se conserva (sin desplazamientos, la energía potencial de F externas no cambia).

Para 2 partículas, choque elástico $\Leftrightarrow \frac{1}{2}m_1 v_{1,D}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,D}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1,A}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,A}^2$ **P-3.6.3**

Si se conoce la geometría de la colisión y no hay rozamiento:

en este caso podemos conocer la dirección de las fuerzas impulsivas generadas en el impacto, que es ortogonal al plano de choque. Esto implica que no hay ninguna fuerza paralela a este plano, y que entonces las componentes paralelas de las velocidades se conservan.

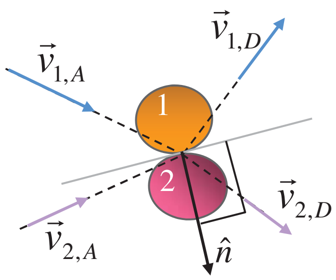


<u>Importante</u>: Para una colisión entre un cuerpo y una pared fija: $v_D^{//} = v_A^{//}$
Nótese que en este caso <u>no</u> se conserva el momento lineal total

Igualmente, para un choque entre dos cuerpos:

$$v_{i,D}^{//} = v_{i,A}^{//} \quad , i = 1,2$$

Además aquí tendremos: $\vec{P} = ct$



Por lo tanto las únicas incógnitas que quedan son las componentes de la velocidad ortogonales al plano de choque. Se define **el coeficiente de restitución** *e* **como:**

$$e = \left|\frac{v_{1(D)}^{\perp} - v_{2(D)}^{\perp}}{v_{1(A)}^{\perp} - v_{2(A)}^{\perp}}\right|$$

Si conocemos el valor de *e*, el problema se resuelve poniendo a sistema las ecuaciones que resultan de la conservación del momento y de la definición de *e*.
Se puede demonstrar que para un choque elástico, *e* = 1

P-3.6.1, P-3.6.4

P-3.6.6, P-3.6.9, P-3.6.10