MOVIMIENTO de un cuerpo = TRANSLACIÓN + ROTACIÓN + DEFORMACIÓN

§3.11 Grados de libertad y cinemática del sólido rígido

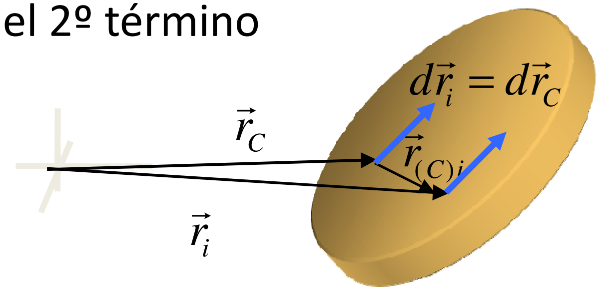
El sólido rígido es un modelo de los objetos que permite describir su forma, tamaño, y rotación. Un cuerpo rígido es un sólido indeformable: dos puntos cualquiera (*i*, *j*) del cuerpo se hallan siempre a la misma distancia. Por ello, para especificar su posición y orientación sólo se necesita conocer la posición de un punto del sólido más tres ángulos (en total, **6 grados de libertad**).

Si un cuerpo gira alrededor de un eje fijo (también exterior al cuerpo), cada punto i del cuerpo se mueve a lo largo de un circulo con velocidad $v^i = \omega R^i_{(C)}$, donde $R^i_{(C)}$ es la distancia del punto al eje de rotacion . En forma vectorial esto es $\vec{v}^i = \vec{\omega}\times\vec{r}^{\,i}_{(C)}$, siendo $\vec{r}^{\,i}_{(C)}$ el vector distancia, y $\vec{\omega}$ el vector velocidad angular (instantánea), que es paralelo al eje de rotación.

Sea ahora *C* un punto cualquiera del sólido. La posición $\vec{r}_i$ de otro punto *i* del sólido puede escribirse: $\vec{r}^{\,i} = \vec{r}^{\,C} + \vec{r}^{\,i}_{(C)}$, y su velocidad $\vec{v}^i = \vec{v}^C + \vec{v}^i_{(C)}$. El 1r término de ambas ecuaciones describe el movimiento del punto *C* respecto del sistema de referencia. El 2º, el movimiento de *i* respecto de *C*. Ya que la distancia entre *i* y *C* no puede variar, el 2º término tiene que ser un movimiento de rotación: $\vec{v}^i_{(C)} = \vec{\omega}^i \times \vec{r}^{\,i}_{(C)}$

Ademas, siendo el sólido rígido la velocidad angular es la misma para todo punto. Se ha pues:

$$\boxed{\vec{v}^i = \vec{v}^C + \vec{\omega}\times\vec{r}^{\,i}_{(C)}}$$



$\Rightarrow$la velocidad del punto *i* es la velocidad de translación de un punto *C* más una rotación respecto a *C*. Esto vale para C cualquiera, ¡incluso si *C* en realidad está girando!

Solo se necesitan 6 coordenadas para describir la posicion de un solido rigido; para especificar su movimiento sólo hay que conocer dos vectores $\vec{v}_C$ y $\vec{\omega}$ (6 coordenadas en total)

La rotación es una variación de la orientación del cuerpo respecto al sistema de referencia. Si la orientación no cambia, entonces $\vec{\omega} = 0$ (independientemente de que punto *C* se escoja)

§3.11 Ecuaciones generales de la dinámica de un sólido rígido

Un objeto extenso es una colección continua de partículas , cada una de masa infinitésima *dm*. El centro de masas, la energía cinética y los momentos lineal y angular de un sólido rígido se definen igual que para un sistema de más partículas, remplazando sumatorias por integrales con las sustituciones: $m_i \to dm = \rho dv \quad \vec{r}_i \to \vec{r}$

Así: $m = \int dm = \int \rho dV$ y $\vec{R}_{CM} = \dfrac{1}{m}\int dm\vec{r} = \dfrac{1}{m}\int dV\rho\vec{r}$

Además:

$$\left.\begin{aligned} E_C &= \frac{1}{2}\int dmv^2 = \frac{1}{2}\int dV\rho v^2 \\ \vec{P} = m\vec{V}_{CM} &= \int dm\vec{v} = \int dV\rho\vec{v} \\ \vec{L}_{(Q)} &= \int dm\vec{r}_{(Q)}\times\vec{v} = \int dV\rho\vec{r}_{(Q)}\times\vec{v} \end{aligned}\right\} \text{ con } \vec{v} = \vec{v}_C + \vec{\omega}\times\vec{r}_{(C)}$$

Movimiento de un cuerpo rígido → las mismas ecuaciones que para un sistema de particulas :

$$\boxed{\vec{F}^{ext} = \dot{\vec{P}} \quad \text{y} \quad \vec{M}^{ext}_{(Q)} = \dot{\vec{L}}_{(Q)} \quad \text{, con } Q = \text{fijo o CM}}$$

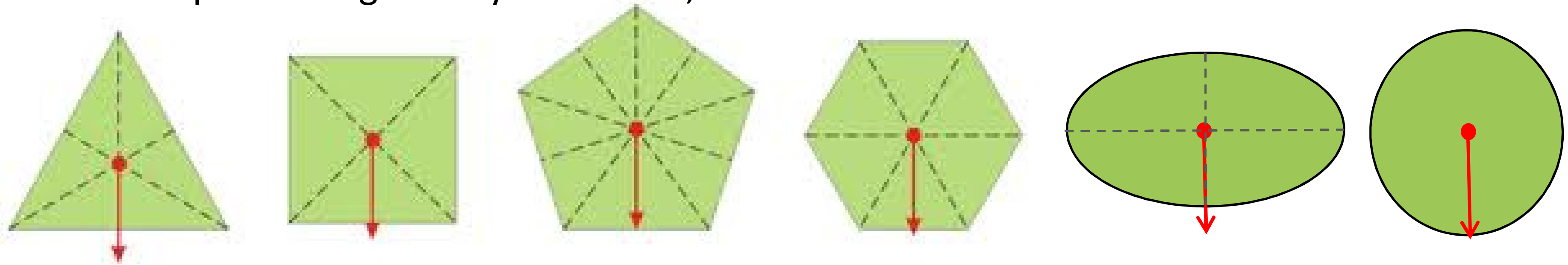
La 1ª ecuación (momento lineal) describe la traslación, la 2ª (momento angular) la rotación

§3.2 Centro de masas de un sólido

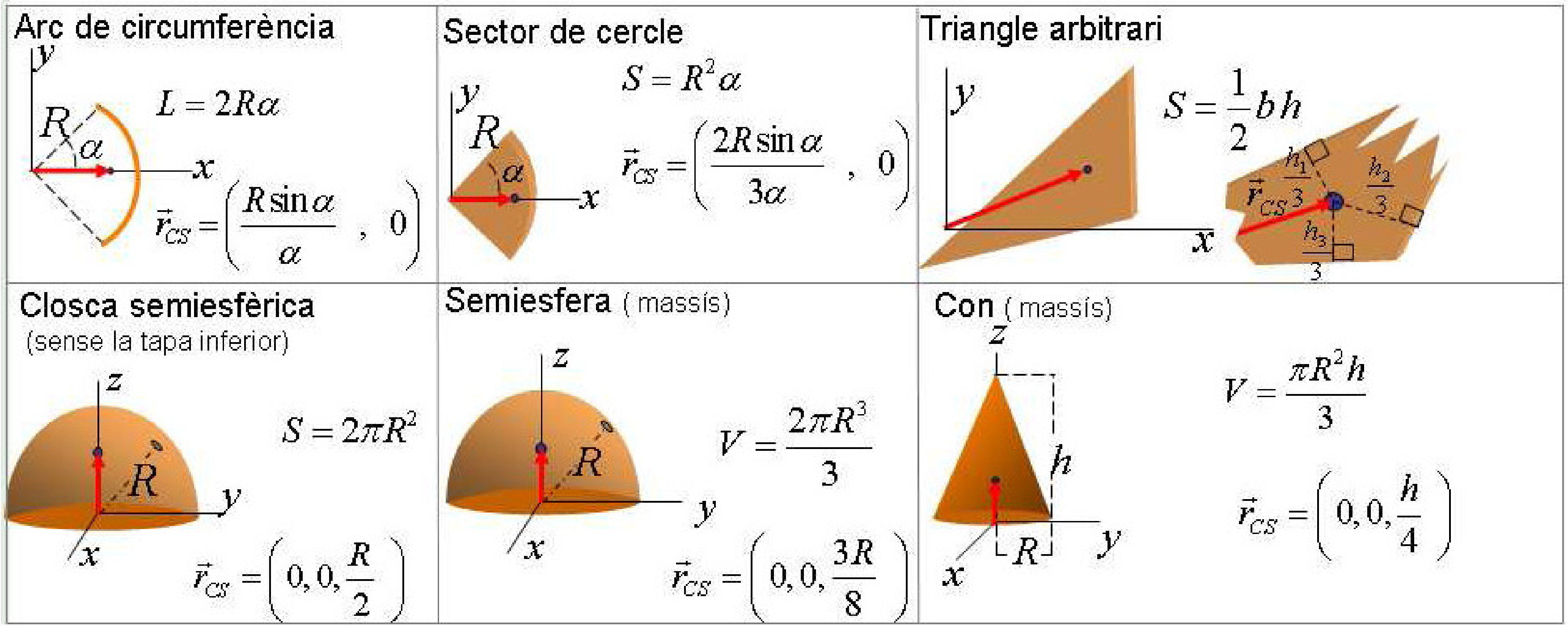
Propiedades importantes del centro de masas (CM)

1) $\vec{F} = m\vec{A}_{CM}$: dinámica de traslación = movimiento del CM
2) El momento lineal total tiene la forma simple $\vec{P} = m\vec{V}_{CM}$
3) $\vec{M}^{ext}_{(CM)} = \dot{\vec{L}}_{(CM)}$ (incluso si el CM tiene aceleración $\neq 0$!!)
4) El peso se aplica en el centro de masas (ver adelante)

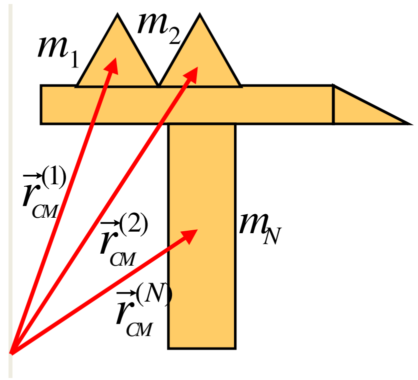
Para cuerpos homogéneos y simétricos, CENTRO DE MASAS = CENTRO GEOMÉTRICO :



CENTRO DE MASAS de algunos otros “objetos” homogéneos:



§3.2 Centro de masas de un sólido compuesto

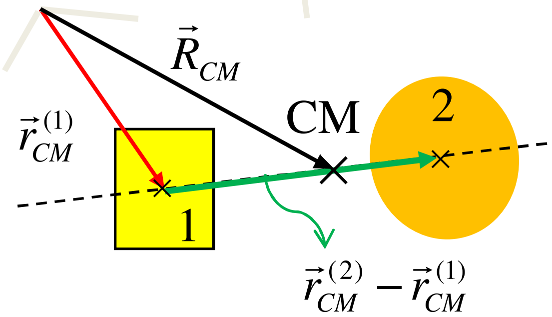


Si un cuerpo rígido está formado por partes de forma simple C_i, $i=1,\ldots,N$ de masa y centro de masas $\{m_i, \vec{r}_{CM}^{(i)}\}$, el centro de masas del cuerpo es:

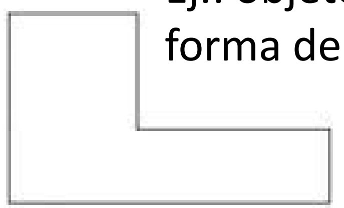
$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{m} \int_{C_1 \cup C_2 \ldots \cup C_N} dm\vec{r} = \frac{1}{m}\left(\int_{C_1} dm\vec{r} + \ldots + \int_{C_N} dm\vec{r} \right) = \frac{1}{m}\left(m_1 \vec{r}_{CM}^{(1)} + \ldots + m_N \vec{r}_{CM}^{(N)} \right)$$

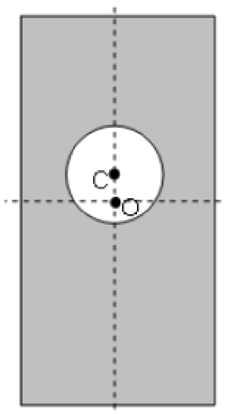
$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_{CM}^{(i)}$$ ($m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ es la masa total del sólido)

Si $N = 2$: $$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{m}\left(m_1 \vec{r}_{CM}^{(1)} + m_2 \vec{r}_{CM}^{(2)} \right) = \frac{1}{m}\left((m - m_2)\vec{r}_{CM}^{(1)} + m_2 \vec{r}_{CM}^{(2)} \right) = \vec{r}_{CM}^{(1)} + \frac{m_2}{m}\left(\vec{r}_{CM}^{(2)} - \vec{r}_{CM}^{(1)} \right)$$



Ej.: objeto en forma de “L”





Q-3.2.5 Se puede calcular del CM de un cuerpo rígido con agujeros, tomando las masas m_i de los agujeros con signo negativo. Para verlo, miremos la figura de la izquierda. Se ha: $$m_{tot}\vec{r}_{CM}^{(rect\ lleno)} = \sum_i m_i \vec{r}_{CM}^{(i)} = m_{trozo\ gris}\vec{r}_{CM}^{(trozo\ gris)} + m_{agujero}\vec{r}_{CM}^{(agujero)}$$

$$\Rightarrow m_{trozo\ gris}\vec{r}_{CM}^{(trozo\ gris)} = m_{tot}\vec{r}_{CM}^{(rect\ lleno)} - m_{agujero}\vec{r}_{CM}^{(agujero)} = \sum_{\pm} m_i \vec{r}_{CM}^{(i)}$$

P-3.2.2 , P-3.2.5; P-3.3.2

P-3.2.4, P-3.2.6, Q-3.2.2, Q-3.2.3, Q-3.2.7, Q-3.2.8

§3.11 y § 4.2 Dinámica de un sólido rígido y sistemas de fuerzas equivalentes

Las ecuaciones del movimiento para un cuerpo rígido son las mismas que para un sistema de partículas; en ellas no aparecen las fuerzas internas del sólido (“fuerzas de cohesión”):

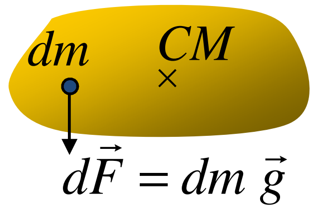
$$\boxed{\vec{F}^{\,ext} = d\vec{P}\big/dt = m\vec{A}_{CM} \;\; ; \;\; \vec{M}^{\,ext}_{(Q)} = d\vec{L}_{(Q)}\big/dt, \text{ con Q fijo o Q = CM}}$$

P-3.11.2 + comparar con 3.11.1

Estas 2 ecuaciones vectoriales corresponden a 6 ecuaciones en las coordenadas cartesianas. Un cuerpo rígido tiene 6 grados de libertad; así pues, tenemos 6 ecuaciones para 6 incógnitas: las ecuaciones de fuerzas y momentos son suficientes para resolver la dinámica. De esto sigue que **si dos conjuntos de fuerzas aplicadas sobre el mismo sólido tienen igual resultante e igual momento resultante (respecto al mismo punto), causarán los mismos efectos**. Se dice entonces que los dos sistemas de fuerzas son **equivalentes**.

Ejemplo: **centro de gravedad**. Sólido de masa *m* en el campo de gravedad terrestre. Cada trocito de masa *dm* del sólido está sujeto al peso $d\vec{F} = dm\,\vec{g}$, de modo que la fuerza peso total es

$$\int d\vec{F} = \int dm\,\vec{g} = \left(\int dm\right)\vec{g} = m\vec{g}$$



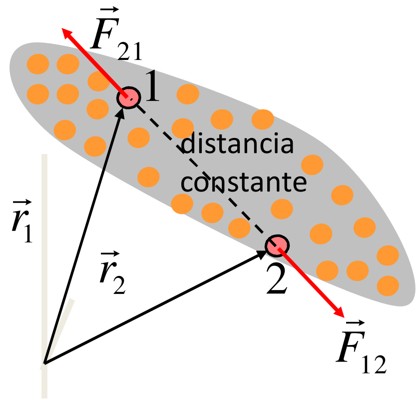
El momento total de las fuerzas $d\vec{F}$ respecto de un punto *Q* vale:

$$\vec{M}_{(Q)} = \int \vec{r}_{(Q)} \times dm\vec{g} = \left(\int \vec{r}_{(Q)} dm\right) \times \vec{g} = m\vec{R}^{CM}_{(Q)} \times \vec{g} = \vec{R}^{CM}_{(Q)} \times m\vec{g}$$

Por tanto el sistema de fuerzas peso de cada trozo del sólido es equivalente a una única fuerza $m\vec{g}$ aplicada al centro de masas, ya que en los dos casos los vectores $\vec{F}^{\,ext}$ y $\vec{M}^{\,ext}_{(Q)}$ son los mismos:

CENTRO DE MASAS = CENTRO DE GRAVEDAD

§3.11 Fuerzas internas y energía de un sólido rígido



Las fuerzas internas (de cohesión) de un sólido no entran en las ecuaciones de la dinámica. Además, al ser las distancias entre los puntos del sólido fija, la energía potencial asociada a las fuerzas interiores no varía nunca.

Así, a la hora de considerar 1) la energía, 2) el momento lineal, y 3) el momento angular de un sólido rígido, podemos olvidarnos de las fuerzas internas (a partir de ahora indicaremos las fuerzas exteriores simplemente con $\vec{F}$).

Para los sólidos rígidos, solo cuentan las fuerzas externas.

La energía potencial de la fuerza peso vale: $U = \int dmgz = g \int dmz = gmz_{CM}$

$$\Rightarrow \quad U = mgh_{CM}$$

$\Rightarrow$ también desde el punto de vista energético la fuerza peso puede considerarse aplicada en el CM, de forma que **la energía potencial sólo depende de la altura del centro de masas (CM)** .

(NOTA: esto vale también para la fuerza de gravitación universal y la correspondiente energía potencial, p. ej. entre planetas)

§3.11 Movimiento de traslación pura

La rotación es una variación de la orientación del cuerpo respecto al sistema de referencia. Si la orientación no cambia, entonces $\vec{\omega} = 0$

movimiento de pura traslación : $\vec{\omega} = 0 \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_C = \vec{v} \quad \forall i$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_{(CM)} = \int dm\vec{r}_{(CM)} \times \vec{v}_i = \int dm\vec{r}_{(CM)} \times \vec{v} = \left(\int dm\vec{r}_{(Q)}\right) \times \vec{v} = m\vec{R}^{CM}_{(CM)} \times \vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{M}^{ext}_{(CM)} = d\vec{L}_{(CM)} / dt = 0$$

el momento angular y el momento de las fuerzas de un sólido que no gira son ambos cero respecto del centro de masas

Así, para un sólido que no gira: $$\boxed{\vec{F}^{ext} = m\vec{A}_{CM} \; ; \; \vec{M}^{ext}_{(CM)} = 0}$$ **dinámica de pura traslacion**

La energía cinética de un sólido sin rotación, ya que todo punto tiene la misma velocidad $\vec{v}_i = \vec{v}_C$ (esto no es cierto si el sólido gira!!), vale: $$E_C = \frac{1}{2}\int dm v_C^2 = \frac{1}{2} m v_C^2$$

$\Rightarrow$ si un cuerpo no gira, se pueden aplicar las ecuaciones que valen para una partícula, tomando como posición de la partícula la coordenada del centro de masas del sólido; en particular valen la ecuación $\vec{F}^{ext} = m\vec{A}_{CM}$ y la ecuación del trabajo y la energía con

$$E_C = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 \qquad \text{y} \qquad U = mgh_{CM}$$

Además vale: $\vec{M}^{ext}_{(CM)} = 0$

P-3.10.12, P-3.4.3(a) + calcular punto de aplicación de N

Pr.4 final junio '11

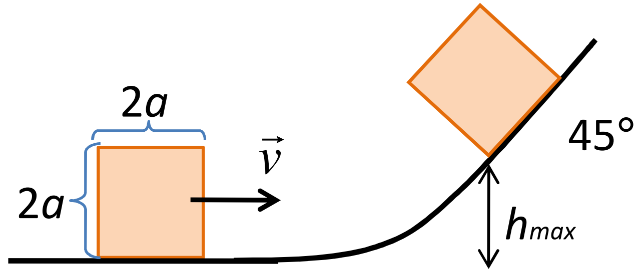
§3.10 Energía de sólidos rígidos en presencia de reacciones ideales

Se llama enlace o ligadura cualquier limitación al movimiento de un cuerpo (ej.: articulación, pared, plano, cuerdas, carriles…), y "reacción" la fuerza correspondiente (normal, tensión, ...). (una pared impide el movimiento a través de ella; una cuerda o una articulación imponen una trayectoria circular, etc.). Se dice que el enlace es ideal si la reacción asociada no hace trabajo.

Si un cuerpo está sujeto sólo a fuerzas conservativas y ligaduras ideales, su energía mecánica se conserva:

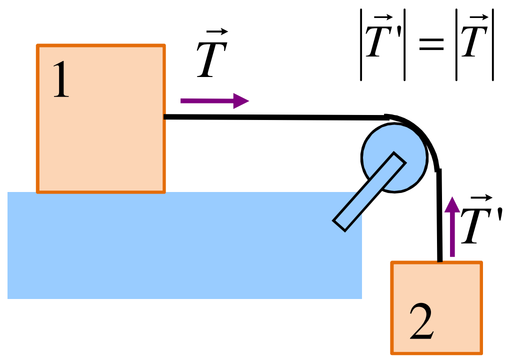
$$E = const$$

Ejemplo: ¿ h_{max} = ?



Conjunto de reacciones ideales

Como en el caso de más partículas, en un problema con más cuerpos rígidos se dice que las reacciones forman un **conjunto de reacciones ideales** si su trabajo total es cero. Ejemplo: dos sólidos atados a la misma cuerda: las dos tensiones $\vec{T}$ y $\vec{T}'$ forman un conjunto de reacciones ideales.



Si sobre un sistema de más cuerpos actúa un conjunto de reacciones ideales la energía mecánica <u>total</u> se conserva:

$$E_{tot} = E_1 + E_2 = const$$

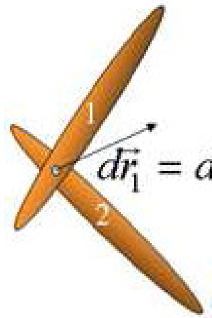
(<u>**no**</u> se conserva la energía de cada sólido por separado)

P-3.10.5

P-3.8.2 +P-3.10.6

Otro ejemplo:

P-3.8.1



$$d\vec{r}_1 = d\vec{r}_2 \ , \ \vec{R}_2 = -\vec{R}_1 \ \Rightarrow \ \boxed{\vec{R}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{R}_2 \cdot d\vec{r}_2 = 0}$$

§4.1 Estática del sólido rígido

Si un cuerpo rígido no se mueve o tiene velocidad de translación uniforme, $\vec{P} = \vec{L}_{(Q)} = ct$ (con Q cualquiera). Entonces $d\vec{P}/dt = 0$ y $d\vec{L}_{(Q)}/dt = 0$. De las ecuaciones del sólido rígido sigue pues:

$$\boxed{\vec{F}^{\,ext} = 0 \ , \ \vec{M}^{\,ext}_{(Q)} = 0}$$

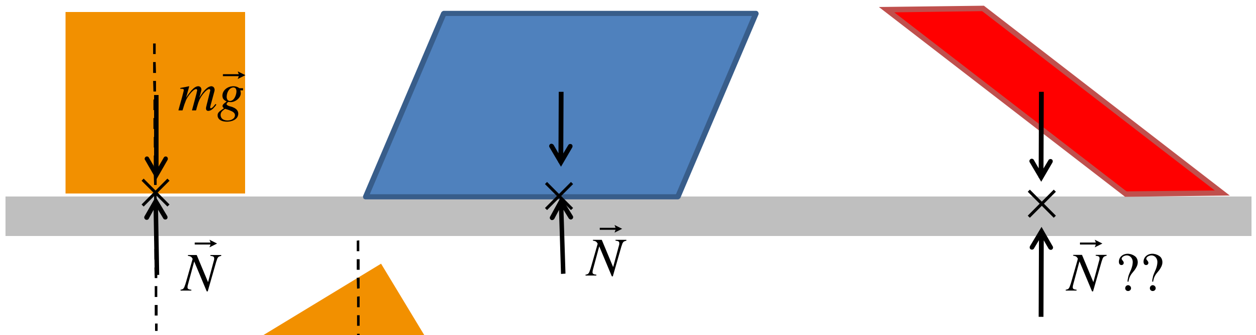
Condiciones para la estática (equilibrio) **P-4.1.3, P-4.4.7**

→ **Corolarios importantes de las ecuaciones de la estática**:

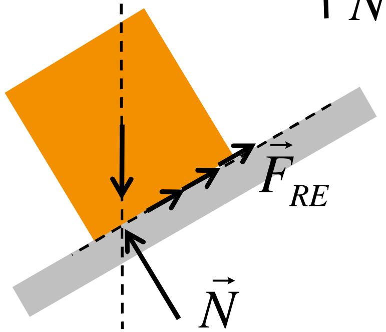
1) si a un cuerpo se aplican sólo 2 fuerzas, estas tienen que ser iguales y opuestas y tener la misma recta de acción
2) Si a un cuerpo se aplican sólo 3 fuerzas, además de tener resultante igual a cero, las rectas de acción tendrán que ser o todas paralelas o converger al mismo punto

Ej. del corolario 1: equilibrio en apoyo. El peso se aplica en el CM; si aplicamos una fuerza igual a $-m\vec{g}$ cuya recta de acción pase por el CM (y no hay más fuerzas) el sólido queda en equilibrio.

Sólido apoyado en un plano horizontal: si la proyección del centro de masas cae fuera de la base del cuerpo, éste cae:



Sobre un plano inclinado, para que haya equilibrio tiene que haber también una fuerza de fricción estática (corolario 2):



Q-4.4.8, P-4.2.1 + equilibrio barra articulada en un lado y apoyada en una pared

Q-3.2.1

NOTA: Un sistema de fuerzas sobre un sólido con resultante cero se llama un **par**

Una pelota de masa m esta atada, en puntos diametralmente opuestos, a dos hilos idénticos. Si el cabo suelto de uno de los dos hilos se fija al techo y se tira del otro hacia abajo, ¿cuál se rompe primero?

Un sistema de fuerzas sobre un sólido con resultante cero se llama **par (de fuerzas)**.

Para el equilibrio, las fuerzas aplicadas tienen que ser un par, pero esto no es suficiente: el momento resultante tiene también que anularse. El momento de un **par (**de fuerzas) es independiente del punto respecto al que se calcula; asì es suficiente que se anule respecto de un punto cualcquiera

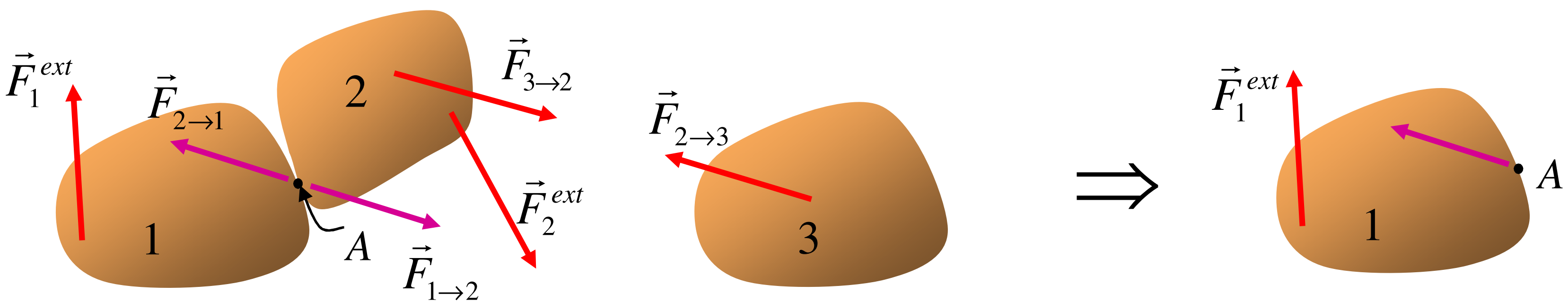
Estática de más sólidos rígidos

Si hay más sólidos *i* = 1, 2,..., para cada uno de ellos se aplicarán sendas ecuaciones de la estática $\vec{F}_i^{\,ext}=0$ y $\vec{M}_i^{\,ext}=0$. Para cada sólido se consideran sólo fuerzas que actúen sobre el, incluidas las fuerzas debidas a los demás cuerpos. Estas fuerzas (internas) cumplen la 3ª Ley de Newton:

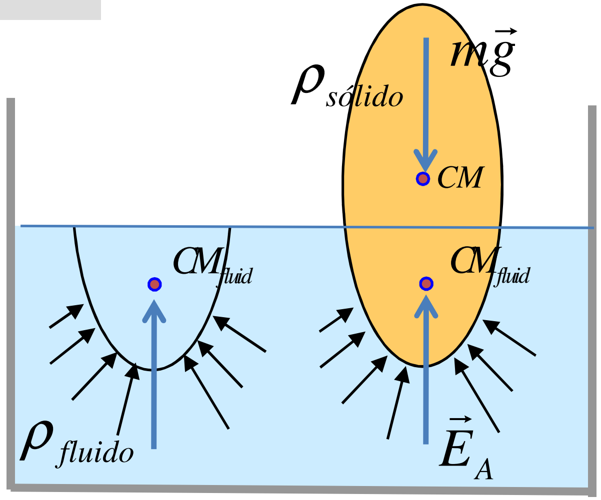
$$\vec{F}_{i\rightarrow j}=-\vec{F}_{j\rightarrow i}$$

¡ actúan sobre sólidos distintos!

<u>1 diagrama del sólido libre para cada cuerpo</u> :



§4.3 Fluidoestática y fuerzas generadas por un fluido sobre un sólido



Un líquido o fluido está compuesto por moléculas que rebotan continuamente contra las paredes del contenedor. Las colisiones causan fuerzas (llamadas de presión) debidas al líquido sobre paredes u objetos sumergidos. Si el líquido no es viscoso las colisiones son sin fricción y las fuerzas de presión son en cada punto ortogonales a las superficies.

Empuje de Arquímedes

Consideramos un volumen de líquido de forma cualquiera.
Sobre su superficie se ejercen fuerzas de presión (flechas negras). Dado que el líquido está en equilibrio, la resultante de estas fuerzas tiene que contrastar el peso de la porción de líquido; es decir, la fuerza de presión total (flecha azul) es igual y contraria al peso del volumen de líquido considerado, y se aplica en el mismo punto, o sea en el centro de masas del líquido. Si consideramos un sólido que ocupe el mismo volumen, sobre la superficie del sólido en contacto con el líquido se ejerce una fuerza de presión igual a la que si hubiera el líquido. Este es el **principio de Arquímedes**: el empuje de Arquímedes, $\vec{E}_A$, es **igual en módulo al peso del líquido desalojado**:

$$\boxed{\vec{E}_A = -m_{fluido}\vec{g} = -\rho_{fluido} V'\vec{g}}$$

La fuerza de Arquímedes se aplica en el centro de masas del volumen de fluido desalojado, que recibe el nombre de **centro de empuje** (CE) y se calcula como un centro de masas.

P-4.3.6, Q-4.3.5+cálculo de $\mathbf{E_A}$ **, P-4.3.7**

Q-4.3.2, Q-4.3.3, P-4.3.2

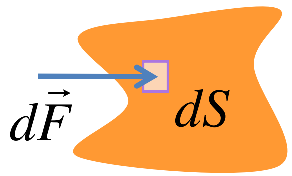
Flotación

¿Cuál es la condición para que un cuerpo flote? La fuerza peso del sólido vale $m\vec{g} = \rho_{sólido} V \; \vec{g}$.
Para el equilibrio $\vec{E}_A + m\vec{g} = 0$ o sea $-m_{fluido}\vec{g} + m\vec{g} = (-\rho_{fluido}V' + \rho_{sólido}V)\vec{g} = 0$, es decir:
$\rho_{sólido} = \rho_{fluido} V'/V$. Si el cuerpo flota, será *V' < V* ; por lo tanto:

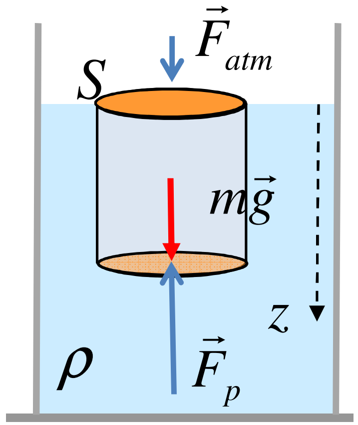
un cuerpo sólido flota en un líquido si $\rho_{sólido} < \rho_{fluido}$

Presión

La fuerza de presión de un fluido es más grande cuanto más grande sea la superficie contra la que se ejerce. Por ello es útil definir una **presión** como fuerza por unidad de superficie: $p = F/S$
(la unidad SI de presión es el Pascal: $1\,\text{Pa} = 1\,N/m^2$)
Dado que la presión no es la misma en todo punto de un fluido, hay que considerar una superficie infinitésima dS y definir la presión como: $dF = pdS$



¿Como varia la presión con la profundidad?
Sobre el cilindro de fluido de la figura, la fuerza horizontal total es cero por simetría. En equilibrio, las dos fuerzas verticales sobre las bases del cilindro, de área *S*, compensan el peso del cilindro: $F_p = F_{atm} + mg = p_{atm}S + \rho V g$,
siendo p_{atm} la presión atmosférica y *ρ* la densidad del fluido, que es constante al ser el fluido incompresible. Con *V* = *Sz*, se halla:



$$\boxed{p(z) = p_{atm} + \rho g z}$$

P-4.3.3, P-4.3.5

La cantidad $\rho g z = p_{fluido} - p_{atm}$ se llama **presión manométrica**.

aplicación: prensa hidráulica

Fuerza de presión sobre una superficie plana

La variación de presión de un gas con la altura es menospreciable respecto a la de un líquido: p_{atm} es una constante que empuja de la misma manera todos cuerpos en todas direcciones, y desaparece de los problemas de equilibrio, donde por lo tanto se considera sólo la presión manométrica $\rho g z$

P-4.3.1

Podemos ahora calcular la fuerza debida a fluido sobre la superficie rectangular de un sólido o del contenedor. La fuerza sobre un elemento *dS* de area es: $dF = pdS$. Utilizando $p = \rho g z$ e integrando, se ha: $F = \rho g \int z dS = \rho g S z_{CM}$ (donde se ha usado $z_{CM} = \frac{1}{\sigma S}\int z \sigma dS = \frac{1}{S}\int z dS$), o sea:

$$\boxed{F = \rho g S (z_1 + z_2)/2}$$

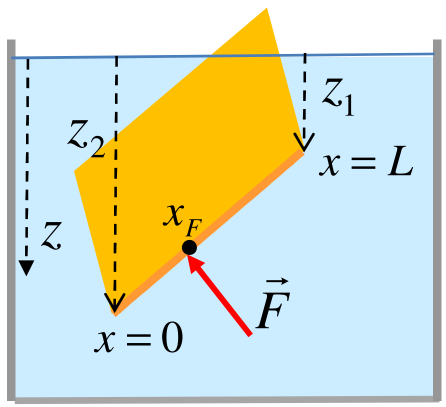
La fuerza de presión siempre empuja, es normal a la superficie, y se aplica (§4.3) a una distancia

$$\boxed{x_F = L(z_2 + 2z_1)/3(z_2 + z_1)}$$

del punto de máxima profundidad, siendo:

L la longitud lateral

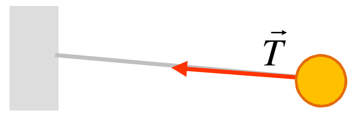
z_1 y z_2 las profundidades máxima y mínima



P-4.4.3, Q-4.4.16

P-4.4.12, Q-4.4.5, Q-4.4.6

§4.4 Reglas útiles para hacer problemas con sólidos rígidos y enlaces

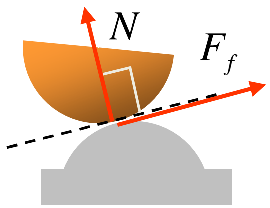


(1) **Tensión** de una cuerda: la fuerza siempre es paralela a la cuerda, tira (no puede empujar), y se aplica en el punto donde está atada. Si la cuerda no tiene masa ni está sujeta a fricción (no roza otros cuerpos), el módulo de la tensión es el mismo en cada punto.

(2) **Poleas**: cambian dirección y módulo de la tensión de una cuerda; la fuerza de una cuerda sobre una polea se aplica en el punto en que dejan de estar en contacto (demo) (→ hay generalmente dos fuerzas debida a una cuerda sobre una polea)

P-4.5.10

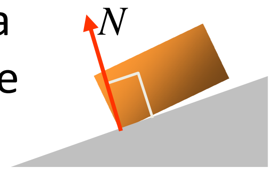
aplicación: polipasto



(3) la fuerza de fricción (si la hay) está en el plano de contacto (= plano tangente a al menos una de las dos superficies en contacto). **Fricción estática** : su magnitud varía según la situación. Como mucho su módulo vale $F_{RE}^{\max} = \mu_E N$; cuando llega a su valor máximo, el **deslizamiento** es **inminente**

P-4.4.2 Q-4.4.9

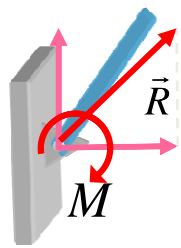
(4) Fuerza **normal**: siempre ortogonal al plano de contacto; siempre empuja. El punto equivalente de aplicación de la normal, que se halla con la condición de momento total cero, como mucho puede ser la esquina del cuerpo: condición de **vuelco inminente**

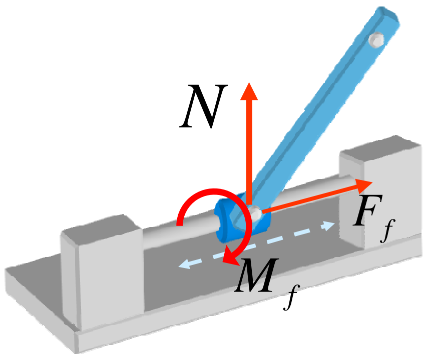


P-4.5.3 P-4.4.11

(5) En una articulación, la reacción puede tener cualquier dirección. Si <u>además hay fricción o empotramiento cabe añadir un momento (un par)</u>

P-4.1.2





(6) Para el equilibrio de una **palanca** o de una **balanza**, tienen que compensarse los momentos respecto del fulcro (perno)

P-4.5.9

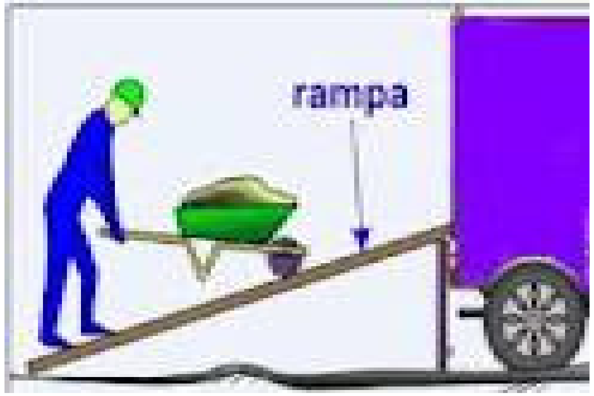
(7) La reacción de una guía o carril puede tener cualquier dirección en el plan normal a la guía; si hay rozamiento la fricción es paralela al carril

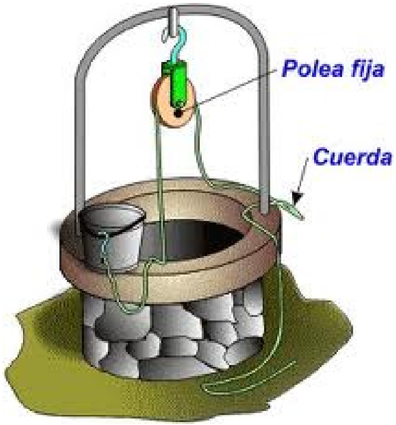
empezar en aula o como "test"

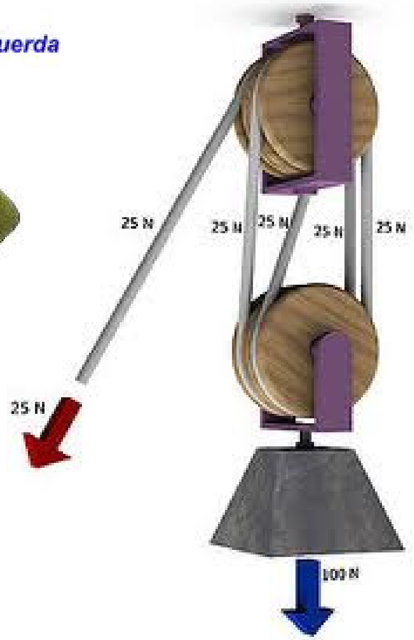
P-4.4.5, P-4.1.1, P-4.4.8, P-4.4.10, P-4.5.5, Q-4.4.10

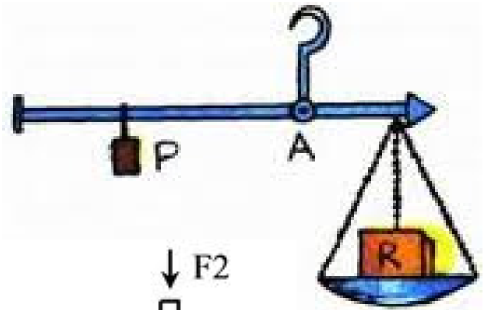
Máquinas simples

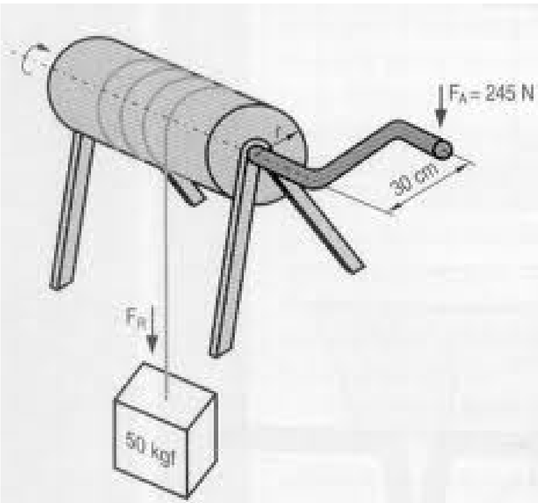
Se llaman <u>máquinas simples</u> las que utilizan, amplificándola, la fuerza humana o animal, facilitando así una tarea. Ej. de máquinas simples: plano inclinado, cuerda, rueda y polea, martillo, polipasto (polea compuesta), torno, palanca, prensa hidráulica

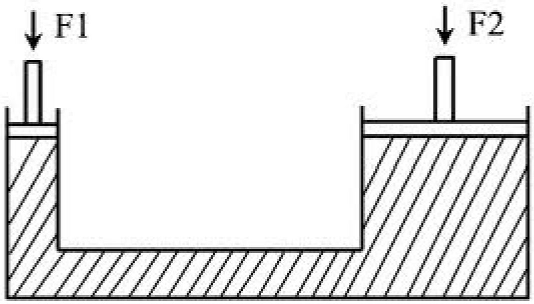












Problemas con más sólidos rígidos: **P-4.5.2, P-4.5.6, P-4.5.19** P-4.5.4, P-4.5.13, Q-4.5.1, Q-4.5.2, Q-4.5.3

§4.7 Estática y equilibrio de un sólido rígido con reacciones ideales

Para una fuerza (conservativa) que depende de la posicion x (en 1D), el equilibrio (estatica) corresponde a un maximo o a un minimo de la energia potencial, porque en tales puntos a derivada horizontal la fuerza (que es la derivada de *U* cambiada de signo) es cero. Esto vale en general: para sistemas conservativos, **el equilibrio se ha cuando la energia potencial total es minima o maxima**, una condicion que puede escribirse $dU = 0$. Si hay solo un grado de libertad λ (coordenada, angulo) que describe el sistema, la condicion que U sea maxima o minima es:

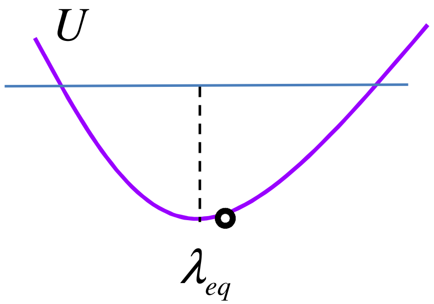
$$\boxed{\frac{dU}{d\lambda}(\lambda = \lambda_{eq}) = 0}$$

condición de equilibrio

Esta condicion se cumple solo para un valor especial λ_{eq} del parametro λ , o sea solo para el valor que corresponde a la posicion de equilibrio. Si en correspondencia de estos valores la función *U* tiene un mínimo local, o sea si su derivada segunda cumple la condicion:

$$\boxed{\frac{d^2U}{d\lambda^2}(\lambda = \lambda_{eq}) > 0}$$

equilibrio estable



el equilibrio es estable, ya que aún con un pequeño incremento de energía el cuerpo no puede escaparse del mínimo local.

Si la derivada 2ª es negativa, el equilibrio es inestable.
Si por otro lado la función *U* es constante en un intervalo de valores de λ, el equilibrio es indiferente. Si la derivada segunda es cero en λ_{eq} pero no para otros valores del grado de libertad, hay que seguir derivando hasta encontrar una derivada distinta de cero

P-4.7.16, P-4.7.2, P-4.7.9

P-3.10.8, P-4.7.10, P-4.7.4,P-4.7.7,P-4.7.1

Problemas de equilibrio con fuerzas constantes

Además de sistemas con fuerzas peso o de Hooke, las ecuaciones de la condición de equilibrio se usan también cuando hay fuerzas constantes aplicadas al sistema: si una fuerza es constante en módulo y dirección (tal y como la fuerza peso), se puede definir una energía potencial asociada, y por lo tanto se podrá encontrar la condición de equilibrio por derivadas.

P-4.7.5, P-4.7.15

P-4.7.13

§4.7 Estática y equilibrio de mas sólidos rígidos con reacciones ideales

Si un sistema de mas solidos rigidos tiene mas grados de libertad independientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_L$, la condicion que U sea un minimo o un maximo local (condicion de equilibrio) es

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda_i}(\lambda_1, \ldots, \lambda_L) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, L$$

Es decir, cada una de las derivadas parciales de *U* respecto a sus variables tiene que ser cero.

NOTA importante: esto vale solo si los grados de libertad son completamente independientes. Esto no es el caso, en general, si tomamos como variables del problemas las posiciones $\vec{r}_i$ de cada solido, porque normalmente hay una correlacion entre la posicion de un cuerpo y de otro.
→ hay que saber individuar los grados de libertad independientes (por ejemplo, dos angulos)

P-4.7.8, P-4.7.3

MOVIMIENTO de un cuerpo = TRANSLACIÓN + ROTACIÓN + DEFORMACIÓN

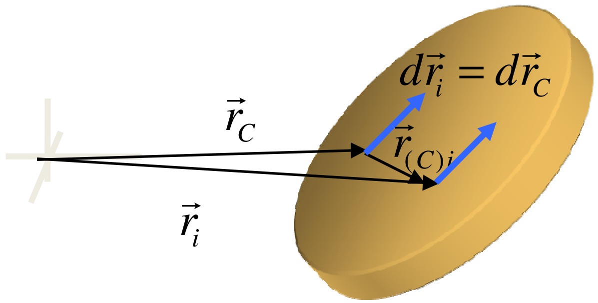
§3.11 Cinemática del sólido rígido

Un cuerpo rígido es un sólido continuo indeformable: dos puntos cualquiera (*i*, *j*) del cuerpo se hallan siempre a la misma distancia: $d_{ij} = \left|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right| = \text{const}$.
Si un cuerpo gira alrededor de un eje (también exterior al cuerpo), la velocidad de sus puntos se puede expresar (en forma vectorial) como $\vec{v}^{\,i} = \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,i}_{(C)}$, siendo $\vec{r}^{\,i}_{(C)}$ la distancia del punto *i* de un punto *C* sobre el eje, y $\vec{\omega}$ el vector velocidad angular (instantánea) que es paralelo al eje de rotación. Esta es la versión vectorial de la formula $v_T = \omega R$ del movimiento circular en el plano.

Sea ahora *C* un punto cualquiera del sólido. La posición $\vec{r}_i$ de otro punto *i* del sólido puede escribirse: $\vec{r}^{\,i} = \vec{r}^{\,C} + \vec{r}^{\,i}_{(C)}$, y su velocidad $\vec{v}^{\,i} = \vec{v}^{\,C} + \vec{v}^{\,i}_{(C)}$. El 1r término de ambas ecuaciones describe el movimiento del punto *C* respecto del sistema de referencia. El 2º, el movimiento de *i* respecto de *C*. Como la distancia entre *i* y *C* no puede variar, el movimiento de *i* relativo a *C* sólo puede ser un movimiento de rotación, o sea: $\vec{v}^{\,i}_{(C)} = \vec{\omega}^{\,i} \times \vec{r}^{\,i}_{(C)}$

Dado que el sólido es rígido, el módulo de la velocidad angular tiene que ser el mismo para todo punto. Se ha pues:

$$\boxed{\vec{v}^{\,i} = \vec{v}^{\,C} + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,i}_{(C)}}$$



Así, la velocidad del punto *i* es la velocidad de translación de un punto *C* más una rotación respecto a *C*. Esto vale para C cualquiera, ¡incluso si *C* en realidad está girando! Un movimiento de rotación es una variación de la orientación de un cuerpo respecto al sistema de referencia. Si la orientación no cambia, entonces $\vec{\omega} = 0$ (independientemente de que punto *C* se escoja)

§5.1 Cinemática de rotación en un plano (2D)

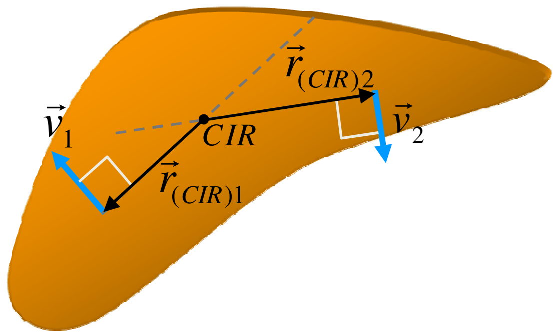
La ecuación de la cinemática de un sólido rígido es: $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{i(C)}$. Aquí se ve que la velocidad angular es independiente de que punto *C* se escoge, ya que respecto del punto *i* también vale: $\vec{v}_C = \vec{v}_i - \vec{\omega} \times \vec{r}_{i(C)} = \vec{v}_i + \vec{\omega} \times \vec{r}_{C(i)}$.

Esto tiene sentido porque la velocidad angular es la velocidad con la que varía la orientación del sólido respecto del sistema de referencia y no depende de donde esté el origen. Si en cierto instante se conoce la velocidad de dos puntos *i* , *j* del sólido, $\vec{\omega}$ se calcula a partir de:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_j + \vec{\omega} \times \vec{r}_{i(j)} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_i - \vec{v}_j = \vec{\omega} \times \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)}$$

El cálculo es simple ya que en 2D $\vec{\omega}$ siempre es ortogonal al plano de rotación. Otra forma de encontrar $\vec{\omega}$ es a través del “centro instantáneo de rotación” (CIR) : si consideramos un plano solidario con el sólido (se puede imaginar una hoja de plástico transparente atada al sólido), el CIR es el punto de tal plano que tiene velocidad cero:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CIR} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{i(CIR)} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{i(CIR)} \Rightarrow \vec{v}_i \perp \vec{r}_{i(CIR)}$$



Por lo tanto, **el CIR puede por tanto encontrarse gráficamente cruzando las perpendiculares a dos velocidades conocidas**.

A partir del CIR, la velocidad de un punto cualquiera del sólido puede escribirse, en módulo, como: $v_i = \omega\, d_{i(CIR)}$,

donde $d_{i(CIR)}$ = distancia del punto al CIR.

P-5.1.1, P-5.1.2

Q-5.1.3

Nota: el CIR es un punto que va cambiando en el tiempo, en general de manera complicada.

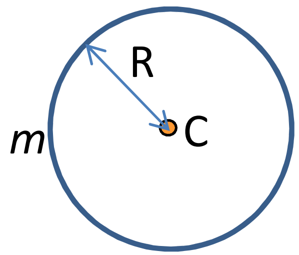
§5.3 Dinámica de rotación y momento de inercia

La leyes de la dinámica de un sólido rígido son $\vec{F} = m\vec{A}_{CM}$ y $\vec{M}_{(Q)} = d\vec{L}_{(Q)}/dt$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Q fijo o} \\ \text{Q=CM} \end{array} \right.$

Para hallar el movimiento de rotación hay que resolver la ecuación de los momentos, que es en general complicada. Sin embargo, en muchos casos de rotación en el plano, el momento angular de un sólido es directamente proporcional a su velocidad angular: $\vec{L}_{(Q)} \propto \vec{\omega}$

Esta expresión vale sólo para puntos *Q* particulares. La constante de proporcionalidad depende de *Q* : $\boxed{\vec{L}_{(Q)} = I_{(Q)}\vec{\omega}}$, y se llama **momento de inercia respecto de *Q***. *Q* puede ser o un punto fijo del sólido (si existe), o el CM.

Ejemplo: momento de inercia de un aro delgado de radio R y masa *m* que gira alrededor de su centro *C* :



$$\vec{L}_{(C)} = \int dm\vec{r}^{\,i}_{(Q)} \times \vec{v}^{\,i} = \int dmRv^i = \int dmR\omega R = \omega R^2 \int dm = mR^2\omega \quad \Rightarrow \quad I_{(C)} = mR^2$$

Demonstración para un objeto 2D cualquiera que se traslada y a la vez gira en un plano: la velocidad de un punto i del sólido es $\vec{v}^{\,i} = \vec{v}^{\,Q} + \vec{\omega} \times \vec{r}^{\,i}_{(Q)}$, siendo Q otro punto cualquiera del sólido. Se ha: $\vec{L}_{(Q)} = \int dm\vec{r}^{\,i}_{(Q)} \times \vec{v}^{\,i} = \int dm\vec{r}^{\,i}_{(Q)} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,i}_{(Q)}\right) + \int dm\vec{r}^{\,i}_{(Q)} \times \vec{v}^{\,Q}$

El 2º término es cero si *Q* es un punto fijo ($\vec{v}_Q = 0$), y también si Q = CM, ya que:

$\int dm\vec{r}^{\,i}_{(CM)} \times \vec{v}_{CM} = \left(\int dm\vec{r}^{\,i}_{(CM)}\right) \times \vec{v}_{CM} = m\underbrace{\vec{R}^{CM}_{(CM)}}_{=0} \times \vec{v}_{CM} = 0$. Se tiene pues: $\vec{L}_{(Q)} = \int dm\vec{r}^{\,i}_{(Q)} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,i}_{(Q)}\right)$

Dado que el cuerpo gira en un plano, el vector $\vec{\omega}$ tiene dirección constante ortogonal al mismo, por lo que: $\vec{r}^{\,i}_{(Q)} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{\,i}_{(Q)}\right) = \vec{\omega}(r^i_{(Q)})^2$. El momento angular se reduce entonces a:

$$\boxed{\vec{L}_{(Q)} = \int dm\vec{\omega}(r^i_{(Q)})^2 = \vec{\omega}\int dm(r^i_{(Q)})^2 = I_{(Q)}\vec{\omega}\,, \text{ con Q fijo del sólido o Q=CM}}$$

§5.3 Momento de inercia

La ecuación $\vec{L}_{(Q)} = I_{(Q)}\vec{\omega}$ vale también para algunos cuerpos tridimensionales. En tal caso, la definición de momento de inercia es $I_Q = \int dm r^2_{\perp(Q)}$, siendo $r_{\perp(Q)}$ la componente de $\bar{r}_{(Q)}$ que es ortogonal al eje de rotación. Se demuestra que el momento de inercia es el mismo para todo punto del mismo eje. Si $\vec{L}_{(Q)} = I_{(Q)}\vec{\omega}$, entonces la ley dinámica de la rotación se escribe $\vec{M}_{(Q)} = d\vec{L}_{(Q)}\big/dt = I_{(Q)}\, d\vec{\omega}\big/dt$, o sea $\vec{M}_{(Q)} = \vec{\alpha} I_Q$.

Esta ecuación tiene una fuerte similitud con la 2ª Ley de Newton. En particular, en 2D permite calcular el ángulo de rotación en función del tiempo $\theta(t)$ por integración, si $\vec{M}_{(Q)}$ y por tanto $\alpha(t) = \ddot{\theta}(t)$ se conocen. P. ej., si $M_{(Q)}(t)$ es constante, α también lo es, lo que da origen a un movimiento angular uniformemente acelerado (o uniforme, si $\alpha = 0$)

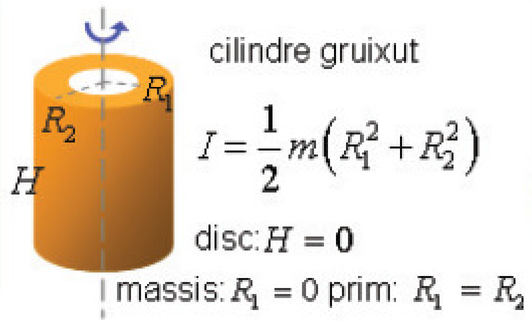
Q-5.3.7 (Q-4 test ExFinal junio'11), P-5.4.11, P-5.3.1, P-5.3.5

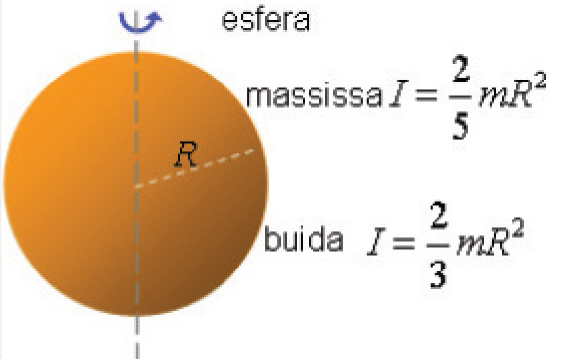
P-5.4.13

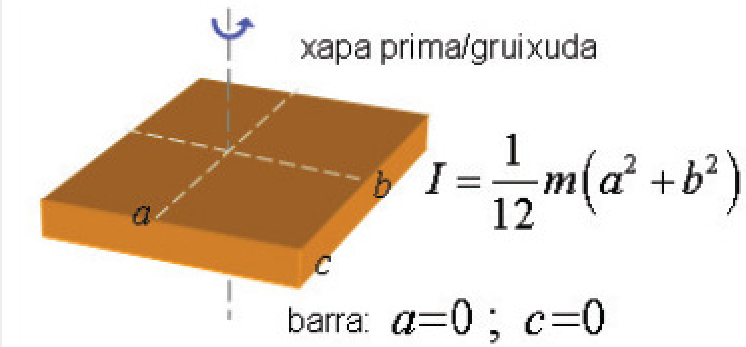
Momentos de inercia de algunos cuerpos homogéneos respecto de su CM

P-5.4.7

Como para el centro de masas, los valores de $I_{(CM)}$ de cuerpos con forma simple son conocidos:







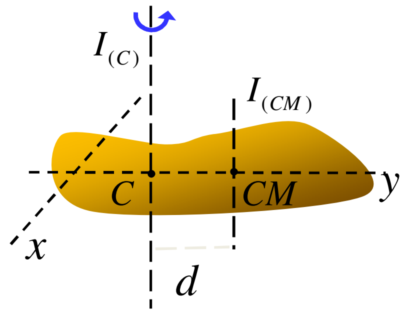
Para cuerpos compuestos, el momento de inercia total es la suma de los momentos de inercia de los trozos que forman el cuerpo: $I_{(C)} = I_{(C)1} + I_{(C)2}$. Lo mismo vale también si hay un agujero, tomando el momento de inercia del agujeros con signo negativo.

§5.3 Teorema de Steiner

Cuando un cuerpo gira alrededor de uno de sus puntos C, que se mantiene fijo durante el movimiento, conviene calcular los momentos y escribir el momento de inercia respecto de C. Se puede calcular el momento de inercia respecto de un punto distinto del CM gracias al **<u>teorema de Steiner</u>**:

$$I_{(C)} = \int_{Cos} r^2_{(\perp C)}\, dm = \int_{Cos} (x^2_{(CM)} + (y_{(CM)} + d)^2)\, dm = \int_{Cos} (x^2_{(CM)} + y^2_{(CM)} + 2 y_{(CM)} d + d^2)\, dm$$

Ya que por definición de CM es $\int_{Cos} y_{(CM)}\, dm = 0$, esto da



$$\boxed{I_{(C)} = I_{(CM)} + md^2}$$

Ej: para una masa puntual *m* se obtiene $I_{(Q)} = mr^2_{\perp(Q)}$

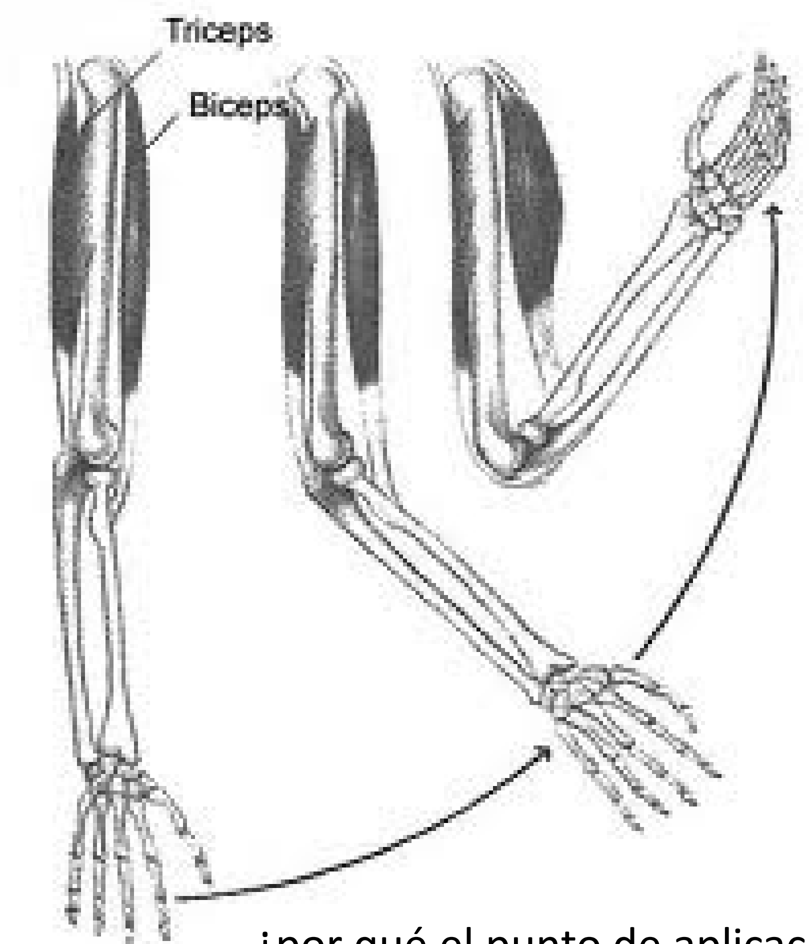
Si un cuerpo gira alrededor de uno de sus puntos C, que permanece fijo, la cinemática y la dinámica son dadas simplemente por (ya que $\vec{v}_C = 0$) :

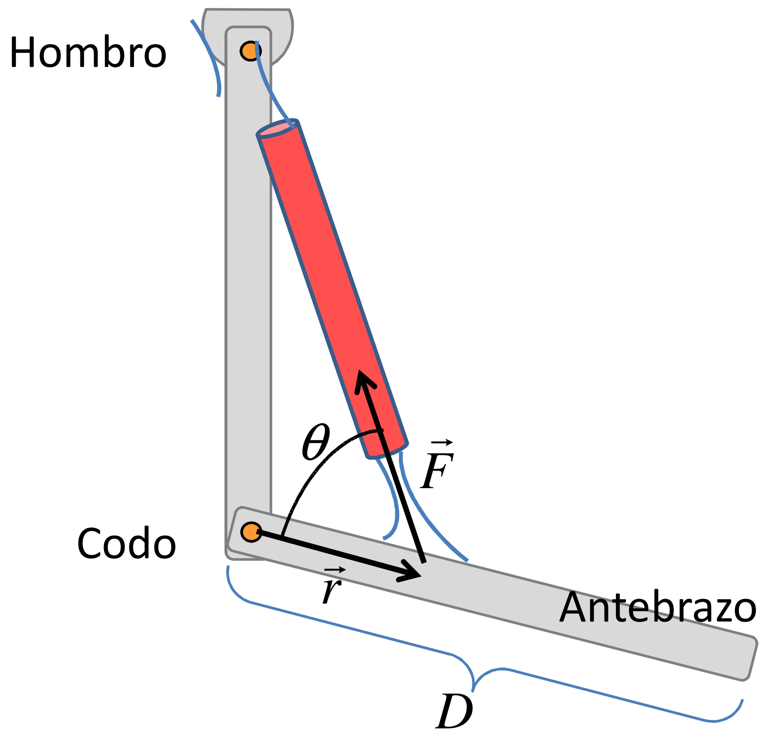
$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_{i(C)} \quad , \text{ y } \quad M^{ext}_{(C)} = I_{(C)} \alpha = \left(I_{(CM)} + m (d_{C-CM})^2 \right) \alpha$$

¿Por qué se pone la manija de una puerta en el lado opuesto al perno?

Q-5.3.5, Q-5.3.1, Q-5.3.3

una aplicación de la ley $\vec{M}_{(Q)} = \frac{d\vec{L}_{(Q)}}{dt} = I_{(Q)}\alpha$





$$\left|\vec{M}_{(codo)}(\vec{F})\right| = \left|\vec{F}\right|\left|\vec{r}\right|\sin\theta = I_{(codo)}\alpha$$

$\Rightarrow$ el momento y la aceleración angular son máximos para $\theta = 90^\circ$

¿por qué el punto de aplicación de $\vec{F}$ (el tendón) está tan cerca del codo?

No es una buena estrategia para levantar cosas pesadas, pero permite movimientos más rápidos p. ej. de las manos: si el músculo se contrae de $\Delta\ell$ en un tiempo de respuesta muscular Δt, la velocidad del tendón es $v_{tendón} = v_{contracción} = \Delta\ell / \Delta t = \omega\, r$, la de la mano vale:

$$v_{mano} = \omega D = v_{contracción} D / r >> v_{contracción}$$

§5.3 Conservación del momento angular de un sólido rígido

La ecuación $\vec{M}_{(Q)} = \frac{d\vec{L}_{(Q)}}{dt} = I_{(Q)} \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ (con Q fijo o Q ≡ CM) implica que:

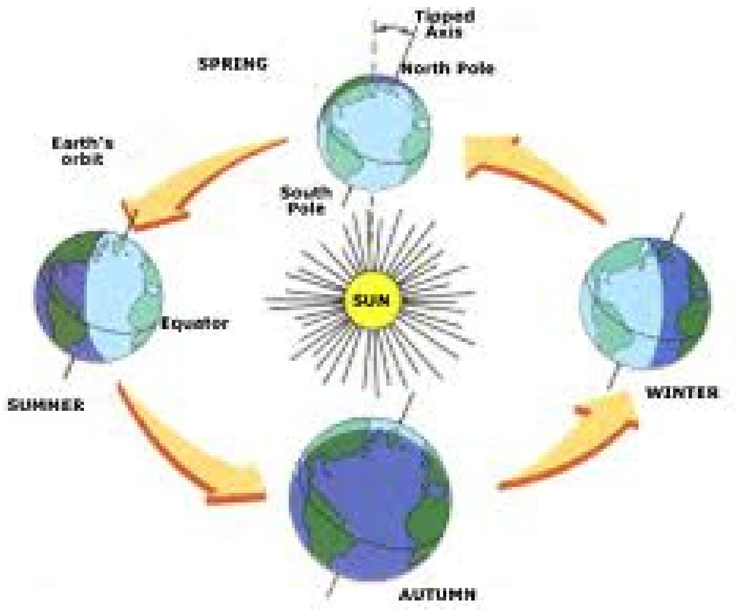
si $\vec{M}_{(Q)} = 0$, entonces $\vec{L}_{(Q)} = const$

Este es el teorema de conservación del momento angular para un sólido rígido. Corolario muy importante: **cuando un sólido está sujeto sólo a fuerzas aplicadas en su CM** (peso, gravitación universal), **el momento angular respecto al CM se conserva**

Si durante el movimiento $I_{(Q)}$ no varía,

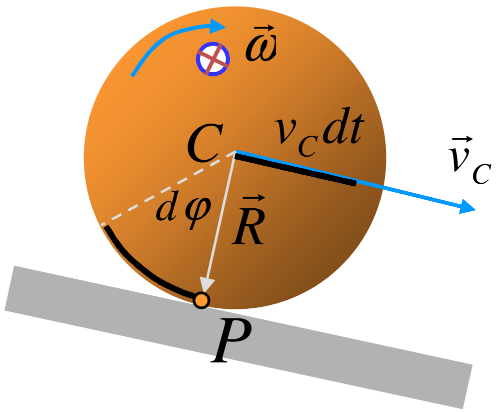
$$\boxed{\vec{M}_{(Q)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_{(Q)} = const \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} = const}$$

Aplicaciones y consecuencias importantes:
Estaciones , giroscopio, armas de fuego (, …)



fútbol americano →

Rodadura



Si un sólido con sección circular (esfera, cilindro) de radio R rueda con velocidad angular ω sobre una superficie, en un instante *dt* su centro se desplaza de $v_C dt$, mientras un punto de su superficie recorre una distancia *Rdφ*. Si el cuerpo no desliza los dos recorridos son iguales y por lo tanto vale:

$$v_C = \omega R$$ **condición de rodadura**

(vectorialmente $\vec{v}_C = -\vec{\omega}\times\vec{R}$, ver dibujo). La velocidad del punto de contacto *P* es pues nula:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega}\times\vec{r}^{\,P}_{(C)} = \vec{v}_C + \vec{\omega}\times\vec{R} = 0$$

Esto implica que:

1) **si hay rodadura hay fricción, porque si no el cuerpo deslizaría sin girar** ;
2) **la fricción es un rozamiento de tipo estático, y además es ideal** (no hace trabajo)!

Los problemas de rodadura se resuelven utilizando las ecuaciones de la dinámica (con CM = C)

$\vec{M}_{(CM)} = I_{(CM)}\vec{\alpha}$ y $\vec{F} = m\vec{a}_C$, y con además la condición de rodadura $a_C = R\alpha$

P-5.3.3, P-5.3.8, P-5.3.7

Q-5.1.4,Q-5.1.2, P-5.4.3

§ 5.4 Energía de rotación

La velocidad de un punto *i* de un sólido es $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{\omega}\times\vec{r}^{\,i}_{(C)}$, con *C* cualquiera. La energía cinética total es:

$$E_c = \int \frac{1}{2} dm \vec{v}_i^{\,2} = \int \frac{1}{2} dm \left(\vec{v}_C + \vec{\omega}\times\vec{r}_{i(C)}\right)^2 = \int \frac{1}{2} dm v_C^2 + \int \frac{1}{2} dm \left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{i(C)}\right)^2 + \vec{v}_C \cdot \left(\vec{\omega}\times \underbrace{\int dm \vec{r}_{i(C)}}_{=0 \text{ si } C=CM}\right)$$

El último término es cero si C es un punto fijo ($\vec{v}_C = 0$), y también si C coincide con el centro de masas. Descomponiendo el vector $\vec{r}_{i(C)}$ en dos partes, una paralela y otra ortogonal a $\vec{\omega}$, se ha:

$$\vec{\omega}\times\vec{r}_{i(C)} = \vec{\omega}\times\vec{r}_{\perp i(C)} = \omega\, r_{\perp i(C)} \hat{t}$$ y por tanto: $$\frac{1}{2}\int dm(\vec{\omega}\times\vec{r}_{i(C)})^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \int dm r^2_{\perp i(C)} = \frac{1}{2} I_{(C)} \omega^2$$

La energía total de un cuerpo que gira en un plano es pues, según el caso:

- rotación respecto de C fijo: $E_c = \frac{1}{2} I_{(C)} \omega^2$

- rototranslación (ej.: rodadura): $E_c = \frac{1}{2} m\omega_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{(CM)} \omega^2$

En el caso de la rodadura, la fricción es ideal $\Rightarrow$ la energia se conserva !!

Dos esferas de la misma masa y mismo radio exterior se dejan caer rodando por el mismo plano inclinado. Si una esfera es maciza y la otra es hueca, cual de las dos llega abajo por primera?

P-5.4.16, P-5.4.2, P-5.4.10, P-5.4.12, P-5.4.14

P-5.4.5, P-5.4.15, P-5.4.18, P-5.4.19, P-5.4.21, Leer: P-5.4.1+5.4.6

Choques entre sólidos rígidos (con rotación)

En los problemas de choques con cuerpos rígidos que no se mueven sólo de translación hay que tener en cuenta el efecto de la rotación. Para resolver un problema de choque con rotación se aplican uno o más principios de conservación, según el caso:

- momento lineal total : se conserva si ninguno de los cuerpo está sujeto a enlaces (es decir, si no hay fuerzas de reacción impulsivas)
- momento angular total respecto de un punto P: se conserva si no hay ligaduras (con P cualquiera), pero también si uno o ambos cuerpos tienen un enlace puntual en el punto P (articulación, apoyo simple, etc.)
- energía mecánica total: solamente se conserva si el choque es elástico.

Fórmulas importantes con le momento angular:

Para un sólido que se mueva de traslación pura (sin girar) con velocidad $\vec{v}(t)$:

$$\vec{L}_{(Q)}(t) = m\vec{R}^{CM}_{(Q)}(t)\times\vec{v}(t)$$

Para un sólido que gira alrededor de un punto C fijo vale:

$$\vec{L}_{(C)} = I_{(C)}\vec{\omega} \quad \text{con} \quad I_{(C)} = I_{(CM)} + m\,d^2$$

P-5.3.6, P-5.4.17

Q-5.3.6

Ejemplo: en un saque de tenis, la pelota de 100 g sale disparada a 100 km/h. La raqueta es como una barra de 75 cm de longitud y 400 g de masa, que gira alrededor de la muneca del jugador, que se puede considerar fija. Si la colision entre la raqueta y la pelota es elastica, ?cuanto vale la velocidad angular de la raqueta justo antes y justo después del saque?

Ejemplo de problema de rototraslación sin rodadura: **P-5.3.10**

Resumen cinemática y dinámica sólido rígido de masa *m*

- Cinemática, ecuaciones generales:

1) velocidad de un punto *i* respecto de otro *C* cualquiera: $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{\omega}\times\vec{r}_{i(C)} \quad \left(\Rightarrow \vec{v}_i - \vec{v}_j = \vec{\omega}\times(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\right)$

2) posición del *CIR* respecto de un punto *Q* cualquiera: $\vec{r}_{CIR(Q)} = \left(\vec{\omega}\times\vec{v}_Q\right)/\omega^2$

3) aceleración *CM* : $\vec{a}_{CM} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \hat{t}\dfrac{dv}{dt} + \hat{n}\dfrac{v^2}{R_{curv}}$

- Dinámica: ecuaciones generales $\vec{P} = m\vec{v}_{CM}$; $\vec{F}^{ext} = \dot{\vec{P}} = m\vec{A}_{CM}$; $\vec{M}^{ext}_{(Q)} = d\vec{L}_{(Q)}/dt$ con *Q* fijo o CM

→ Casos particulares:

(1) <u>Estática</u> (EQUILIBRIO): $\vec{F}^{ext} = 0$ y $\vec{M}^{ext}_{(Q)} = 0$ con *Q* fijo cualquiera

$$(\vec{v}_{CM} = 0 \ , \ \vec{P} = 0 \ , \ \vec{L}_{(Q)} = 0 \ , \ E_{cin} = 0)$$

(2) <u>Pura translación</u> (con velocidad $\vec{v}(t)$) : $\vec{F}^{ext} = m\vec{A}_{CM}$ y $\vec{M}^{ext}_{(CM)} = 0$ → *sólo respecto del CM!*

$$\vec{v}_{CM}(t) = \vec{v}(t) \ , \ \vec{P}(t) = m\vec{v}(t) \ , \ \begin{cases} \vec{L}_{(CM)}(t) = 0 \\ \vec{L}_{(Q)}(t) = m\vec{R}^{CM}_{(Q)}(t)\times\vec{v}(t) \end{cases} , \ E_{cin}(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2$$

(3) <u>Pura rotación alrededor de un punto fijo</u> *C*: $\vec{M}_{(C)} = \vec{\alpha} I_{(C)}$ con $I_{(C)} = I_{(CM)} + m\,d^2$

$$\vec{v}_C = 0 \Rightarrow |\vec{v}_i| = \omega\, d_{i\leftrightarrow C} \ , \ L_{(C)} = I_{(C)}\omega \ , \ E_{cin}(t) = \frac{1}{2} I_{(C)}\omega(t)^2$$

P-5.3.9, P-5.3.11, P-5.4.20, P-3.10.8, Q-5.3.6

4) <u>Rotación + translación</u>: $\vec{F}^{ext} = m\vec{A}_{CM}$ y $M_{(CM)} = I_{(CM)}\alpha$

$$\vec{P}(t) = m\vec{v}_{CM}(t) \ , \ E_{cin}(t) = \frac{1}{2}mv_{CM}(t)^2 + \frac{1}{2}I_{(CM)}\omega(t)^2 \ , \ L_{(CM)} = I_{(CM)}\omega$$

caso particular → <u>rodadura</u>: $v_{CM} = R\omega$, $a_{CM} = R\alpha$

Rodadura sobre un plano fijo: CIR = punto de contacto con el plano , $E_{cin} = \dfrac{1}{2} I_{(CIR)}\omega^2$

- Analogía “formal” entre cinemática/dinámica de translación y de rotación:

$$r \leftrightarrow \theta \quad ; \quad v \leftrightarrow \omega \quad ; \quad a \leftrightarrow \alpha \quad ; \quad m \leftrightarrow I_{(Q)} \quad ; \quad F \leftrightarrow M_{(Q)} \quad ; \quad P \leftrightarrow L_{(Q)}$$

$$\Rightarrow \quad F = ma \leftrightarrow M_{(Q)} = I_{(Q)}\alpha \quad ; \quad ½mv^2 \leftrightarrow ½I_{(Q)}\omega^2$$

Resumen ecuaciones con la energía para un sólido rígido o un conjunto de sólidos rígidos

(A) Estática: $dU = 0$

(B) Dinámica conservativa: $dE/dt = 0$ o $E_i = E_f$

(C) Con fuerzas no conservativas: $\Delta E = W_{NOcons}$

- Si toda reacción es ideal, *E* es la energía de cada cuerpo por separado;
-Si actúa un conjunto de reacciones ideales, *E* es la energía total (suma de todas)

- Fuerzas CONSERVATIVAS:
peso, muelle, toda fuerza constante (en módulo y dirección), toda fuerza en 1D

- Reacciones ideales o conjunto de reacciones ideales:
fuerzas normales, fricción estática, fricción de rodadura, tensiones de cuerdas

- Fuerzas no conservativas:
fuerzas de fricción dinámica: seca y viscosa

Fórmulas comunes a partículas y sólidos rígidos

Centro de masas: $\vec{R}_{CM} = \dfrac{1}{m}\sum_i m_i \vec{r}_{CM}^{\,(i)}$

Cinemática:

-Punto material o centro de masas

$$\vec{a}(t) = \hat{v}\frac{dv}{dt} + v\left|\frac{d\hat{v}}{dt}\right|\hat{n} = \vec{a}_T + \vec{a}_N \qquad \vec{a}_N = \hat{n}\frac{v^2}{R_{CURV}} \qquad R_{CURV} = v\Big/\left|\frac{d\hat{v}}{dt}\right|$$

-Punto cualquiera de un sólido rígido

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{\omega}\times\vec{r}_{i(C)}$$

Dinámica:

$$\begin{cases} \vec{F}^{\,ext} = d\vec{P}\big/dt = m\vec{A}_{CM} & (\vec{F}^{\,ext} \approx 0 \;\Rightarrow\; \vec{P} = ct\,) \\ \vec{M}^{\,ext}_{(Q)} = d\vec{L}_{(Q)}\big/dt & \text{, con } Q \text{ fijo o } Q = \text{CM} \end{cases}$$

casos particulares:

Dinámica del sólido rígido sin rotación

$$\begin{cases} \vec{F}^{\,ext} = m\vec{A}_{CM} \\ \vec{M}^{\,ext}_{(CM)} = 0 \quad (Q = \text{CM !}) \end{cases}$$

Estática del sólido rígido

$$\begin{cases} \vec{F}^{\,ext} = 0 \\ \vec{M}^{\,ext}_{(Q)} = 0 \quad , \; Q \text{ cualquiera} \end{cases}$$

Energía: $W_{F\,NO\,\mathrm{cons}} = \Delta E$ Sistema conservativo: $E = \mathrm{const}$ o también $dE\big/dt = 0$

$$E = E_c + U = \sum_i E_{c,i} + \sum_i U_i^{ext} + \sum_{parejas} U_{ij}^{int} \longrightarrow$$

para un solido rígido, U^{int} siempre es constante → $\Delta U^{\mathrm{int}} = 0$

$$W = \int \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = -\Delta U \;\; ; \;\; U_g = mgh \; ; \; U_H = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \;\; ; \;\; U_{GU} = -G\frac{m_1 m_2}{r} \;\; ; \;\; W_{RDS} = -\mu_D N\ell$$

(si F es conservativa) (si N = const)