Cronología tecnológica

Protagonistas | Asignaturas

1650 — Instrumentos mecánicos, hidráulicos, a gas ...

Arquímedes, Kepler, Galileo, Hooke, Newton, Euler, Huygens, d'Alembert — Mecánica

primeros sistemas de vapor

1750

Carnot, Joule, Kelvin, Clausius, Boltzmann, Helmholtz, Gibbs — Termodinámica

1780-1830: **1ª revolución industrial** (máquinas de vapor)

Lavoisier, Gay-Lussac, Avogadro, Dalton, Arrhenius, Mendeleev, Kekulé, Lewis — Química

1850

1870-1900: **2ª revolución industrial** (electricidad + química industrial (petróleo, fármacos...))

Franklin, Volta, Ohm, Kirchoff, Ampère, Faraday, Maxwell, Hertz — Electromagnetismo

Materiales

1950

Óptica aplicada

1960-1990: **3ª revolución industrial** (electrónica (silicio), informática, optoelectrónica)

Hoy y mañana: genética, nanotecnología, energías limpias

Tiempo (año d.C.)

Aplicaciones de la mecánica: máquinas simples (amplifican la fuerza humana): plano inclinado, martillo, polea, polipasto, palanca (normal e hidráulica), torno y además: ruedas, suspensiones, amortiguadores, relojes de péndulo…

Mecànica Fonamental

http://atenea.upc.edu

roberto.macovez@upc.edu (despacho 11.45, planta 11)

http://gcm.upc.edu/members/roberto-macovez

Mecánica: estudio del MOVIMIENTO y de sus CAUSAS

MOVIMIENTO:
TRANSLACIÓN
+
ROTACIÓN
+
DEFORMACIÓN

- Sistemas rígidos (cuerpos sólidos)
  - Cinemática
  - Estática y Dinámica
- Sistemas blandos o elásticos (líquidos, gases, muelles)
  - Fluidoestática
  - Oscilaciones y Ondas

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$NOTA = \underbrace{0.6EXfinal + 0.1MQ + 0.1EvC1 + 0.1EvC2}_{\text{4 pruebas escritas}} + \underbrace{0.1LAB}_{\text{3 sesiones}}$$

1ª sesión de LAB: mitad de septiembre! LAB: planta 6

Entregar por parejas el problema 1.5.1 (escrito a mano)

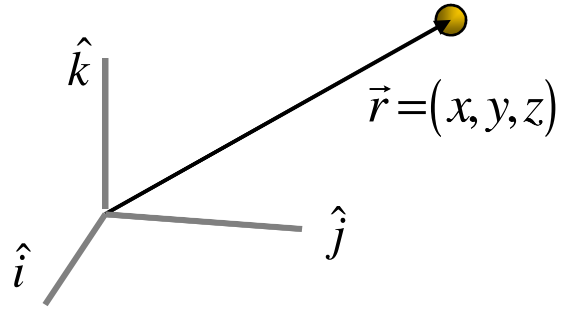
Leer párrafos 1.3 y 1.5 de las notas de clase

MOVIMIENTO de un cuerpo = TRASLACIÓN + ROTACIÓN + DEFORMACIÓN

§1.7

partícula (o “punto material”) $\begin{cases} \text{punto geométrico (de un objeto)} \\ \text{objeto de dimensiones despreciables que no gira sobre si mismo} \end{cases}$

vector posición : $\vec{r} = (x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$



vector = módulo + dirección: $\vec{r} = r\,\hat{r}$

módulo: $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

dirección: $\hat{r} = \dfrac{\vec{r}}{r} = \dfrac{x}{r}\hat{i} + \dfrac{y}{r}\hat{j} + \dfrac{z}{r}\hat{k}$

Notación:

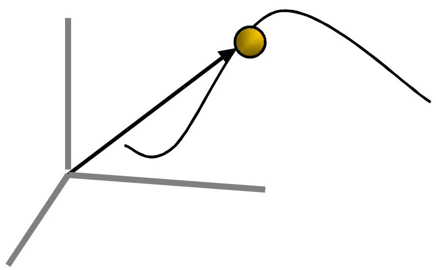
$r \rightarrow$ escalar

$\vec{r} \rightarrow$ vector

$\hat{r} \rightarrow$ vector de módulo 1 (dirección)

Movimiento de traslación = variación de la posición en el tiempo

Trayectoria temporal : curva $\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$



x, y, z : grados de libertad
(tres en 3D, dos en 2D, uno en 1D)

§1.7 Trayectoria temporal : $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$

vector velocidad (instantánea) $\vec{v}(t)$
= derivada temporal de la posición:

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}\right) = \hat{i}\frac{dx}{dt} + \hat{j}\frac{dy}{dt} + \hat{k}\frac{dz}{dt} = \left(\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x}, \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y}, \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{v_z}\right)$$

vector aceleración

$$\boxed{\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right)}$$

Estas definiciones se pueden invertir para sacar p. ej. la posición de la velocidad:

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt + \vec{C} = \left(\int v_x(t)dt + C_x, \int v_y(t)dt + C_y, \int v_z(t)dt + C_z\right)$$

P-1.7.3 + lo mismo con $\vec{a}(t) = (0,0,-g)$ y $\vec{v}(t=0) = (2,0,1)$

P-1.3.1 (sin punto (d)), P-1.7.2

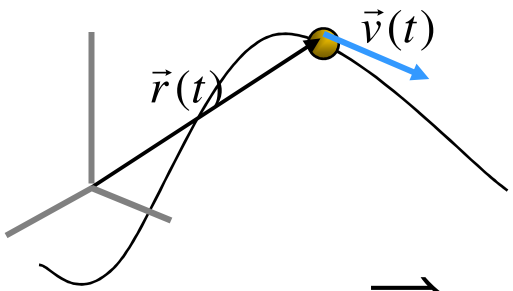
Casos simples:

- **Movimiento rectilíneo** (a lo largo de una línea recta): una única variable $\boxed{x(t)}$ con su signo
 (la posición "x" es en tal caso un vector en 1D)

- **Movimiento circular** (en un plano) : es útil expresar el movimiento en función del ángulo $\boxed{\theta(t)}$:

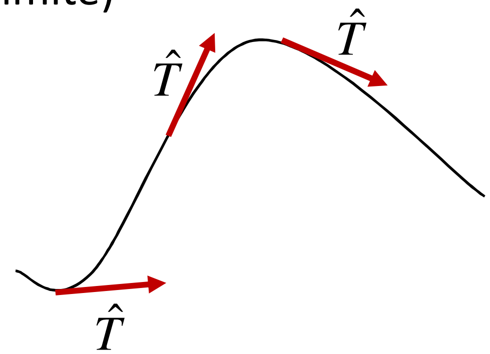
$$\begin{cases} x(t) = R_0 \cos\theta(t) \\ y(t) = R_0 \sin\theta(t) \end{cases}$$

Calcular la velocidad vectorial para un movimiento circular y determinar su módulo (nota: la cantidad $d\theta/dt = \omega$ se llama "velocidad angular")



<u>El vector velocidad es tangente a la trayectoria en cada punto</u>
(se ve gráficamente tomando el límite)

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}(t) = v(t)\hat{v}(t) = v\hat{T} \\ \hat{T} = \hat{v} = \text{vector tangente unitario} \end{cases}$$



Aceleración: $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d(\hat{v}\, v)}{dt} = \hat{v}\dfrac{dv}{dt} + v\dfrac{d\hat{v}}{dt}$

Para un vector de módulo contante como $\hat{v}$, $\hat{v}\cdot\hat{v} = |\hat{v}|^2 = 1 \Rightarrow \dfrac{d(\hat{v}\cdot\hat{v})}{dt} = 2\hat{v}\cdot\dfrac{d\hat{v}}{dt} = 0 \implies \dfrac{d\hat{v}}{dt} \perp \hat{v}$

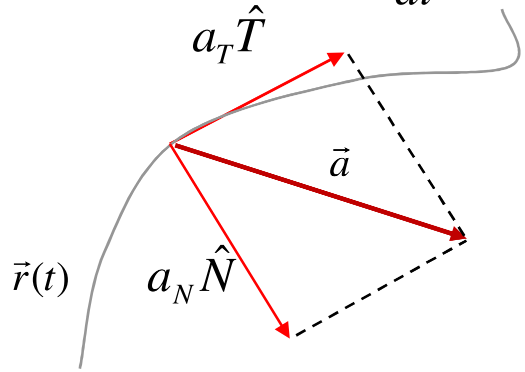
$\Rightarrow \vec{a}$ <u>tiene una componente tangente a la trayectoria y otra normal:</u> $\vec{a}(t) = \left(\dfrac{dv}{dt}\right)\hat{T} + v\dfrac{d\hat{v}}{dt}$

Llamando $\hat{N} = \dfrac{d\hat{v}/dt}{|d\hat{v}/dt|}$ el vector de módulo 1 ortogonal a $\hat{v}$ (dirección de $\dfrac{d\hat{v}}{dt}$):

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{T} + v\left|\frac{d\hat{v}}{dt}\right|\hat{N} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

variación del módulo de $\vec{v}$

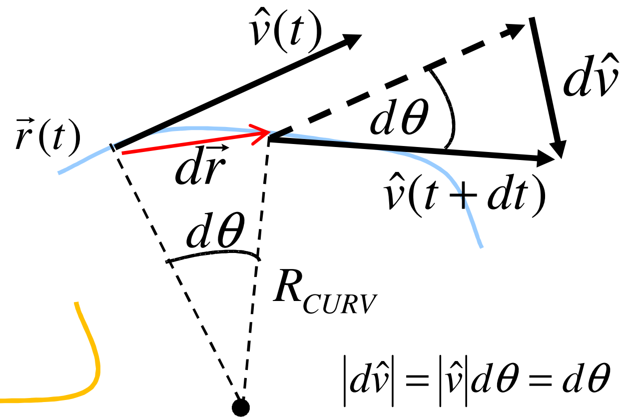
variación de dirección de $\vec{v}$



Pregunta: si una partícula se mueve a lo largo de una recta, ¿cuánto es su $\vec{a}_N$?

Aceleración normal y radio de curvatura:

Para un desplazamiento $d\vec{r}$ muy pequeño la curva se confunde con el segmento rectilíneo y con el arco de círculo tangente:
$|d\vec{r}| = d\ell = R_{CURV}\, d\theta$, donde R_{CURV} es el "radio de curvatura"



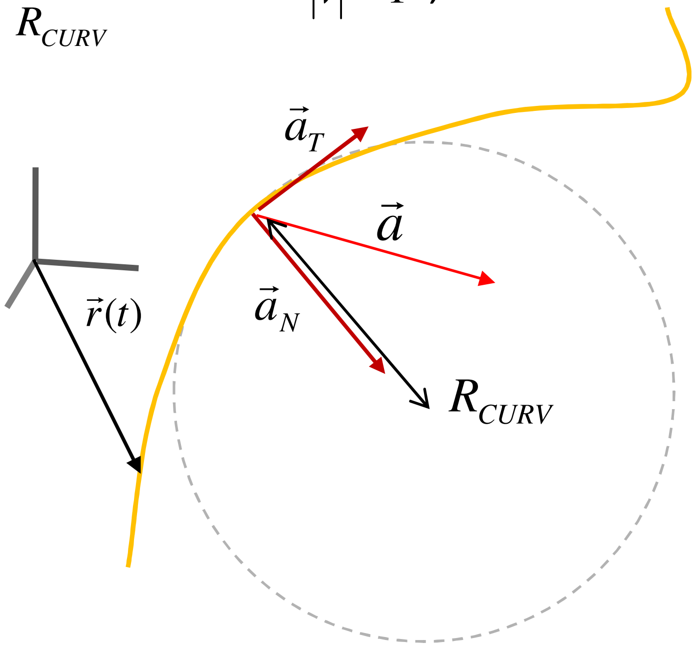
$|d\hat{v}| = |\hat{v}|\, d\theta = d\theta$

Se ve gráficamente que $\dfrac{|d\hat{v}|}{|\hat{v}|} = d\theta = \dfrac{|d\vec{r}|}{R_{CURV}}$. Siendo $|\hat{v}| = 1$,

$$\Rightarrow \left|\frac{d\hat{v}}{dt}\right| = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R_{CURV}}\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{v}{R_{CURV}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{a}_N = \hat{N}\frac{v^2}{R_{CURV}}}$$

con $R_{CURV} = v \Big/ \left|\dfrac{d\hat{v}}{dt}\right|$



Resumen fórmulas: (todas se calculan a partir de $\vec{v}(t)$)

$$\begin{cases} \hat{T}(t) = \hat{v}(t) = \dfrac{\vec{v}}{v} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \\ \hat{N}(t) = \dfrac{d\hat{v}}{dt} \Big/ \left|\dfrac{d\hat{v}}{dt}\right| \end{cases}$$

$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$

$\vec{a}_T = \hat{v}\dfrac{dv}{dt}$ $\quad \vec{a}_N = \hat{n}v\left|\dfrac{d\hat{v}}{dt}\right| = \hat{n}\dfrac{v^2}{R_{CURV}}$ $\quad R_{CURV} = v \Big/ \left|\dfrac{d\hat{v}}{dt}\right|$

Casos importantes: - movimiento rectilíneo (uniforme, uniformemente acelerado o periódico)

- **movimiento circular** $\leftrightarrow$ $R_{CURV} = R$, $v(t) = R_0\omega = R_0\dot{\theta}$

P-1.7.4 , (P-1.7.5)

§2.1 Dinámica de traslación: Leyes de Newton, fuerza y masa

1ª Ley de Newton: un cuerpo sobre que no actúa ninguna "causa" (fuerza), se mueve con velocidad constante (movimiento rectilíneo uniforme) (ESTÁTICA ↔ $\vec{F} = 0$).

2ª Ley de Newton: una fuerza que actúa sobre una partícula causa una aceleración proporcional a la fuerza; la constante de proporcionalidad es la masa de la partícula

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

causa efecto

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Define la fuerza: fuerza = causa de la aceleración; puede depender de posición y velocidad (y del tiempo), pero **no** de la aceleración.

Define la masa: fuerzas diferentes $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \ldots$ causan aceleraciones $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \ldots$ tales que el cociente es constante: $m = F_1/a_1 = F_2/a_2 = \ldots$

Generalización del concepto de "esfuerzo" (muscular, de un material); es **direccional**

masa = cantidad de materia ↔ <u>peso</u>

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

La unidad de fuerza en el SI es el newton (N):

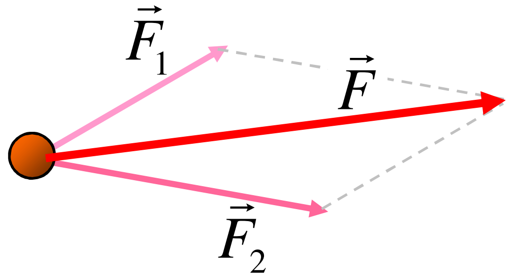
$$1\mathrm{N} = 1\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Ej.: la fuerza peso que actúa sobre la masa *m* vale, como vector $\vec{F}_g = m\vec{g}$.
¿Qué aceleración causa esta fuerza?

3ª Ley de Newton (principio de acción y reacción): si un cuerpo actúa sobre otro con una fuerza $\vec{F}$, entonces éste último genera una fuerza igual y opuesta $-\vec{F}$ sobre el primero

DINÁMICA (2ª Ley)

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = m\vec{a}}$$



ESTÁTICA (1ª Ley)

$$\vec{F} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \vec{v} = const$$

Pregunta: ¿ por qué os cansáis más cuando mantenéis levantado algo que pesa mucho?

- al igual que $\vec{a}$, $\vec{v}$, etc., las fuerzas también son vectores y se suman como tales
- la 2ª Ley implica la 1ª
- la 3ª sólo se usa si hay más de un cuerpo/partícula
- <u>ambas son válidas sólo en sistemas de referencia inerciales</u>
  (= fijos o en movimiento rectilíneo uniforme)
- aceleración del <u>centro de masas</u> de un cuerpo extenso ↔ 2ª Ley

P-2.1.2 , P-2.1.3, P-2.1.4, P-2.5.5

§2.2 Momento lineal e impulso

DEF: $\vec{p} = m\vec{v}$ momento lineal o cantidad de movimiento. 2ª Ley → $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$

DEF: **impulso** $\vec{I}$ **suministrado por una fuerza** $\vec{F}$ **en el intervalo** $t_1 \mapsto t_2$ **:** $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$

2ª Ley de Newton ⇒ **Teorema del momento lineal:** $\vec{I} = \Delta\vec{p}$

P-2.2.1

P-2.2.2, P-2.2.3

§2.5 Aplicación directa de la 2ª Ley de Newton

La 2ª ley de Newton nos dice como se mueve la partícula: es una ecuación diferencial que en algunos casos puede ser integrada (dos veces) para encontrar la trayectoria temporal $\vec{r}(t)$.

Ej.: fuerza que sólo depende del tiempo $\vec{F} = \vec{F}(t)$

→ Integración directa → $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_t(t) \Rightarrow \vec{r}(t) = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int\left(\int \vec{F}_t(t)\,dt\right)dt$

En cada integración se introduce una constante (vectorial): $\vec{C}_1$ y $\vec{C}_2$. Estas dos constantes se pueden determinar si conocemos posición y velocidad en un instante t_0 cualquiera:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) \quad \vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$$

Ej. : fuerza constante.

2ª Ley : $m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m} = \text{ct}$. Integrando 2 veces: $\vec{r}(t) = \vec{C}_1 + \vec{C}_2\, t + \dfrac{1}{2}\dfrac{\vec{F}}{m}t^2$

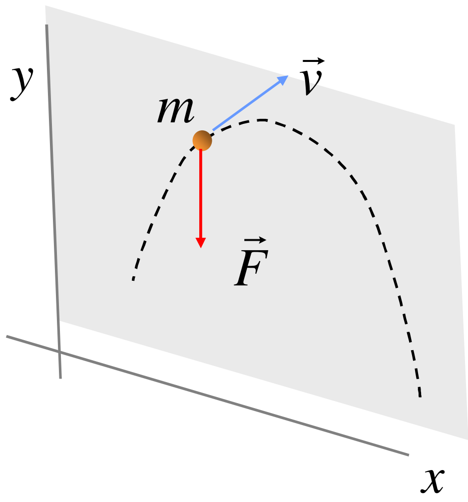
Con las condiciones iniciales $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$, $\dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$:

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}(t_0) &= \vec{r}_0 = \vec{C}_1 + \vec{C}_2\, t_0 + \frac{1}{2}\frac{\vec{F}}{m}t_0^{\,2} \\ \dot{\vec{r}}(t_0) &= \vec{v}_0 = \vec{C}_2 + \frac{\vec{F}}{m}t_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \vec{C}_2 &= \vec{v}_0 - \frac{\vec{F}}{m}t_0 \\ \vec{C}_1 &= \vec{r}_0 - \vec{v}_0 t_0 + \frac{1}{2}\frac{\vec{F}}{m}t_0^{\,2} \end{aligned}\right.$$

La ecuación de la trayectoria es entonces: $\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\,(t - t_0) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\vec{F}}{m}(t - t_0)^2}$

Casos particulares de fuerzas constantes: **peso** y **fricción dinámica**

Fuerza peso: $m\vec{a} = \vec{F} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m} = \vec{g} = \mathrm{ct}$

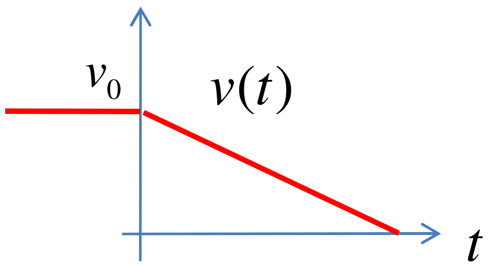


Tomando el eje y paralelo a la fuerza y con velocidad inicial en el plano (x, y), la trayectoria es una parábola en tal plano:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\,(t - t_0) + \frac{1}{2}\frac{\vec{F}}{m}(t - t_0)^2$$

Rozamiento dinámico: $\left|\vec{F}_{RD}\right| = \mu_D N \;,\quad \vec{F}_{RD} = -\mu_D N \hat{v}$

Si N = const, $\left|\vec{F}_{RD}\right|$ = const. Si además $\hat{v}$ = const, $\vec{F}_{RD}$ = const



La ley horaria (deceleración uniforme) vale sólo hasta que la partícula se para, es decir hasta que v = 0, porque entonces la fricción desaparece

Clasificación de las fuerzas: fuerzas activas (peso) **vs reacciones** (normal, fricción)

1) **PROBLEMA de Pepe Reina**: Calcular a que ángulo respecto del suelo hay que lanzar un objeto para que llegue lo más lejos posible, y calcular la velocidad del objeto justo antes que toque el suelo;

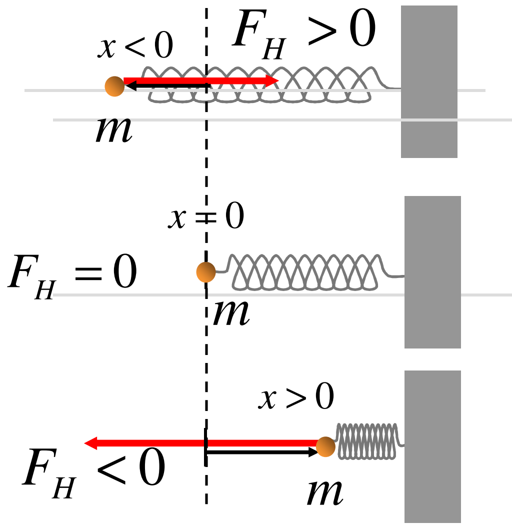
2) Hallar la dinámica de una masa sujeta a fricción dinámica ($\mu_D = 0.1$) que sale del origen con $v_0 = 3\,\mathrm{ms}^{-1}$

Fuerza de un muelle y movimiento armónico

Fuerza de un muelle (o de Hooke): $F_H = -k(l - l_N)$

Definiendo un nuevo sistema de referencia en que $x = l - l_N$:

$$F_H = -kx$$



2ª Ley de Newton:

$F = m\ddot{l} = m\ddot{x} = -kx$, o sea: $\boxed{\ddot{x} = -\frac{k}{m}x}$

solución: $\boxed{x(t) = A\sin(\omega(t - t_0) + \varphi_0)}$, con:

$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi/\omega}$, $\boxed{\sin\varphi_0 = \frac{x(t_0)}{A}}$, $\boxed{A = \sqrt{x(t_0)^2 + \frac{v(t_0)^2}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{2E}{k}}}$

P-2.5.3

Práctica 1 laboratorio

Problemas con movimiento circular. (1) Se lanza una pelotita sobre una pista delimitada por una pared circular. La pelota da algunas vueltas hasta pararse debido a la fricción. Si la velocidad angular de la pelota varía según la ley horaria: $\omega(t) = \omega_0 - \alpha\, t \;,\; 0 \le t \le \frac{\omega_0}{\alpha}$

¿cuánto valen la normal de la pared y la fricción en cada instante t en el intervalo $0 \le t \le \frac{\omega_0}{\alpha}$?

(2) Problema del péndulo o de spiderman:

En que punto de la trayectoria la tensión del hilo es máxima ?

Choques contra un obstáculo (pared/suelo) fijo

Choque (colisión) = contacto de durada limitada (típicamente Δt = 0.01 ÷ 0.001 sec)

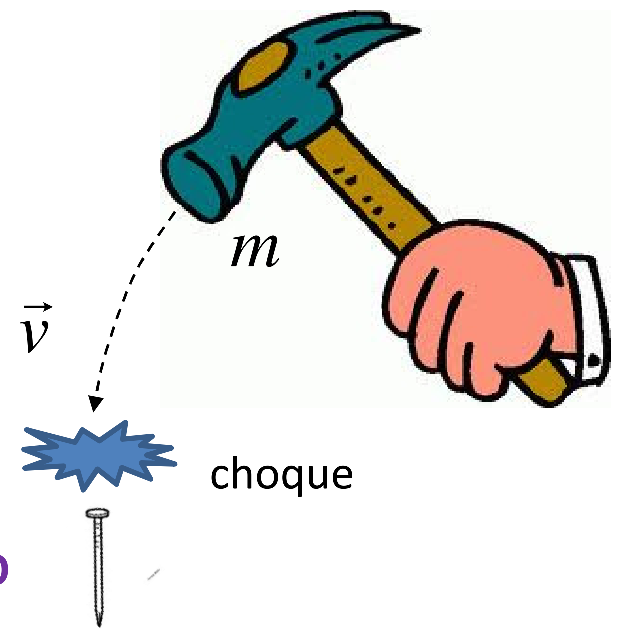
Q-2.2.1 En un tie-break Nadal lanza un saque directo, y la pelota (m = 80 g) rebota horizontalmente contra la pared vertical al fondo. ¿Cuánto es la fuerza normal sobre la pelota? Consideremos los instantes justo antes (A) y justo después (D) de la colisión. Si el modulo de la velocidad antes y después del choque es de 30 m/s (108 km/h), la aceleración media de la pelota durante el choque es (con Δt = 0.003 sec):

$$\vec{a}_{media} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_D - \vec{v}_A}{\Delta t} = \frac{60}{3 \cdot 10^{-3}} \hat{i} = 20000 \hat{i} \text{ m/s}^2 \text{ !!}$$

→ Fuerza media en el impacto :

$$\vec{F}_{media} = m\vec{a}_{media} \left(= \frac{\vec{I}}{\Delta t} \right) = 1600 \hat{i} \text{ N} \text{ !!}$$

(el impulso generado por la normal de la pared durante el choque es $\vec{I} = \Delta \vec{p} = m(\vec{v}_D - \vec{v}_A)$, en módulo 4.8 N s)



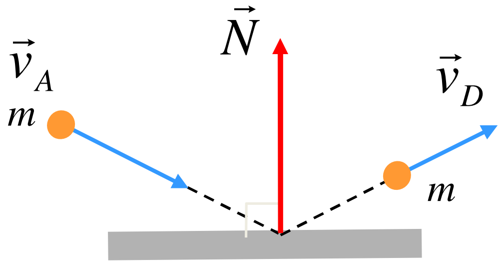
→**PRINCIPIO del MARTILLO**
(fuerza impulsiva)

Una fuerza de 1600 N es enorme para una pelota de 80 g. En comparación, el peso (< 1 N) es despreciable → **Durante un choque, podemos menospreciar las fuerzas exteriores**

Choque de una partícula contra un plano (suelo/pared) sin rozamiento

No hay fricción → durante el choque no hay ninguna fuerza apreciable paralela al plano

→ sólo actúa la fuerza normal del plano



$$\vec{F} = \vec{N} = m\vec{a}$$

La fuerza total es vertical

$\Rightarrow$ la aceleración es vertical

$\Rightarrow$ sólo hay variación de la velocidad vertical

$\Rightarrow$ **la componente de la velocidad paralela al plano se conserva:**

Colisión entre un cuerpo y una pared fija : $v_D^{//} = v_A^{//}$

Queda por determinar la componente de la velocidad final ortogonal al plano $v_{(D)}^{\perp}$ (en la dirección de la normal).

Se hace a partir del **coeficiente de restitución** e : DEF: $e = \left| \frac{v_{(D)}^{\perp}}{v_{(A)}^{\perp}} \right|$

3 Una pilota impacta amb un angle de 30^0 respecte d'un terra amb un coeficient de restitució de $0,8$
L'angle de sortida serà:

A	25^0	**B**	30^0	**C**	60^0	**D**	15^0	**E**	20^0

El choque es "elástico" (= se conserva la energía cinética de la partícula) $\Leftrightarrow$ $e = 1$

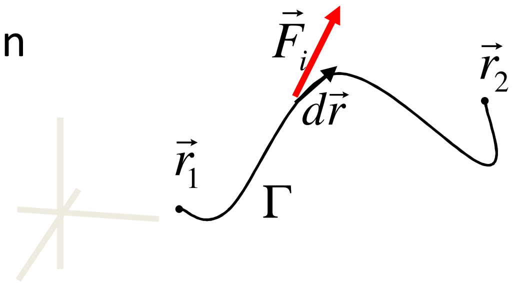
Nota: el valor de *e* para un choque se puede determinar haciendo un experimento; se encuentra que sólo depende de los materiales y de la geometría del cuerpo y de la pared.

Otra estrategia para determinar el movimiento: la <u>energía</u>

§2.4 Trabajo

El **trabajo** W_i de una fuerza $\vec{F}_i$ a lo largo de una curva Γ de un punto $\vec{r}_1$ a otro $\vec{r}_2$, es la integral:

$$\boxed{W_i = \int_{\Gamma:\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}}$$



Puede calcularse de 2 maneras:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$1) \qquad W = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz$$

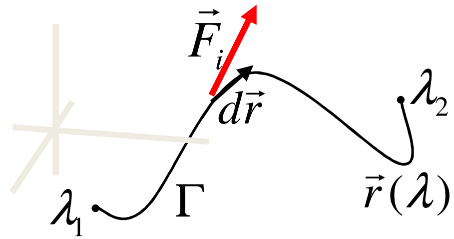
$$2) \; W = \int \left(F_x \frac{dx}{d\lambda} + F_y \frac{dy}{d\lambda} + F_z \frac{dz}{d\lambda} \right) d\lambda$$

Método 1) : sólo funciona si $F_x = F_x(x)$, $F_y = F_y(y)$ y $F_z = F_z(z)$ (siempre funciona en 1D)

P-2.4.3 (a,b)

Método 2) : la trayectoria es una curva 1D y se puede describir a través de un único parámetro real λ (p. ej., un ángulo, o el tiempo *t*). La relación $\vec{r}(\lambda)$ se llama ecuación paramétrica de la trayectoria Γ. Si $\vec{r}(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))$, $P_1 = \vec{r}(\lambda_1)$, $P_2 = \vec{r}(\lambda_2)$, con un cambio de variable la integral que define el trabajo puede escribirse como integral en λ :

$$W_i = \int_{\Gamma:\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \vec{F}_i \cdot \frac{d\vec{r}}{d\lambda} d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(F_x \frac{dx}{d\lambda} + F_y \frac{dy}{d\lambda} + F_z \frac{dz}{d\lambda} \right) d\lambda$$



P-2.4.1 (a,b)

P-2.4.8 (a,b)

§2.4 Potencia y energía cinética

Potencia

Si la curva Γ es la trayectoria de una partícula, $d\vec{r} = \vec{v}dt$, y el trabajo W_i puede escribirse como:

$W_i = \int_{t_1}^{t_2} \wp_i \, dt$, siendo $\wp_i = \vec{F}_i \cdot \vec{v}$ la **potencia** (instantánea) desarrollada por $\vec{F}_i$ **P-2.4.2**

Energía cinética

¿ Para qué sirve el trabajo?

$$\vec{F} = \vec{F}_{TOT} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad W_{TOT} = \int \vec{F}_{TOT} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \ldots = W_1 + W_2 + \ldots$$

Por otro lado $\vec{F}_{TOT} \cdot d\vec{r} = m\vec{a} \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$. Integrando:

$$W = \Delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \Delta(E.C.)$$

La cantidad $E.C. = E_c = \frac{1}{2}mv^2$ se llama **energía cinética**. Así pues: $W_1 + W_2 + \ldots = W_{tot} = \Delta(E.C.)$

P-2.1.1 $W = \Delta E_c$ Teorema de las fuerzas vivas

unidad SI del trabajo y de la energía = julio (J) : $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N\,m}$

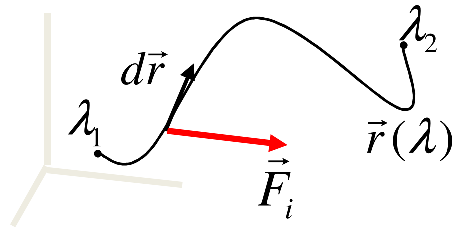
unidad SI de potencia = watio (W): $1\mathrm{W} = 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$

§2.4 Fuerzas conservativas y energía potencial

Una fuerza $\vec{F}(\vec{r})$ es **conservativa** si $\exists\ U(\vec{r})$ tal que: $\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}, \dfrac{\partial U}{\partial y}, \dfrac{\partial U}{\partial z}\right)$

La función U se llama **energía potencial** U de la fuerza. Trabajo de una fuerza conservativa:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = -\int \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = -\int dU$$



$\Rightarrow$ Para $\vec{F}$ conservativa: $W_{1\to 2} = -\int_1^2 dU = -[U(2) - U(1)] = -\Delta U$

Trabajo de una fuerza conservativa = variación de su energía potencial $\boxed{W = -\Delta U}$

La función U se calcula al igual que el trabajo. En 1D cualquier fuerza es conservativa, ya que siempre se puede definir : $U(x) = -\int F(x) dx$

P-2.4.5

§2.4 Teorema fundamental del trabajo y la energía

$$\vec{F} = \vec{F}_{TOT} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad W_{TOT} = \int \vec{F}_{TOT} \cdot d\vec{r} = \Delta(E.C.) = \int \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \int \vec{F}_3 \cdot d\vec{r}$$

conservativas ($\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$) — no conservativa (disipativa) ($\vec{F}_3$)

$$-\Delta U_1 \qquad -\Delta U_2 \qquad W_3 = W_{NO\ cons}$$

$$\Rightarrow \Delta(E.C.) = -\Delta U_1 - \Delta U_2 + W_{NO\ cons}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta(E_c + U_1 + U_2) = \Delta E = W_{NO\ cons}}$$

con: $E = E_c + U_1 + U_2 = \dfrac{1}{2} m v^2 + U$

E = **energía mecánica**

Equivalentemente: $\boxed{E_f = E_i + W_{NO\ cons}}$ **ecuación fundamental de la energía**

Fuerzas conservativas en problemas en 1 , 2 o 3 dimensiones

$\vec{F}(\vec{r})$ es conservativa $\Leftrightarrow \oint_{\text{curva cerrada}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$ es independiente de la trayectoria

- **En 1D** : toda fuerza <u>que sólo depende de *x*</u> es conservativa ya que: $U(x) = -\int F(x)dx$

P-2.4.7, Q-2.4.4 + discutir fuerza y puntos de equilibrio estable e inestable

- **En 2D** : $dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = -F_x dx - F_y dy \Leftrightarrow F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \quad F_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y}$

Se demuestra que una función diferenciable de dos variables tiene la propiedad que:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{fuerza en 2D es conservativa} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

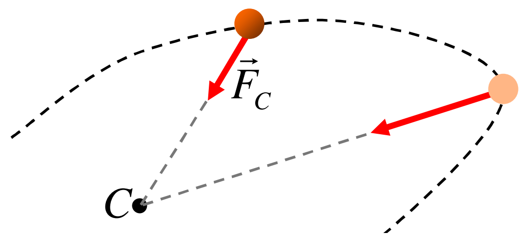
P-2.4.3

P-2.4.4

- **En 3D** :

Caso 1) Si $\vec{F}$ es central (radial) y sólo depende de $|\vec{r}| = r$ (no de otras combinaciones de *x*, *y*, y *z*), o sea si $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{r}$ entonces es conservativa y

$$U(r) = \left(-\int F(r)\hat{r}\cdot d\vec{r}\right) = -\int F(r)dr$$



fuerza central: fuerza dirigida siempre hacia el mismo punto

Caso 2) $\vec{F}$ constante <u>en módulo y dirección</u> es conservativa y:

$$U = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\vec{F}\cdot\int d\vec{r} = -\vec{F}\cdot\vec{r}$$

Casos importantes de energía potencial y trabajo no conservativo (§2.5 y §3.7)

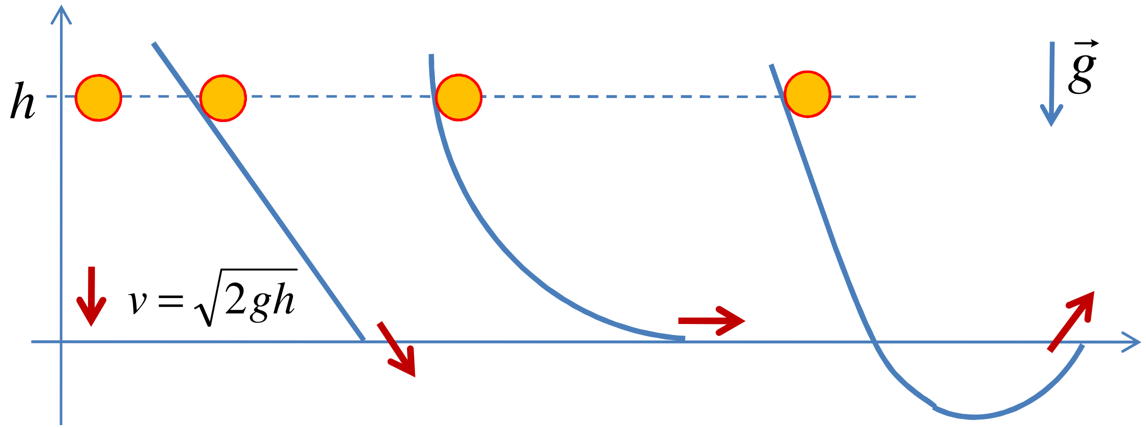
1) La fuerza normal no hace trabajo: $\vec{N} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{N} \cdot d\vec{r} = \vec{N} \cdot \vec{v}dt = 0$
(tampoco lo hace la tensión de una cuerda con un cabo fijo)

2) Toda fuerza <u>constante en modulo y dirección</u> es conservativa:

$$U = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\vec{F} \cdot \vec{r}$$

Ej. $\vec{F}_g = m\vec{g}$

$$\rightarrow \; U = m\,g\,y = m\,g\,h$$



3) $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r} \Rightarrow U(r) = -\frac{k}{r}$

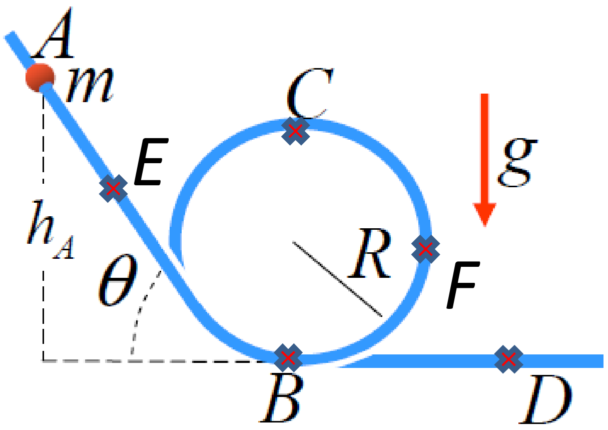
Ej. : Ley de gravitación universal $\vec{F}_{GU} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$ y Ley de Coulomb $\vec{F}_C = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$

4) $F_H = -kx \Rightarrow U(x) = -\int(-kx)dx = \frac{1}{2}kx^2$

5) $\vec{F}_{RDS} = -\mu_D N\hat{v} \Rightarrow W_{1\to 2} = \int_1^2 (-\mu_D N)\hat{v} \cdot d\vec{r} = -\mu_D N \int_1^2 d\ell = -\mu_D N \ell_{1\to 2}$ ← <u>Sólo vale si *N* = const</u>

Problemas a 1 partícula (2ª Ley de Newton y energía)

1) Sistemas conservativos (P-3.10.2)



Un cos de massa m, de petites dimensions, es deixa caure des del punt A, pel carril de la figura. Si el cos llisca sense fricció i $h_A=3R$, on R és el radi de la circumferència, trobeu:

a) La fuerza del carril sobre la masa en los puntos A hasta F

b) La altura del punto inicial A para que tal fuerza sea cero en C

P-3.10.1, P-3.10.9

2) con fricción (seca)

Una partícula de masa 2 kg se lanza con una velocidad inicial de 5 m/s sobre un suelo horizontal rugoso, con $\mu_D = 0.5$. Después de recorrer 1 m, entra en contacto con un muelle horizontal de constante k = 200 N/m atado a una pared. Calcula la compresión máxima del muelle:

a) si en el suelo por debajo del muelle no hay rozamiento (solución: Δx = 39 cm)

b) si lo hay (solución Δx = 34.4 cm)

P-2.5.6, P-2.5.7

3) general (P-2.5.11)

Una partícula de massa 4 kg es mou al llarg de l'eix x segons $x(t) = t + 2{,}0\, t^3$, (x en m i t en s). Calculeu:

a) l'energia cinètica en funció del temps ,

b) l'acceleració de la partícula i la força que actua sobre ella en funció del temps,

c) la potencia subministrada a la partícula en funció del temps,

d) el treball fet per la força de t=0 fins t=2 s .

e) dibuja los gráficos de x(t), v(t), a(t), y F(t) .

¿La fuerza F es conservativa? ¿Por qué?

P-2.4.9

Reacciones ideales y conservación de la energía

En muchas situaciones hay fuerzas ortogonales al movimiento (o sea, a la velocidad); muy a menudo éste es el caso de las llamadas “reacciones”, como la fuerza normal debida a una superficie o la tensión de una cuerda en un movimiento circular. Indicándolas con la letra $\vec{R}$, se ha: $\vec{F} = \vec{F}_{TOT} = m\vec{a} = \vec{R}_1 + \vec{F}_2 + \ldots$. Multiplicamos escalarmente por $d\vec{r}$: $m\vec{a} \cdot d\vec{r} = \vec{R}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \ldots$
Al ser $\vec{R} \perp \vec{v} = d\vec{r}/dt$, la fuerza de reacción es ortogonal a $d\vec{r}$, o sea $\vec{R}_1 \cdot d\vec{r} = 0$.

Esto nos deja con el: **principio de d’Alembert** $\left(\vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n - m\vec{a}\right) \cdot d\vec{r} = 0$

Integrando la ec. de d’Alembert, $\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \ldots + \int \vec{F}_n \cdot d\vec{r}$, se obtiene la:

ecuación fundamental de la energía

$$\Delta E_c = -\Delta U_{F\mathrm{cons}} + W_{F\ NO\,\mathrm{cons}} \Rightarrow \boxed{W_{F\ NO\,\mathrm{cons}} = \Delta(E_c + U)}$$

P-3.7.3 (1ª parte)

Problemas cortos (estilo examen parcial):

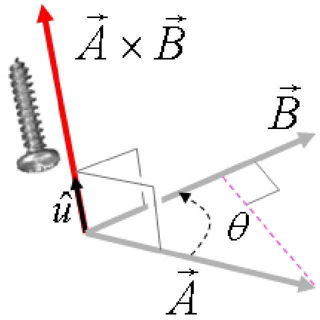
P-2.5.1, Q-2.1.1, P-3.7.4, Q-3.10.1, Q-3.10.3

sin fuerzas disipativas y con reacciones ideales : $\boxed{E_c + U = E = const}$, o también: $\boxed{\dfrac{dE}{dt} = 0}$

En algunos casos (por ejemplo si el sistema tiene un solo grado de libertad), la ecuación $\dfrac{dE}{dt} = 0$ es suficiente para hallar la trayectoria temporal del sistema.

Q-3.10.4, P-3.10.3

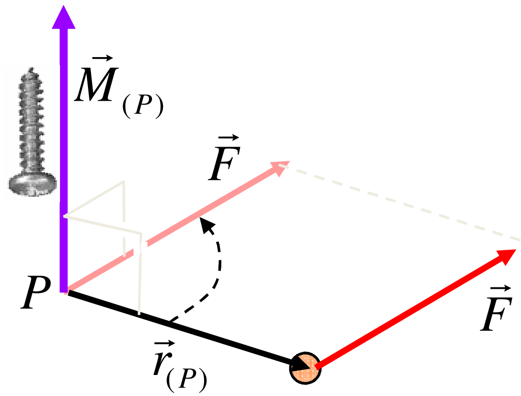
Otra estrategia para determinar el movimiento: <u>momento angular</u>



Producto vectorial: $\vec{A}\times\vec{B}\equiv\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\left(A_yB_z-A_zB_y,\,A_zB_x-A_xB_z,\,A_xB_y-A_yB_x\right)$

$$\vec{A}\times\vec{B}=B\,A\sin\theta\,\hat{u}$$

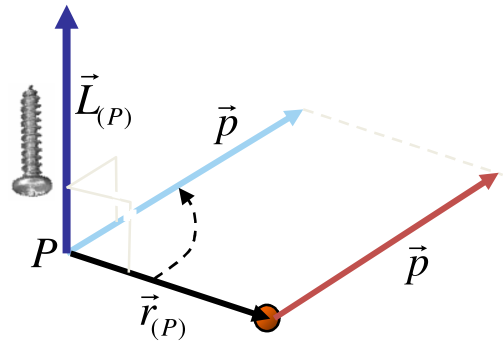
§2.3 Momento de una fuerza y momento angular



DEF.1: **momento** $\vec{M}_{(P)}$ **de una fuerza** $\vec{F}$ **<u>respecto a un punto *P*</u>**

$$\boxed{\vec{M}_{(P)}=\vec{r}_{(P)}\times\vec{F}}$$

$\vec{r}_{(P)}=\vec{r}-\vec{r}_P$ = posición (punto de aplicación de $\vec{F}$) <u>desde *P*</u>.



DEF: **momento angular** $\vec{L}_{(P)}$ **de una partícula <u>respecto a *P*</u>**

$$\boxed{\vec{L}_{(P)}=\vec{r}_{(P)}\times\vec{p}}$$

A partir de la 2ª Ley de Newton $\vec{F}=d\vec{p}/dt$, multiplicamos ambos términos a la izquierda por $\vec{r}_{(P)}\times$

Si P es un punto fijo del sistema de referencia (inercial), $\dot{\vec{r}}_{(P)}=\vec{v}$

$$\Rightarrow\quad \vec{r}_{(P)}\times\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}_{(P)}\times\vec{p})$$ (ya que $\vec{v}\times\vec{p}=\vec{v}\times m\vec{v}=0$)

$$\Rightarrow\quad \boxed{\frac{d\vec{L}_{(P)}}{dt}=\vec{M}_{(P)}}$$

Si en particular el momento de la fuerza que actúa sobre una partícula es cero, entonces el momento angular se mantiene constante (cuidado: <u>respecto del mismo punto *P*</u>!!)

P-2.3.1

P-2.3.4

Definiendo el **impulso angular** $\vec{Y}_{(P)}$ **suministrado por el momento** $\vec{M}_{(P)}$ **de una fuerza en el intervalo** $t_1 \mapsto t_2$ como:

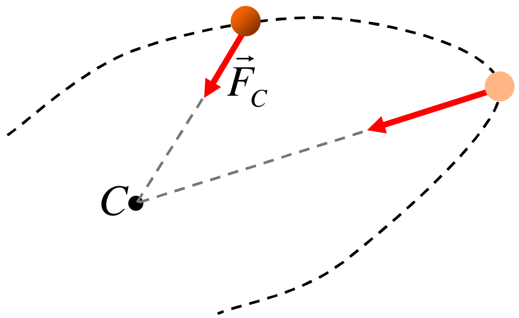
$$\vec{Y}_{(P)} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{(P)} dt$$, tenemos el $\boxed{\textbf{Teorema del momento angular: } \vec{Y}_{(P)} = \Delta\vec{L}_{(P)}}$

El momento angular se mantiene constante en particular en tres casos importantes:

1) Si $\vec{F} = 0$ (movimiento rectilineo uniforme), $\vec{L}_{(P)} = \text{const} \;\; \forall P$
2) En un movimiento circular uniforme, $\vec{L}_{(O)} = \text{const}$, siendo *O* el centro del círculo
3) En caso de fuerza central dirigida hacia el punto *C* , $\vec{L}_{(C)} = \text{const}$

Fuerzas centrales

Una fuerza central es una fuerza cuya recta de acción siempre pasa por un mismo punto C. Ejemplos: la fuerza gravitatoria del Sol sobre un planeta; la fuerza electrostática de una carga fija sobre otra partícula cargada; la tensión de una cuerda fijada en un extremo.

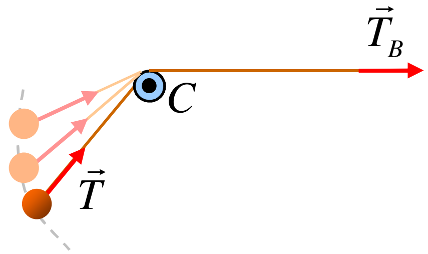


$$\vec{F}_{GU} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

P-2.3.4

En el caso de fuerza central, el momento de la fuerza respecto al punto C Es siempre cero, y por tanto

$$\frac{d\vec{L}_{(C)}}{dt} = \vec{M}_{(C)} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_{(C)}}{dt} = 0$$



Se puede demonstrar que toda fuerza central cumple la:
2ª Ley de Kepler (como consecuencia de la conservación de $\vec{L}_{(C)}$)

→ Ver e2.3.2

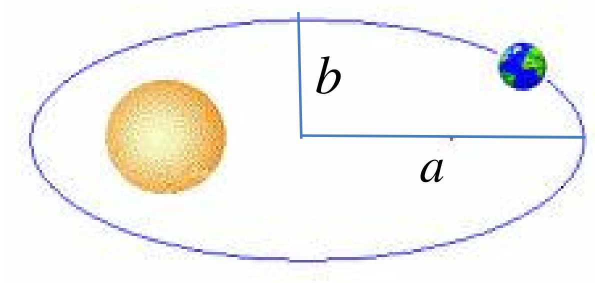
P-2.3.3

P-2.3.5

Leyes de Kepler (se demuestran a partir de la 2ª Ley de Newton con $\vec{F}_{GU} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$)

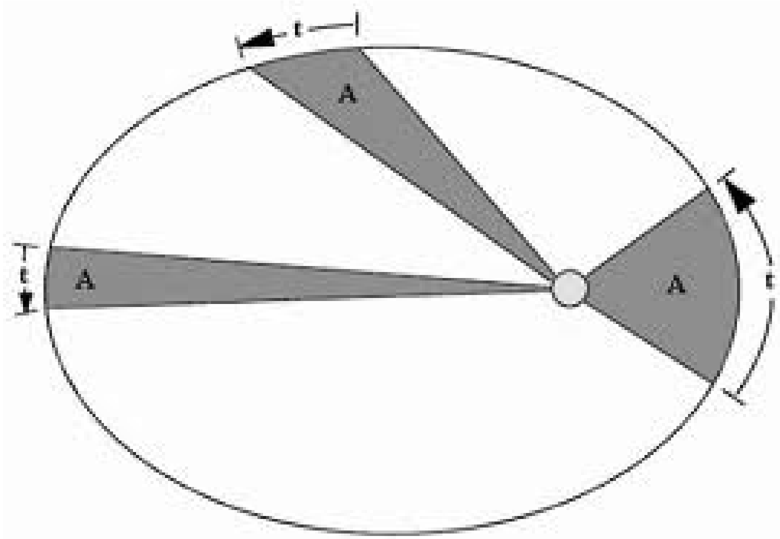
Primera Ley

Los planetas describen orbitas elípticas alrededor del sol, con el sol ocupando uno de los focos de la elipse



Segunda Ley

La velocidad de un planeta varía en el tiempo, de forma que el vector que une el sol al planeta cubre áreas iguales en tiempos iguales. Esta ley es una consecuencia directa de $\vec{L}_{(C)} = const$



e-2.3.2

Tercera Ley

El cuadrado del periodo de revolución de un planeta es directamente proporcional a la longitud del semieje mayor al cubo: $T^2 \propto a^3$

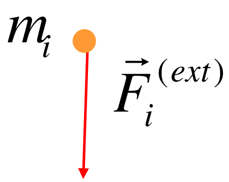
Tema 3: Sistemas de N partículas (i = 1, 2, ... N)

3ª Ley de Newton o Ley de acción y reacción: si un cuerpo actúa sobre un segundo con una fuerza $\vec{F}$, entonces éste último genera una fuerza igual y opuesta $-\vec{F}$ sobre el primero

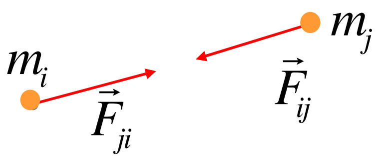
Ej. : fuerzas de contacto (ver P-3.10.2)

Muchas veces estas fuerzas cumplen también otra condición, que es que su dirección es paralela al vector que une las posiciones de las partículas: $\vec{F}_{1\to 2} \;//\; \vec{r}_{1\to 2}\left(=\vec{r}_2-\vec{r}_1\right)$

Ej. : Las fuerzas de gravitación universal y Coulomb cumplen ambas condiciones (ver P-3.7.1)



Fuerzas externas $\vec{F}_i^{(ext)}$: son causadas por agentes exteriores, que no pertenecen al sistema considerado



Fuerzas internas: son las fuerzas de las partículas del sistema entre ellas

por la **3ª Ley de Newton:** $\vec{F}^{\,int}_{i\to j} = -\vec{F}^{\,int}_{j\to i}$

La 2ª Ley de Newton para la partícula *i* es: $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\,ext} + \sum_j \vec{F}^{\,int}_{j\to i} = m_i\vec{a}_i = \dot{\vec{p}}_i$

Sumando sobre *i*: $\vec{F}_{TOT} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i^{\,ext} = \vec{F}^{\,ext}_{TOT} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{P}}$, o sea: $\boxed{\vec{F}^{\,ext}_{TOT} = \vec{F}^{\,ext} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}}$

→ Si $\vec{F}^{\,ext} = 0$, entonces $\vec{P} = ct$

Definiendo la coordenada del Centro de Masas (CM) como: $\vec{R}_{CM} = \dfrac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i$, con $M = \sum_i m_i$, entonces: $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = M\vec{V}_{CM}$ y $\vec{F}^{\,ext} = \dot{\vec{P}} = M\vec{A}_{CM}$

Aplicación: fuegos artificiales **P-3.11.1, P-3.2.8**

Q-3.2.6

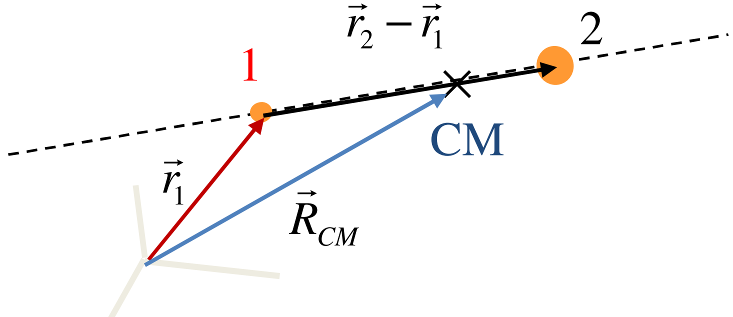
P-3.6.7

Para 2 partículas: $M = m_1 + m_2 \Rightarrow m_1 = M - m_2$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2\right) = \frac{1}{M}\left((M - m_2)\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2\right) =$$

$$= \vec{R}_{CM} = \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)$$

$\Rightarrow$ <u>el centro de masas de dos partículas está a lo largo de la recta que las une</u> , en un punto intermedio entre las dos



§3.4 El momento angular total de un sistema de partículas es: $\vec{L}_{(Q)} = \sum_i \vec{L}_{i(Q)} = \sum_i \vec{r}_{i(Q)} \times m_i \vec{v}_i$

donde $\vec{r}_{i(Q)} = \vec{r}_i - \vec{r}_Q$. **P-3.4.1** $+\vec{R}_{CM}$ Derivando respecto del tiempo:

$$\frac{d\vec{L}_{(Q)}}{dt} = \sum_i \vec{v}_{i(Q)} \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_{i(Q)} \times m_i \vec{a}_i = \sum_i \overbrace{\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i}^{=0} - \sum_i \vec{v}_Q \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_{i(Q)} \times \vec{F}_i = \vec{M}_{(Q)} - \vec{v}_Q \times \sum_i m_i \vec{v}_i$$

Si las fuerzas internas cumplen la condición $\vec{F}^{int}_{i\to j} \,//\, \vec{r}_{ij}$, entonces su momento total es cero, y $\vec{M}_{(Q)} = \vec{M}^{ext}_{(Q)}$. Con esto la ecuación del momento angular queda: $d\vec{L}_{(Q)}/dt = \vec{M}^{ext}_{(Q)} - \vec{v}_Q \times M\vec{V}_{CM}$

El 2º término es cero si: (1) Q es un punto fijo; o (2), Q coincide con el centro de masas. Así pues:

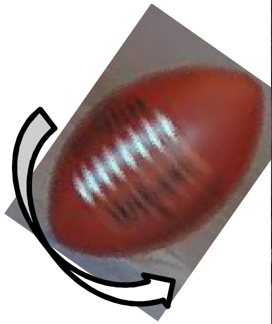
$$\boxed{\vec{M}^{ext}_{(Q)} = \frac{d\vec{L}_{(Q)}}{dt}, \text{ con Q fijo o Q} \equiv \text{CM}}$$

. Esto implica que si $\vec{M}^{ext}_{(Q)} = 0$, entonces $\vec{L}_{(Q)} = ct$

Aplicaciones (Q=CM): fútbol americano, armas de fuego, giroscopio, estaciones, terremotos

Qüestions Parcial2010

P-3.2.1,P-3.3.1,Q-3.4.1,Q.3.4.2,Q-3.4.3



§3.5 Consideremos el trabajo de una pareja de fuerzas internas:

$$dW_{12} = \vec{F}^{int}_{1\to2} \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}^{int}_{2\to1} \cdot d\vec{r}_1 = \vec{F}^{int}_{1\to2} \cdot \left(d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1\right)$$

(se ha utilizado la 3ª Ley de Newton) Si la fuerza sólo depende de la coordenada relativa $\vec{r}_{rel} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ y es además conservativa:

$$dW_{12} = \vec{F}_{1\to2}\left(\vec{r}_{rel}\right) \cdot d\vec{r}_{rel} = -\vec{\nabla} U\left(\vec{r}_{rel}\right) \cdot d\vec{r}_{rel} = -dU$$

Esto significa que a cada pareja (*i* , *j*) se puede asociar una energía potencial U que sólo depende de la coordenada relativa. Si todas las fuerzas internas y externas son conservativas:

$E = E_C + U = ct$, con $U = \sum_i U^{ext}_i + \sum_{parejas} U^{int}_{ij}$. Si hay fuerzas externas no conservativas:

$$\boxed{W_{Fext\ NO\ CONS} = \Delta\left(E_C + U\right)}$$

P-3.5.2, P-3.7.2

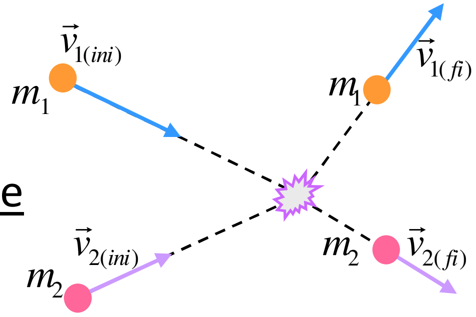
P-3.7.4, P-3.5.3, Q-3.3.1, Q-3.5.1, Q-3.5.2, Q-3.5.3

§3.6 Choques entre partículas

En un choque entre dos o más cuerpos, se puede suponer que no haya fuerzas exteriores, ya que estas son muy débiles para jugar un papel durante el choque. Por lo tanto:
la cantidad de movimiento total del sistema se conserva:

$$\vec{F}^{ext} \approx 0 \;\Rightarrow\; \vec{P} = ct$$
$$\Rightarrow \vec{P}_D = \vec{P}_A$$

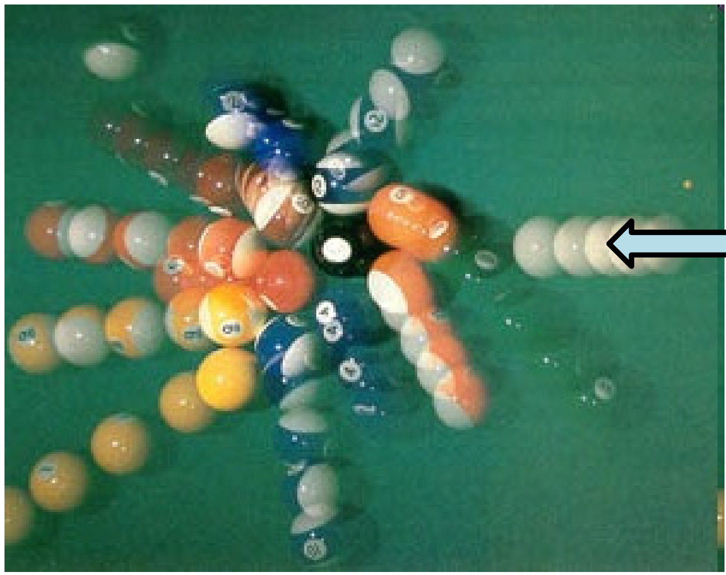
P-3.6.8 (choque compl. inelástico)



Mientras que el momento lineal se conserva siempre en un choque <u>entre partículas</u>, la energía en general no. Llamamos elástico un choque en que la energía cinética total, y por lo tanto la energía total, se conserva (sin desplazamiento la energía potencial de F externas no cambia).

Para 2 partículas, choque elástico $\Leftrightarrow \frac{1}{2} m_1 v_{1,D}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,D}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,A}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,A}^2$ **P-3.6.3**

Conservación del momento lineal



$$\vec{P}_{inicial} = m\vec{v}_{inicial}$$

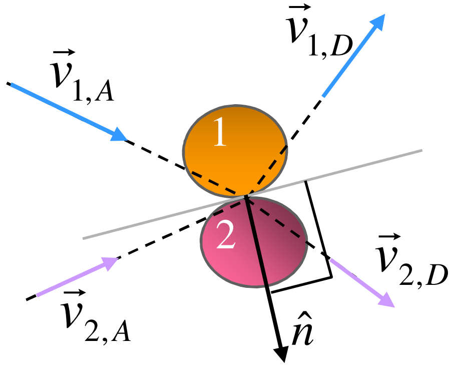
Si se conoce la geometría de la colisión y no hay rozamiento:

→se conoce la dirección de las fuerzas impulsivas generadas en el impacto, que es ortogonal al **plano de choque**

⇒ no hay fuerzas paralelas a este plano

⇒ **las componentes paralelas de las velocidades se conservan**:

$$v_{i,D}^{//} = v_{i,A}^{//} \quad , i = 1,2$$



Incógnitas : componentes de $\vec{v}$ <u>ortogonales</u> al plano de choque.

Se define **el coeficiente de restitución** *e* como**:**

$$e = \left| \frac{v_{1(D)}^{\perp} - v_{2(D)}^{\perp}}{v_{1(A)}^{\perp} - v_{2(A)}^{\perp}} \right|$$

Además : $\vec{P} = const$

Las incógnitas se hallan poniendo a sistema estas dos ecuaciones (la 2ª es vectorial !!)

Se puede demonstrar que para un choque elástico, *e* = 1

P-3.6.1, P-3.6.4

P-3.6.6, P-3.6.9, P-3.6.10

<u>Importante</u>: Para una **colisión con una pared <u>fija</u>**: $v_D^{//} = v_A^{//}$

pero **<u>no</u> se conserva** el momento lineal total !!!