MOVIMIENTO de un cuerpo = TRANSLACIÓN + ROTACIÓN + DEFORMACIÓN

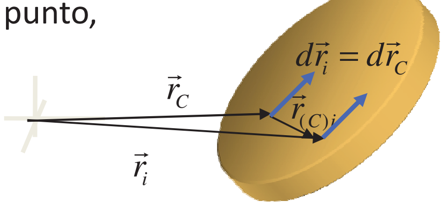
§3.11 Cinemática del sólido rígido

Un cuerpo rígido es un sólido (continuo) indeformable. Esto significa que una pareja cualquiera (*i*, *j*) de sus puntos mantienen distancias relativas constantes: $d_{ij} = \left|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right| = \text{const}$. El sólido rígido es una aproximación de los objetos reales mucho mejor que el punto material, y permite además describir las rotaciones. Un objeto rígido tiene 6 grados de libertad: para especificar su posición y orientación, sólo necesitamos conocer la posición de un punto más tres ángulos (o también, de dos puntos y un ángulo; como la distancia entre los dos puntos es fija, hay 7 – 1 = 6 coordenadas libres). Si un cuerpo gira alrededor de un eje (también si es exterior al cuerpo), se puede expresar la velocidad de sus puntos (en forma vectorial) como $\vec{v}^{\,i} = \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,i}_{(C)}$, siendo $\vec{r}^{\,i}_{(C)}$ la distancia del punto *i* de un punto *C* sobre el eje, y $\vec{\omega}$ el vector velocidad angular (instantánea) que es paralelo al eje de rotación. Esta es la versión vectorial de la formula $v_T = \omega R$ del movimiento circular en el plano.

Tomemos un punto *C* cualquiera del sólido. La posición $\vec{r}_i$ de otro punto *i* del sólido se escribe: $\vec{r}^{\,i} = \vec{r}^{\,C} + \vec{r}^{\,i}_{(C)}$, y su velocidad $\vec{v}^{\,i} = \vec{v}^{\,C} + \vec{v}^{\,i}_{(C)}$. El 1r término de ambas ecuaciones describe el movimiento del punto C respecto del sistema de referencia. El 2º, el movimiento de *i* respecto de *C*. Como la distancia entre *i* y *C* no puede variar, el movimiento de *i* relativo a *C* sólo puede ser un movimiento de rotación (en otras palabras, la variación del vector posición relativa $\vec{r}^{\,i}_{(C)}$ es ortogonal al vector mismo: $\vec{r}_{(C)i} \cdot d\vec{r}_{(C)i} = 0$, o equivalentemente: $d\vec{r}_{(C)i} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{(C)i}$)

El vector velocidad angular $\vec{\omega}$ tiene que ser el mismo para todo punto, ya que el sólido es rígido. Utilizando el resultado de arriba, se tiene entonces: $\boxed{\vec{v}^{\,i} = \vec{v}^{\,C} + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,i}_{(C)}}$

(a partir de $d\vec{r}_{(C)i} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}_{(C)i}$, dividiendo por el tiempo infinitésimo *dt* se obtiene la misma ecuación con $\vec{\omega} = d\vec{\varphi}/dt$)



Así, la velocidad del punto *i* es la velocidad de translación de un punto *C* más una rotación respecto a *C*. Esto se puede hacer respecto a C cualquiera, ¡incluso si *C* en realidad está girando! El movimiento de rotación supone una variación de la orientación de un cuerpo respecto de los ejes de referencia. Si la orientación no cambia, entonces $\vec{\omega} = 0$ (independientemente de que punto *C* se ha escogido). La descripción del movimiento de un sólido rígido es relativamente simple (dado el enorme número de partículas): sólo tenemos que especificar dos vectores ($\vec{v}_C$ y $\vec{\omega}$), o sea 6 coordenadas (6 grados de libertad)

Como vimos hablando de sistemas de partículas, un cuerpo rígido se puede pensar como una colección continua de partículas cada una de masa infinitésima *dm*. El centro de masas y los momentos lineal y angular de un sólido rígido se definen igual que para un sistema de puntos materiales, remplazando sumatorias por integrales con la substitución: $m_i \to dm = \rho dv \quad \vec{r}_i \to \vec{r}$

Por ejemplo:

$$m = \int dm = \int \rho dV$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{m}\int dm\vec{r} = \frac{1}{m}\int dV\rho\vec{r}$$

A partir de estas 2 ecuaciones se pueden calcular los centros de masas de sólidos de forma simple. Para cuerpos homogéneos y simétricos, $\vec{R}_{CM}$ puede hallarse por simetría (o sea, coincide con el centro "geométrico" del cuerpo)

→ Ver fórmulas CM en el formulario y §3.1

Además:

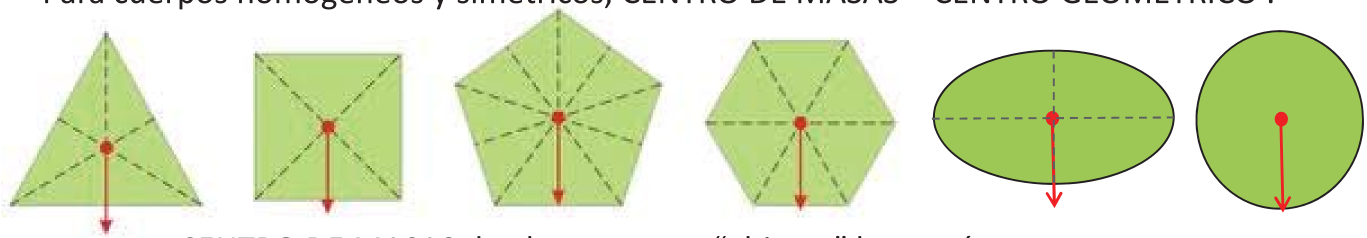
$$\begin{cases} \vec{P} = m\vec{V}_{CM} = \int dm\vec{v} = \int dV\rho\vec{v} \\ \vec{L}_{(Q)} = \int dm\vec{r}_{(Q)} \times \vec{v} = \int dV\rho\vec{r}_{(Q)} \times \vec{v} \end{cases} \qquad (\text{con} \quad \vec{v} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{(C)})$$

(Al menos en línea teórica, se puede calcular el movimiento de un cuerpo rígido a partir de éstas dos definiciones, utilizando las ecuaciones: $\vec{F}^{ext} = \dot{\vec{P}}$ y $\vec{M}^{ext}_{(Q)} = \dot{\vec{L}}_{(Q)}$ con Q = fijo o Q=CM)

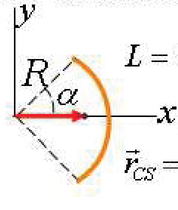
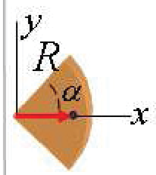
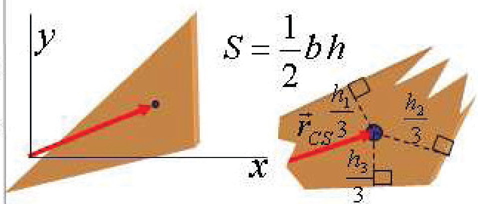
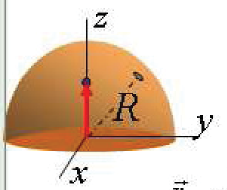
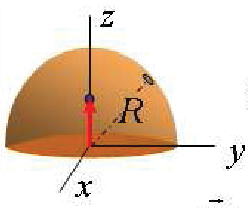
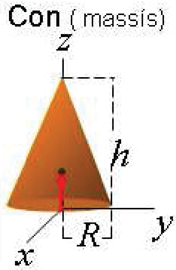
Propiedades importantes del centro de masas:

1) El momento lineal total tiene la forma simple $\vec{P} = m\vec{V}_{CM}$
2) $\vec{M}^{ext}_{(CM)} = \dot{\vec{L}}_{(CM)}$ (incluso si el CM tiene aceleración $\neq 0$!!)
3) El peso se aplica en el centro de masas (ver más adelante)

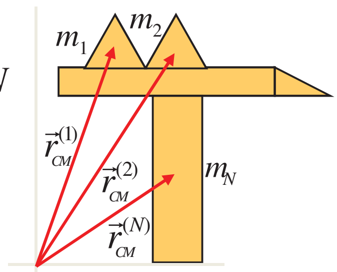
Para cuerpos homogéneos y simétricos, CENTRO DE MASAS = CENTRO GEOMÉTRICO :



CENTRO DE MASAS de algunos otros "objetos" homogéneos:

Arc de circumferència	Sector de cercle	Triangle arbitrari
 $L = 2R\alpha$; $\vec{r}_{CS} = \left(\frac{R\sin\alpha}{\alpha}\ ,\ 0\right)$	 $S = R^2\alpha$; $\vec{r}_{CS} = \left(\frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}\ ,\ 0\right)$	 $S = \frac{1}{2}bh$
Closca semiesfèrica (sense la tapa inferior)  $S = 2\pi R^2$; $\vec{r}_{CS} = \left(0, 0, \frac{R}{2}\right)$	**Semiesfera** (massís)  $V = \frac{2\pi R^3}{3}$; $\vec{r}_{CS} = \left(0, 0, \frac{3R}{8}\right)$	**Con** (massís)  $V = \frac{\pi R^2 h}{3}$; $\vec{r}_{CS} = \left(0, 0, \frac{h}{4}\right)$

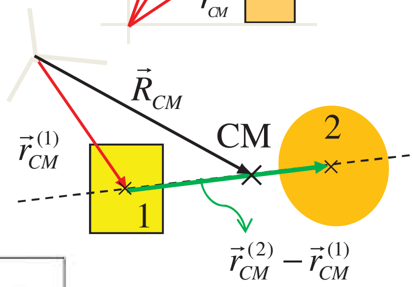
§3.2 Centro de masas de un sólido compuesto



Si un cuerpo rígido está formado por partes de forma simple $C_i,\ i = 1,\dots,N$ de masa y centro de masas $\{m_i, \vec{r}^{(i)}_{CM}\}$, el centro de masas del cuerpo es:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{m}\int_{C_1\cup C_2\dots\cup C_N} dm\vec{r} = \frac{1}{m}\left(\int_{C_1} dm\vec{r} + \dots + \int_{C_N} dm\vec{r}\right) = \frac{1}{m}\left(m_1\vec{r}^{(1)}_{CM} + \dots + m_N\vec{r}^{(N)}_{CM}\right)$$

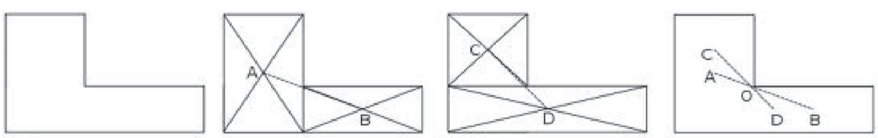
$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{m}\sum_i m_i\vec{r}^{(i)}_{CM} \qquad \left(m = \sum_{i=1}^{N} m_i \text{ es la masa total del sólido}\right)$$



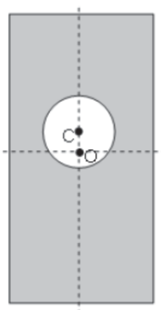
Para $N = 2$:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{m}\left(m_1\vec{r}^{(1)}_{CM} + m_2\vec{r}^{(2)}_{CM}\right) = \frac{1}{m}\left((m - m_2)\vec{r}^{(1)}_{CM} + m_2\vec{r}^{(2)}_{CM}\right) = \vec{r}^{(1)}_{CM} + \frac{m_2}{m}\left(\vec{r}^{(2)}_{CM} - \vec{r}^{(1)}_{CM}\right)$$

Aplicación: objeto en forma de "L"



Se puede calcular de la misma manera el CM de un cuerpo rígido con agujeros, anteponiendo a las masas m_i de los agujeros un signo menos. Para verlo, consideremos la siguiente figura:



$$m_{tot}\vec{r}^{(rect\ lleno)}_{CM} = \sum_i m_i\vec{r}^{(i)}_{CM} = m_{trozo\ gris}\vec{r}^{(trozo\ gris)}_{CM} + m_{agujero}\vec{r}^{(agujero)}_{CM}$$

$$\Rightarrow m_{trozo\ gris}\vec{r}^{(trozo\ gris)}_{CM} = m_{tot}\vec{r}^{(rect\ lleno)}_{CM} - m_{agujero}\vec{r}^{(agujero)}_{CM} = \sum_{\pm} m_i\vec{r}^{(i)}_{CM}$$

Q-3.2.5: Una lámina rectangular homogénea de lados 4 y 8 cm tiene un agujero circular de radio 1 cm, cuyo centro está a una distancia *b* del centro O de la lámina (arriba de O). Demonstrar que, para que el CM esté en la periferia del agujero, *b* = 0.9 cm

P-3.2.2 , P-3.2.5; P-3.3.2 P-3.2.4, P-3.2.6, Q-3.2.2, Q-3.2.3, Q-3.2.7, Q-3.2.8

§3.11 y § 4.2 Fuerzas exteriores y dinámica de un sólido rígido

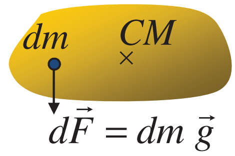
Las ecuaciones del movimiento para un cuerpo rígido son las mismas que para un sistema de partículas, y por tanto en ellas no aparecen las fuerzas internas del sólido (fuerzas de cohesión):

$\boxed{\vec F^{ext} = d\vec P/dt = m\vec A_{CM}\ ;\ \vec M^{ext}_{(Q)} = d\vec L_{(Q)}/dt \text{, con Q fijo o Q = CM}}$ **P-3.11.2** + comparar con 3.11.1

Estas 2 ecuaciones vectoriales corresponden a 6 ecuaciones en las coordenadas cartesianas de los momentos lineal y angular. Un cuerpo rígido tiene 6 grados de libertad; así pues, tenemos 6 ecuaciones para 6 incógnitas: tales ecuaciones son suficientes para resolver la dinámica. De esto sigue que si dos conjuntos de fuerzas aplicadas sobre el mismo sólido tienen igual resultante e igual momento resultante (respecto al mismo punto), causarán los mismos efectos. Se dice entonces que los dos sistemas de fuerzas son **equivalentes**. Consideremos p. ej. un sólido de masa *m* sujeto a la gravedad terrestre. Cada trocito de masa *dm* del sólido está sujeto al peso $d\vec F = dm\,\vec g$, y la fuerza peso total vale $\int d\vec F = \int dm\,\vec g = \left(\int dm\right)\vec g = m\vec g$

El momento total de las fuerzas $d\vec F$ respecto de un punto *Q* vale:

$$\vec M_{(Q)} = \int \vec r_{(Q)} \times dm\vec g = \left(\int \vec r_{(Q)} dm\right) \times \vec g = m\vec R^{CM}_{(Q)} \times \vec g = \vec R^{CM}_{(Q)} \times m\vec g$$



Por lo tanto, el sistema de fuerzas peso de cada trozo del sólido es equivalente a una única fuerza $m\vec g$ aplicada al centro de masas, ya que produce los mismos valores de $\vec F^{ext}$ y $\vec M^{ext}_{(Q)}$ (de forma análoga, la fuerza de gravitación universal sobre una masa distribuida se puede pensar aplicada en el centro de masas)

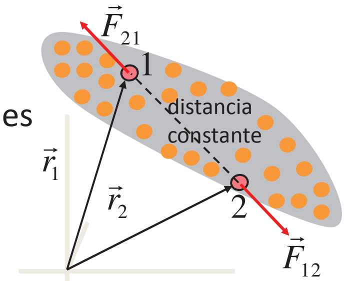
Un tipo particular de dinámica es el movimiento de pura translación ($\vec\omega = 0 \Rightarrow \vec v_i = \vec v_C = \vec v\ \ \forall i$). En tal caso: $\vec L_{(CM)} = \int dm\vec r_{(CM)} \times \vec v_i = \int dm\vec r_{(CM)} \times \vec v = \left(\int dm\vec r_{(Q)}\right) \times \vec v = m\vec R^{CM}_{(CM)} \times \vec v = 0$ y por tanto vale:

$\vec M^{ext}_{(CM)} = d\vec L_{(CM)}/dt = 0$ → **el momento angular y el momento de las fuerzas de un sólido que no gira son ambos cero respecto del centro de masas**

Así, **las ecuaciones de la dinámica para un sólido que no gira son:** $\boxed{\vec F^{ext} = m\vec A_{CM}\ ;\ \ \vec M^{ext}_{(CM)} = 0}$

P-3.4.3((a) con μ=0.4 + punto de aplicación de N) ; **Pr.4** final junio '11

§3.11 Fuerzas internas y energía de un sólido rígido



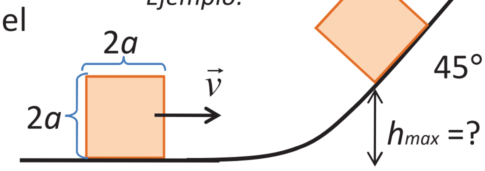
Las fuerzas internas (de cohesión) de un sólido, no entran en las ecuaciones de la dinámica. Además, al ser las distancias entre los puntos del sólido fija, la energía potencial asociada a las fuerzas interiores no varía nunca. Así, a la hora de considerar 1) la energía, 2) el momento lineal, y 3) el momento angular de un sólido rígido, podemos olvidarnos de las fuerzas internas (a partir de ahora indicaremos las fuerzas exteriores simplemente con $\vec F$). La energía potencial de la fuerza peso vale: $U = \int dmgz = g\int dmz = gmz_{CM}$ y sólo depende de la altura del CM. La energía cinética de un sólido sin rotación, ya que todo punto tiene la misma velocidad $\vec v_i = \vec v_C$ (esto no es cierto si el sólido gira!!), vale: $E_C = \frac{1}{2}\int dmv_C^2 = \frac{1}{2}mv_C^2$

Vemos pues que si un cuerpo no gira, se pueden aplicar las ecuaciones que valen para una partícula, tomando como posición de la partícula la coordenada del centro de masas del sólido; en particular valen la ec. $\vec F^{ext} = m\vec A_{CM}$ y la ec. del trabajo y la energía. (Además vale $\vec M^{ext}_{(CM)} = 0$).

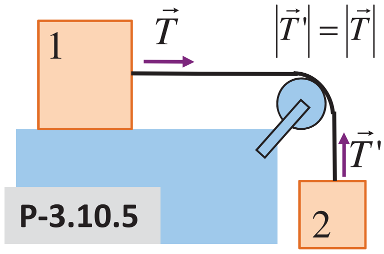
§3.10 Energía de sólidos rígidos en presencia de reacciones ideales

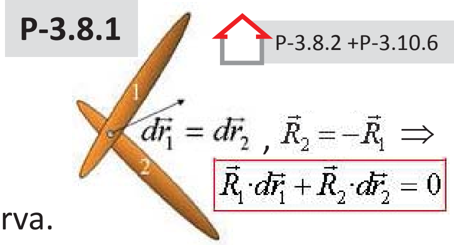
Se llama enlace o ligadura cualquier limitación al movimiento de un cuerpo (ej.: articulación, pared, plano, cuerdas, carriles…), y "reacción" la fuerza correspondiente (normal, tensión, ...). (una pared impide el movimiento a través de ella; una cuerda o una articulación imponen una trayectoria circular, etc.). Se dice que el enlace es ideal si la reacción asociada no hace trabajo. Si un cuerpo está sujeto sólo a fuerzas conservativas y ligaduras ideales, su energía mecánica se conserva: $E = \text{const}$

Ejemplo:



Si hay mas cuerpos, se dice que las reacciones forman un **conjunto de reacciones ideales** si su trabajo conjunto es cero. Consideremos p. ej. dos bloques atados a la misma cuerda (véase dibujo). La tensión hace trabajo, ya que su punto de aplicación se mueve. Las ecuaciones para los dos bloques son: $W_T = \Delta E_1$, $W_{T'} = \Delta E_2$. Sumándolas: $W_{tot} = W_T + W_{T'} = \Delta(E_1 + E_2)$. Ya que los desplazamientos de los dos bloques son iguales ($\Delta x_1 = \Delta y_2$) y el módulo de la tensión también, el trabajo total vale: $W_T + W_{T'} = T\Delta x_1 - T'\Delta y_2 = 0$ así que $\Delta(E_1 + E_2) = \Delta E_{tot} = 0$, es decir $E = \text{const}$





Las dos tensiones son un conjunto de reacciones ideales. Este resultado es general: si sobre un sistema de más cuerpos actúa un conjunto de reacciones ideales, la energía mecánica <u>total</u> se conserva.

(<u>**no**</u> se conserva la energía de cada cuerpo por separado)

§4.1 Estática del sólido rígido

Si un cuerpo rígido no se mueve o tiene velocidad de translación uniforme, $\vec{P} = \vec{L}_{(Q)} = ct$ (con Q cualquiera). Entonces $d\vec{P}/dt = 0$ y $d\vec{L}_{(Q)}/dt = 0$. De las ecuaciones del sólido rígido sigue pues:

$$\boxed{\vec{F}^{\,ext} = 0 \ , \ \vec{M}^{\,ext}_{(Q)} = 0}$$

Un sistema de fuerzas sobre un sólido con resultante cero se llama **par de fuerzas**. Para el equilibrio, las fuerzas aplicadas tienen que ser un par, pero esto no es condición suficiente.

→ **Corolarios importantes de las ecuaciones de la estática**:

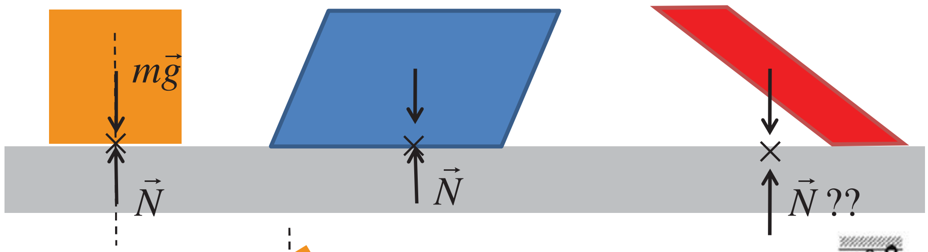
1) si a un cuerpo se aplican sólo 2 fuerzas, estas tienen que ser iguales y opuestas y tener la misma recta de acción
2) Si a un cuerpo se aplican sólo 3 fuerzas, además de tener resultante igual a cero, las rectas de acción tendrán que ser o todas paralelas o converger al mismo punto

P-4.1.3
Q-4.4.8
P-4.4.7

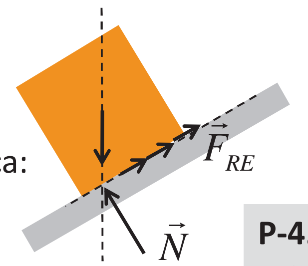
§4.2 Centro de gravedad y punto de aplicación de la fuerza normal

Ej. del corolario 1: el peso se aplica en el CM. Si aplicamos una fuerza igual a $-m\vec{g}$ cuya recta de acción pase por el CM (y no hay más fuerzas) el sólido queda en equilibrio.

Equilibrio de un sólido apoyado sobre una superficie plana: si la proyección del centro de masas cae fuera de la base del cuerpo, éste cae:

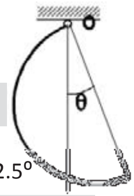


Lo mismo ocurre sobre un plano inclinado, donde para que haya equilibrio tiene que haber también una fuerza de fricción estática:



Q-3.2.1

Para alambre en equilibrio: θ = 32.5°



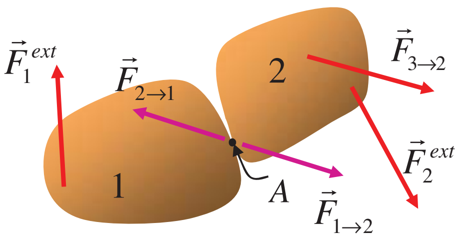
P-4.2.1, P-4.7.15 (equilibrio estable/inestable/indiferente)

Estática de más sólidos rígidos

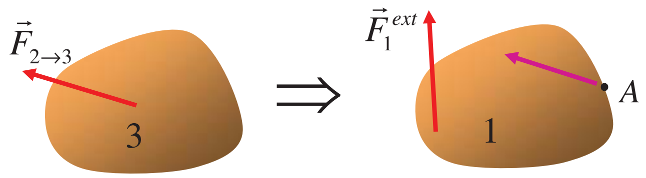
Si hay más sólidos *i* = 1, 2,…, para cada uno de ellos se aplicarán sendas ecuaciones de la estática $\vec{F}_i^{\,ext} = 0$ y $\vec{M}_i^{\,ext} = 0$. Para cada sólido se consideran sólo fuerzas que actúen sobre el, incluidas las fuerzas debidas a los demás cuerpos. Estas fuerzas (internas) cumplen la 3ª Ley de Newton:

$\vec{F}_{i\to j} = -\vec{F}_{j\to i}$

¡ actúan sobre sólidos distintos!



<u>**1 diagrama del sólido libre**</u> <u>**para cada cuerpo**</u>



Resumen fórmulas para la prueba de evaluación continua

Centro de masas: $\vec{R}_{CM} = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{r}_{CM}^{\,(i)}$

Cinemática:

-*Punto material o centro de masas* $\quad \vec{a}(t) = \hat{v}\frac{dv}{dt} + v\left|\frac{d\hat{v}}{dt}\right|\hat{n} = \vec{a}_T + \vec{a}_N \qquad \vec{a}_N = \hat{n}\frac{v^2}{R_{CURV}} \qquad R_{CURV} = v \Big/ \left|\frac{d\hat{v}}{dt}\right|$

-*Punto cualquiera de un sólido rígido* $\quad \vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{\omega}\times\vec{r}_{i(C)}$

Dinámica:
$$\begin{cases} \vec{F}^{ext} = d\vec{P}/dt = m\vec{A}_{CM} \qquad (\vec{F}^{ext} \approx 0 \;\Rightarrow\; \vec{P} = ct) \\ \vec{M}^{ext}_{(Q)} = d\vec{L}_{(Q)}/dt \text{ , con } Q \text{ fijo o } Q = CM \end{cases}$$

casos particulares:

Dinámica del sólido rígido sin rotación
$$\begin{cases} \vec{F}^{ext} = m\vec{A}_{CM} \\ \vec{M}^{ext}_{(CM)} = 0 \quad (Q = CM\,!) \end{cases}$$

Estática del sólido rígido
$$\begin{cases} \vec{F}^{ext} = 0 \\ \vec{M}^{ext}_{(Q)} = 0 \text{ , } Q \text{ cualquiera} \end{cases}$$

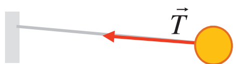
Energía: $W_{F\,NO\,cons} = \Delta E \qquad$ Sistema conservativo: $E = \text{const}$ o también $dE/dt = 0$

$$E = E_c + U = \sum_i E_{c,i} + \sum_i U_i^{ext} + \sum_{parejas} U_{ij}^{int} \longrightarrow$$
para un solido rígido, U^{int} siempre es constante → $\Delta U^{\text{int}} = 0$

$$W = \int \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = -\Delta U \;;\; U_g = mgh \;;\; U_H = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \;;\; U_{GU} = -G\frac{m_1 m_2}{r} \;;\; W_{RDS} = -\mu_D N \ell$$

(si F es conservativa) (si N = const)

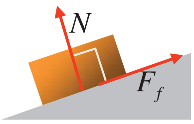
§4.4 Reglas útiles para hacer problemas con sólidos rígidos y enlaces



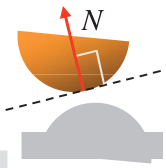
(1) Tensión de las cuerdas: la fuerza siempre es paralela a la cuerda, tira (una cuerda no puede empujar), y se aplica en el punto de contacto. Si la cuerda no tiene masa y no roza otros cuerpos (no tiene fuerzas de fricción aplicadas), el módulo de la tensión es el mismo en cada punto.

(2) **Poleas**: cambian la dirección (y módulo) de la tensión de una cuerda; la fuerza de una cuerda sobre una polea se aplica en el punto en que dejan de estar en contacto (demo) **P-4.5.10**

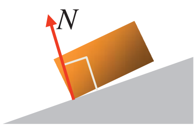
aplicación: polipasto



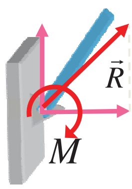
(3) la fuerza de fricción, si la hay, está en el plano de contacto. En el caso de la fricción estática, su magnitud varía según la situación. Como mucho, su módulo vale $F_{RE}^{\max} = \mu_E N$. Cuando la fuerza de rozamiento llega a su valor máximo, el **deslizamiento** es **inminente** **P-4.4.2** Q-4.4.9



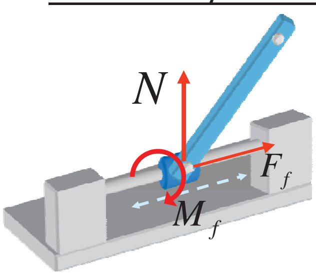
(4) Fuerza normal: siempre ortogonal al plano de contacto (definido como plano tangente a al menos una de las dos superficies en contacto); siempre empuja. El punto equivalente de aplicación de la normal, que se halla con la condición de momento total cero, como mucho puede ser la esquina del cuerpo: condición de **vuelco inminente**



P-4.5.3



(5) En una articulación, la reacción puede tener cualquier dirección. Si además hay fricción o empotramiento cabe añadir un momento (un par) **P-4.1.2**



(6) Para el equilibrio de una **palanca** o de una **balanza**, tienen que compensarse los momentos respecto del fulcro (perno) **P-4.5.9**

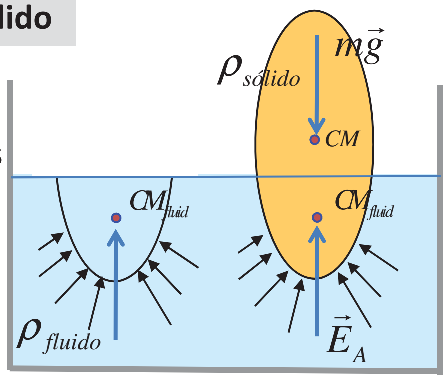
(7) La reacción de una guía o carril puede tener cualquier dirección en el plan normal a la guía; si hay rozamiento la fricción es paralela al carril

empezar en aula o como "test"

P-4.4.5, P-4.1.1, P-4.4.8, P-4.4.10, P-4.5.5, Q-4.4.10

§4.3 Fluidoestática y fuerzas generadas por un fluido sobre un sólido

Un líquido o fluido está compuesto por moléculas que se mueven con velocidades muy altas, y que rebotan continuamente entre sí y contra las paredes del recipiente que contiene el fluido. De estas colisiones derivan las fuerzas con las que el líquido actúa sobre paredes o objetos (parcialmente) sumergidos. Si el líquido no es viscoso, las colisiones son sin rozamiento y entonces las fuerzas son en cada punto ortogonales a las superficies.

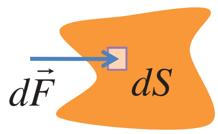


Empuje de Arquímedes Consideramos una porción de líquido cualquiera. Sobre la superficie del volumen de líquido considerado se ejercen fuerzas de presión (flechas negras). Ya que el volumen de líquido está en equilibrio, la resultante de estas fuerzas de presión tiene que contrarrestar el efecto de la fuerza peso de la porción de líquido; es decir, la fuerza de presión total (flecha azul) es igual y contraria al peso del volumen de líquido considerado, y se aplica en el mismo punto, que es el centro de masa del líquido. Consideramos ahora un sólido que ocupe el mismo volumen. Sobre la superficie del sólido en contacto con el líquido se ejerce una fuerza de presión: las moléculas del líquido siguen "empujando" como antes. Este es el famoso **principio de Arquímedes**: el empuje de Arquímedes $\vec{E}_A$ es igual en módulo al peso del líquido desalojado: $\boxed{\vec{E}_A = -m_{fluido}\vec{g} = -\rho_{fluido}V'\vec{g}}$ **P-4.3.6, P-4.3.7** P-4.3.2, Q-4.3.3

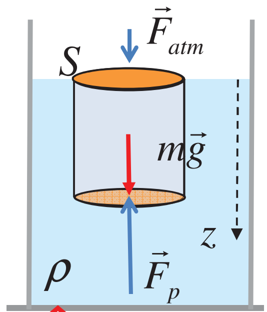
La fuerza de Arquímedes se aplica en el centro de masas del volumen de fluido desalojado, que recibe el nombre de **centro de empuje** (CE) y se calcula como un centro de masas. Q-4.3.2, Q-4.3.5

¿Cual es la condición para que un cuerpo flote? La fuerza peso del sólido vale $m\vec{g} = \rho_{sólido}V\,\vec{g}$. Para el equilibrio $\vec{E}_A + m\vec{g} = 0$ o sea $-m_{fluido}\vec{g} + m\vec{g} = (-\rho_{fluido}V' + \rho_{sólido}V)\vec{g} = 0$, es decir: $\rho_{sólido} = \rho_{fluido}V'/V$. Si el cuerpo flota, será $V' < V$; por lo tanto un cuerpo flota si $\rho_{sólido} < \rho_{fluido}$

Presión y fuerzas de presión Por su naturaleza, la fuerza de presión de un fluido es más grande cuanto más grande sea la superficie contra la que se ejerce. Por ello es útil definir una **presión** como fuerza por unidad de superficie (plana): $p = F/S$. Dado que la presión no es constante en todo punto de un fluido, hay que considerar una superficie infinitésima dS y definir la presión como: $dF = pdS$ (La unidad de presión es el Pascal: $1\,\mathrm{Pa} = 1\,N/m^2$)



¿Como varia la presión con la profundidad?



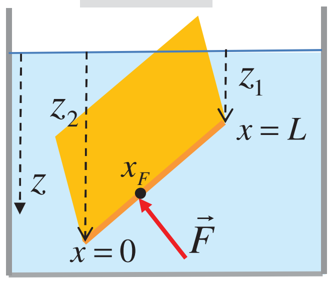
P-4.3.3, P-4.3.5

aplicación: palanca hidráulica

Sobre el cilindro de fluido de la figura, la fuerza horizontal total es cero por simetría. En equilibrio, las dos fuerzas verticales sobre las bases del cilindro, de área *S*, compensan el peso del cilindro: $F_p = F_{atm} + mg = p_{atm}S + \rho Vg$, siendo p_{atm} la presión atmosférica y ρ la densidad del fluido, que es constante al ser el fluido incompresible. Con $V = Sz$, se halla: $\boxed{p(z) = p_{atm} + \rho gz}$

La cantidad $\rho gz = p_{fluido} - p_{atm}$ se llama **presión manométrica**. En los problemas que haremos, la presión atmosférica es "compensada": la variación de presión de un gas con la altura es menospreciable respecto a la de un líquido: así p_{atm} es una constante que empuja de la misma manera todos cuerpos en todas direcciones, y desaparece del equilibrio. **P-4.3.1**

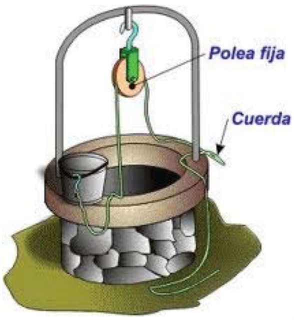
Podemos ahora calcular la fuerza debida a fluido sobre la superficie rectangular de un sólido o del contenedor. La fuerza sobre un elemento *dS* de area es: $dF = pdS$. Utilizando $p = \rho gz$ e integrando, se ha: $F = \rho g\int zdS = \rho gSz_{CM}$ (donde se ha usado $z_{CM} = \frac{1}{\sigma S}\int z\sigma dS = \frac{1}{S}\int zdS$), o sea: $\boxed{F = \rho gS(z_1 + z_2)/2}$. La fuerza de presión siempre empuja, es normal a la superficie, y se aplica (§4.3) a una distancia $\boxed{x_F = L(z_2 + 2z_1)/3(z_2 + z_1)}$ del punto de máxima profundidad, siendo *L* la longitud lateral, y z_1 y z_2 las profundidades máxima y mínima.

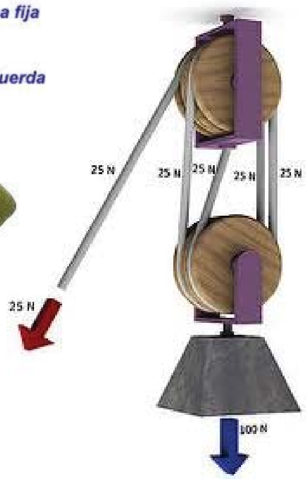


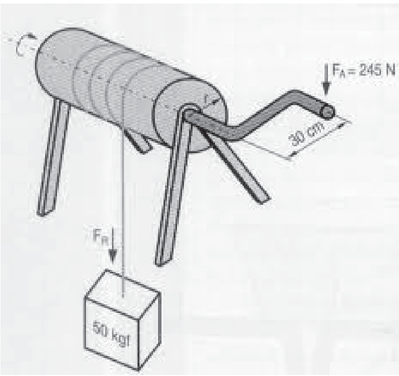
P-4.4.3, Q-4.4.16 P-4.4.11, Q-4.4.5 P-4.4.12, Q-4.4.6

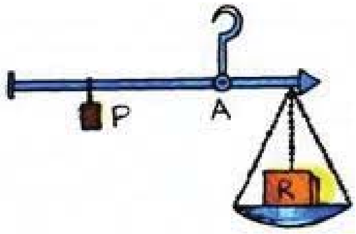
Máquinas simples

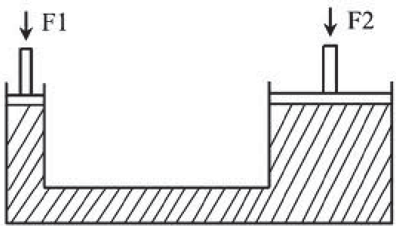
Se llaman <u>máquinas simples</u> las que utilizan, amplificándola, la fuerza humana o animal, facilitando así una tarea. Ej. de máquinas simples: plano inclinado, cuerda, rueda y polea, martillo, polipasto (polea compuesta), torno, palanca (normal e hidráulica)











Problemas con más sólidos rígidos: **P-4.5.2, P-4.5.6, P-4.5.19** P-4.5.4, P-4.5.13, Q-4.5.1, Q-4.5.2, Q-4.5.3

§3.10 Principio de d'Alembert y ligaduras ideales

ENLACE o LIGADURA := cualquier limitación al movimiento de un cuerpo

Ej.: *plano inclinado, suelo, cuerdas, carriles, guías, articulaciones* (ver §4.4)

<u>A un enlace está asociada una o más fuerzas de REACCIÓN</u> $\vec{R}$

LIGADURA IDEAL := Enlace cuya reacción no hace trabajo: $\vec{R}\cdot d\vec{r} = 0$

Ej: *plano inclinado o suelo sin fricción, cuerda con un extremo fijo, carril/guía sin fricción, articulaciones sin fricción*

<u>La reacción de una ligadura ideal no modifica la energía del cuerpo sujeto a la ligadura</u>

Teorema: Si un cuerpo rígido está sujeto sólo a fuerzas conservativas y enlaces ideales, su energía mecánica se conserva: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R} = m\vec{a} \Rightarrow (m\vec{a} - \vec{F}_1 - \vec{F}_2 - \vec{R}) = 0$

$$\Rightarrow (m\vec{a} - \vec{F}_1 - \vec{F}_2 - \vec{R})\cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \boxed{(m\vec{a} - \vec{F}_1 - \vec{F}_2)\cdot d\vec{r} = 0}$$ ← PRINCIPIO de D'Alembert

Ya que: $m\vec{a}\cdot d\vec{r} = dE_C$; $-\vec{F}\cdot d\vec{r} = dU$, el principio de d'Alembert es equivalente, si todas las fuerzas activas son conservativa, al principio de conservación de la energía mecánica:

$$(m\vec{a} - \vec{F}_1 - \vec{F}_2)\cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow dE_c + dU_1 + dU_2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{dE = 0} \qquad (E = E_c + U)$$

CONJUNTO DE ENLACES IDEALES := sobre un sistema de *N* sólidos, conjunto de *S* enlaces que colectivamente no hacen trabajo: $\sum_i^S \vec{R}_i \cdot d\vec{r}_i = 0$

Teorema: Si un sistema de más cuerpos rígidos está sujeto sólo a fuerzas conservativas y enlaces ideales, la energía mecánica TOTAL del sistema de cuerpos se conserva

Demo: para cada sólido $m_i\vec{a}_i - \vec{F}_i - \vec{R}_i = 0$. Sumando sobre todos los cuerpos:

$$\sum_i^N \left(m_i\vec{a}_i - \vec{F}_i - \vec{R}_i\right)\cdot d\vec{r}_i = 0 \Rightarrow \sum_i^N \left(m_i\vec{a}_i - \vec{F}_i\right)\cdot d\vec{r}_i = 0 \Leftrightarrow \sum_i^N dE_i = \boxed{dE = 0} \qquad (E = \sum_i E_i = \sum_i E_{c,i} + U_i)$$

§4.6 y 4.7 Estática y equilibrio de sólidos rígidos con reacciones ideales

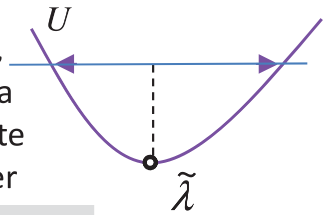
El principio de d'Alembert se reduce, en el caso de la estática, a la ecuación: $\sum_i^N \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = 0$ (**principio de los trabajos virtuales**). Si toda fuerza activa es conservativa, esto da $dU = 0$.
Como en el caso de la ecuación $dE/dt = 0$, estos principios son útiles cuando es posible individuar un número (pequeño) de coordenadas (grados de libertad) independientes.
Si este es el caso, se pueden escribir las fuerzas y aceleraciones (con fuerzas conservativas, las energías cinética y potencial) en función de tales coordenadas para hallar la solución.
P. ej., la ecuación $dU = 0$, escrita en función de parámetros independientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_L$, es:
$dU(\lambda_1, \ldots, \lambda_L) = \frac{\partial U}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \frac{\partial U}{\partial \lambda_2} d\lambda_2 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial \lambda_L} d\lambda_L = 0$. Al ser los parámetros λ independientes (¡esto no es el caso de las coordenadas $\vec{r}_i$!), la igualdad se cumple solo si:

P-3.10.8, P-4.7.10, P-4.7.4,P-4.7.7,P-4.7.1

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial \lambda_i}(\lambda_1, \ldots, \lambda_L) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, L \qquad \textbf{condición de equilibrio}}$$

P-4.7.16, P-4.7.2, P-4.7.9

Esto sólo ocurre para algunos valores de los λ, digamos para $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_L$.
Si en correspondencia de estos valores la función *U* tiene un mínimo local, el equilibrio es estable, ya que aún con un pequeño incremento de energía el cuerpo no puede escaparse del mínimo local. Si la función *U* es constante en un intervalo de valores de los λ, el equilibrio es indiferente. En cualquier otro caso, el equilibrio es inestable. **P-4.7.5, P-4.7.15**



P-4.7.13

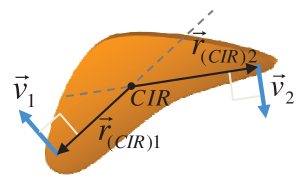
Además de sistemas con fuerzas peso o de Hooke, las ecuaciones de la condición de equilibrio se usan también cuando hay fuerzas constantes aplicadas al sistema: si una fuerza es constante en módulo y dirección (tal y como la fuerza peso), se puede definir una energía potencial asociada, y por lo tanto se podrá encontrar la condición de equilibrio por derivadas. **P-4.7.8, P-4.7.3**

§5.1 Cinemática de rotación en un plano (2D)

La ecuación de la cinemática para un sólido rígido es, como vimos: $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{i(C)}$. De esta ecuación se ve que la velocidad angular es independiente de que punto C se escoge, ya que respecto del punto *i* también vale $\vec{v}_C = \vec{v}_i - \vec{\omega} \times \vec{r}_{i(C)} = \vec{v}_i + \vec{\omega} \times \vec{r}_{C(i)}$. Este resultado era esperado, porque la velocidad angular es la velocidad con la que varía la orientación del sólido respecto del sistema de referencia, que no depende de donde se coloca el origen de tal referencia.
Si en cierto instante conocemos la velocidad de dos puntos *i* , *j* del sólido, podemos hallar $\vec{\omega}$ a partir de la relación: $\boxed{\vec{v}_i = \vec{v}_j + \vec{\omega} \times \vec{r}_{i(j)} \Rightarrow \vec{v}_i - \vec{v}_j = \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}$ **P-5.1.1**

En 2D, $\vec{\omega}$ es ortogonal al plano de rotación, o sea, $\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i = 0 \;\; \forall i$. Se define el centro instantáneo de rotación (CIR) como el punto del plano solidario con el sólido que tiene velocidad cero:
$\vec{v}_{CIR} = 0 = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CIR(C)}$. Multiplicando a la izquierda por $\vec{\omega} \times$: $\vec{\omega} \times \vec{v}_C = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{CIR(C)})$
Utilizando la relación $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$, se halla:
$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{CIR(C)}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{CIR(C)}) - \vec{r}_{CIR(C)}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = -\omega^2 \vec{r}_{CIR(C)}$

Por tanto es: $\boxed{\vec{r}_{CIR(C)} = (\vec{\omega} \times \vec{v}_C)/\omega^2}$ **P-5.1.2** Q-5.1.3



El *CIR* puede encontrarse gráficamente cruzando las perpendiculares a dos velocidades de dirección conocida, ya que: $\vec{v}_i = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{i(CIR)} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{i(CIR)} \Rightarrow \vec{v}_i \perp \vec{r}_{i(CIR)}$
El centro instantáneo de rotación varía en general con el tiempo de manera complicada. Por cada instante *t* , el *CIR*(*t*) correspondiente es un punto de velocidad cero, o sea fijo.

§5.2, §5.3 Dinámica de rotación y momento de inercia

La leyes generales de la dinámica de un sólido rígido son $\vec{F} = m\vec{A}_{CM}$ y $\vec{M}_{(Q)} = d\vec{L}_{(Q)}/dt \left\{ \begin{array}{l} \text{Q fijo o} \\ \text{Q=CM} \end{array} \right.$
Para hallar el movimiento de rotación necesitamos resolver la ecuación de los momentos, que es en general complicada. Sin embargo, en muchos casos de rotación en el plano, el momento angular de un sólido es directamente proporcional a su velocidad angular: $\vec{L}_{(Q)} \propto \vec{\omega}$

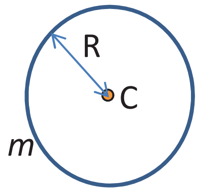
La constante de proporcionalidad depende del punto Q respecto al que se calcula el momento:

$\vec{L}_{(Q)} = I_{(Q)}\vec{\omega}$, y se llama **momento de inercia respecto de *Q***

Para ver por qué y cuanto vale tal momento de inercia, consideremos el caso de un objeto plano, que gira alrededor de su centro de masas, o de uno de sus puntos que permanece fijo. La ley dinámica de la rotación es en ambos casos $\vec{M}_{(Q)} = d\vec{L}_{(Q)}/dt$. Utilizando $\vec{v}^i = \vec{v}^Q + \vec{\omega}\times\vec{r}^i_{(Q)}$, el momento angular vale: $\vec{L}_{(Q)} = \int dm\vec{r}^i_{(Q)}\times\vec{v}^i = \int dm\vec{r}^i_{(Q)}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}^i_{(Q)}\right) + \int dm\vec{r}^i_{(Q)}\times\vec{v}^Q$

El 2o término es cero si Q es un punto fijo del sólido ($\vec{v}_Q = 0$), y también si Q = CM, ya que: $\int dm\vec{r}^i_{(CM)}\times\vec{v}_{CM} = \left(\int dm\vec{r}^i_{(CM)}\right)\times\vec{v}_{CM} = m\underbrace{\vec{R}^{CM}_{(CM)}}_{=0}\times\vec{v}_{CM} = 0$. Se tiene pues: $\vec{L}_{(Q)} = \int dm\vec{r}^i_{(Q)}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}^i_{(Q)}\right)$

Si el cuerpo gira en el mismo plano, el vector $\vec{\omega}$ tiene dirección siempre ortogonal al plano, y $\vec{r}^i_{(Q)}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}^i_{(Q)}\right) = \vec{\omega}(r^i_{(Q)})^2$. La integral del momento angular se reduce a:



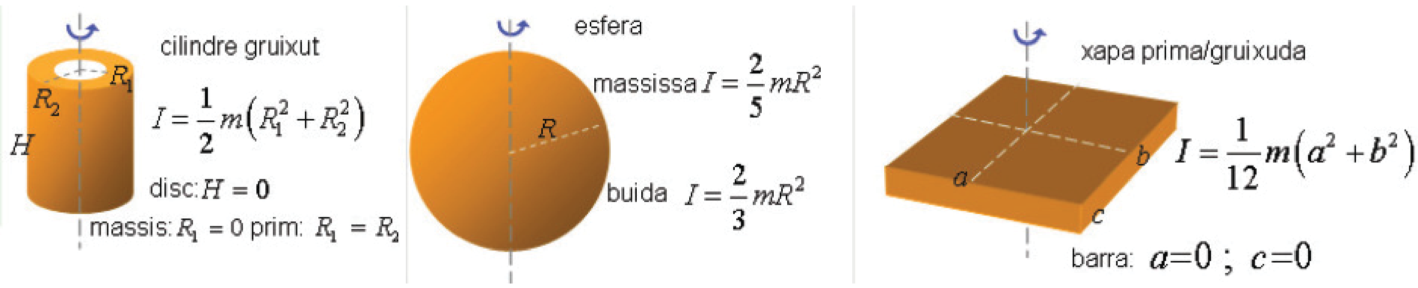
$$\boxed{\vec{L}_{(Q)} = \int dm\vec{\omega}(r^i_{(Q)})^2 = \vec{\omega}\int dm(r^i_{(Q)})^2 = I_{(Q)}\vec{\omega}}$$

Ej.: momento de inercia de un aro delgado de radio R y masa *m* que gira alrededor del centro *C* (fijo): $\vec{L}_{(C)} = \int dm\vec{r}^i_{(Q)}\times\vec{v}^i = \int dmRv^i = \int dmR\omega R = \omega R^2\int dm = mR^2\omega \quad\Rightarrow\quad I_{(C)} = mR^2$

La ecuación vale también para algunos cuerpos tridimensionales. En este caso la definición de momento de inercia es $I_Q = \int dmr^2_{\perp(Q)}$, donde $r_{\perp(Q)}$ es la componente de $\vec{r}_{(Q)}$ ortogonal al eje de rotación. Se demuestra que el momento de inercia es el mismo para todo punto del mismo eje. La ecuación $\vec{M}_{(Q)} = \vec{\alpha}I_Q$ tiene una fuerte similitud con la 2ª Ley de Newton. En particular, en 2D permite calcular la ecuación de la rotación en el tiempo $\theta(t)$ por integración, si $\vec{M}_{(Q)}(t)$ y por tanto $\alpha(t) = \ddot{\theta}(t)$ se conocen. P. ej., si $M_{(Q)}(t)$ es constante, α también lo es, lo que da origen a un movimiento angular uniformemente acelerado (o uniforme, si $\alpha = 0$)

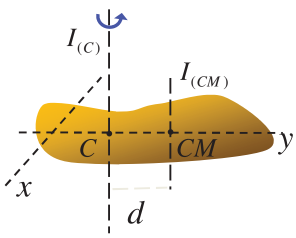
Q-5.3.7 (Q-4 test ExFinal junio'11), P-5.4.11, P-5.3.1, P-5.3.5 P-5.4.13

Momentos de inercia de algunos cuerpos homogéneos respecto de su CM



Como para el centro de masas, los valores de $I_{(CM)}$ de cuerpos con forma simple son conocidos. Para cuerpos compuestos, el momento de inercia total es la suma de los momentos de inercia de los trozos que forman el cuerpo: $I_{(C)} = I_{(C)1} + I_{(C)2}$. Lo mismo vale también si hay un agujero, tomando el momento de inercia del agujeros con signo negativo.

Si el punto fijo del cuerpo (el eje de rotación) no coincide con el CM, se puede calcular el momento de inercia gracias al teorema de Steiner:



$$I_{(C)} = \int_{Cos} r^2_{\|(C)}\,dm = \int_{Cos}(x^2_{(CM)} + (y_{(CM)} + d)^2)dm = \int_{Cos}(x^2_{(CM)} + y^2_{(CM)} + 2y_{(CM)}d + d^2)dm$$

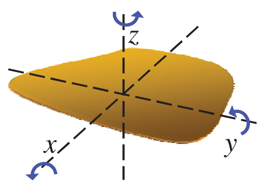
Ya que por definición de CM es $\int_{Cos} y_{(CM)}\,dm = 0$, esto da: $\boxed{I_{(C)} = I_{(CM)} + md^2}$

Ej: para una masa puntual *m* se tiene $I_Q = mr^2_{\perp(Q)}$.

Si un cuerpo gira alrededor de uno de sus puntos P, que permanece fijo, la cinemática y la dinámica son dadas simplemente por (ya que $\vec{v}_P = 0$) : $\vec{v}_i = \vec{\omega}\times\vec{r}_{i(P)}$, y

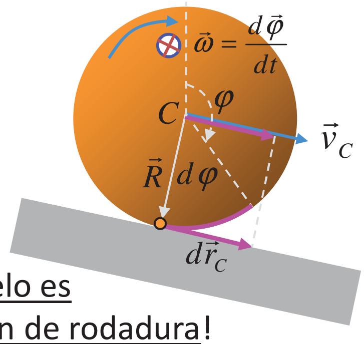
$\vec{M}_{(P)} = I_{(P)}\alpha = \left(I_{(CM)} + m(d_{P-CM})^2\right)\alpha$

Si el sólido es una superficie en el plano (x, y), vale además: $I_z = I_x + I_y$



Q-5.3.5, Q-5.3.1, Q-5.3.3, P-5.4.7

Rodadura Si un sólido con sección circular (esfera, cilindro) de radio R rueda con velocidad angular ω sobre una superficie, en un instante *dt* su centro se desplaza de $v_C dt$, mientras un punto de su superficie recorre un camino $Rd\varphi$. Si el cuerpo no desliza los dos recorridos son iguales y por lo tanto vale: $v_C = \omega R$ (condición de rodadura), o también, vectorialmente: $\vec{v}_C = -\vec{\omega}\times\vec{R}$ (véase el dibujo). En tal caso:



$$\vec{r}_{(C)CIR} = \frac{\vec{\omega}\times\vec{v}_C}{\omega^2} = -\frac{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})}{\omega^2} = \vec{R}$$

¡Esto implica que la fricción del suelo es ideal (no hace trabajo) en condición de rodadura!

Ya que el CIR es instantáneamente fijo, la ecuación del momento vale también respecto del CIR:

$$\vec{M}_{(CIR)} = d\vec{L}_{(CIR)}/dt = I_{(CIR)}\vec{\alpha}$$

P-5.3.3, P-5.3.8, P-5.3.7 Q-5.1.4, Q-5.1.2, P-5.4.3

Ej. de rototranslación sin rodadura: **P-5.3.10** (con h = 7b/8)

§ 5.4 Energía de rotación

La velocidad de un punto *i* de un sólido es $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{\omega}\times\vec{r}^{\,i}_{(C)}$, con *C* cualquiera. La energía cinética total vale:

$$E_c = \int\frac{1}{2}dm\vec{v}_i^2 = \int\frac{1}{2}dm\left(\vec{v}_C + \vec{\omega}\times\vec{r}_{i(C)}\right)^2 = \int\frac{1}{2}dmv_C^2 + \int\frac{1}{2}dm\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{i(C)}\right)^2 + \vec{v}_C\cdot\left(\vec{\omega}\times\underbrace{\int dm\vec{r}_{i(C)}}_{=0 \text{ si } C=CM}\right)$$

El último término es cero si C es un punto fijo ($\vec{v}_C = 0$), y también si C coincide con el centro de masas. Descomponiendo el vector $\vec{r}_{i(C)}$ en dos partes, una paralela y otra ortogonal a $\vec{\omega}$, se ha:

$\vec{\omega}\times\vec{r}_{i(C)} = \vec{\omega}\times\vec{r}_{\perp i(C)} = \omega\, r_{\perp i(C)}\hat{t}$ y por tanto: $\frac{1}{2}\int dm(\vec{\omega}\times\vec{r}_{i(C)})^2 = \frac{1}{2}\omega^2\int dmr^2_{\perp i(C)} = \frac{1}{2}I_{(C)}\omega^2$

La energía total de un cuerpo que gira en un plano es pues, según el caso:

-rotación respecto de C fijo: $E_c = \frac{1}{2}I_{(C)}\omega^2$

- rototranslación: $E_c = \frac{1}{2}m\omega_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{(CM)}\omega^2$

P-5.4.16, P-5.4.2, P-5.4.10, P-5.4.12, P-5.4.14

P-5.4.5, P-5.4.15, P-5.4.18, P-5.4.19, P-5.4.21, Leer: P-5.4.1+5.4.6

Choques entre sólidos rígidos (con rotación) En los problemas de choques con cuerpos rígidos que no se mueven de translación pura, hay que tener en cuenta la rotación. Para ello se aplican a menudo los principio de conservación: conservación del momento lineal total (si no hay fuerzas de reacción impulsivas), conservación del momento angular total, conservación (si el choque es elástico) de la energía mecánica. **P-5.3.6, P-5.4.17** (con v_{Cfinal} =2.12 m/s)

Resumen cinemática y dinámica sólido rígido de masa *m*

Velocidad de un punto cualquiera *i* respecto de otro *C*: $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{\omega}\times\vec{r}_{i(C)} \Rightarrow \vec{v}_i - \vec{v}_j = \vec{\omega}\times\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)$

1) Si el cuerpo está en reposo: $\vec{F}^{ext} = 0$ y $\vec{M}^{ext}_{(Q)} = 0$ respecto a cualquier punto *Q*

2) Si el cuerpo tiene un movimiento de pura translación: $\vec{F}^{ext} = m\vec{A}_{CM}$ y $\vec{M}^{ext}_{(CM)} = 0$

(también puede utilizarse: $\vec{M}^{ext}_{(Q)}(t) = d\vec{L}_{(Q)}/dt = \vec{R}_{CM(Q)}(t)\times\vec{A}_{CM}(t)$ *sólo respecto del CM!* siendo *Q* un punto fijo fuera del sólido, pero es más complicado)

3) Si el cuerpo sólo gira alrededor de un punto fijo *C*: $\vec{M}_{(C)} = \vec{\alpha}I_{(C)}$, con $I_{(C)} = I_{(CM)} + m\,d^2$

4) Si el cuerpo gira alrededor de un eje y a la vez se traslada: $\vec{F}^{ext} = m\vec{A}_{CM}$ y $\vec{M}_{(CM)} = \vec{\alpha}I_{CM}$

También pueden usarse las ecuaciones con la energía. Según el caso: (A) Estática: $dU = 0$

(B) Dinámica conservativa: $dE/dt = 0$ o $E_i = E_f$; (C) Con fuerzas no conservativas: $\Delta E = W_{NOcons}$

- Relación entre velocidad de un punto *Q* y ω: $v_Q = \omega\, d_{Q\leftrightarrow CIR}$; posición del CIR respecto de Q:
  caso particular: rodadura: $d_{CM\leftrightarrow CIR} = R \Rightarrow v_{CM} = R\omega)$ $\quad \vec{r}_{CIR(Q)} = \left(\vec{\omega}\times\vec{v}_Q\right)/\omega^2$

- Analogía "formal" entre cinemática/dinámica de translación y de rotación:

$$r\leftrightarrow\theta \;;\; v\leftrightarrow\omega \;;\; a\leftrightarrow\alpha \;;\; m\leftrightarrow I_{(Q)} \;;\; F\leftrightarrow M_{(Q)} \;;\; P\leftrightarrow L_{(Q)}$$

$$\Rightarrow \quad F = ma \leftrightarrow M_{(Q)} = I_{(Q)}\alpha \;;\; 1/2\,mv^2 \leftrightarrow 1/2\,I_{(Q)}\omega^2$$

P-5.3.9, P-5.4.20