TEMA 1) Introducción: ¿ Qué es la luz?

Pr. 1-1. Determinar el campo **B** y hacer el esquema de una onda electromagnética armónica plana cuyo campo **E** vale $E_z(y,t) = E_{0z}\,\mathrm{sen}\left[\omega\left(t-\frac{y}{c}\right)+\epsilon\right]$. ¿En qué dirección se propaga la onda?

Resp. Puesto que $E_x = E_y = 0$, la primera de las ecuaciones de Maxwell conduce a

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

o

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\omega}{c}E_{0z}\cos\left[\omega\left(t-\frac{y}{c}\right)+\epsilon\right]$$

Integrando ambos términos con respecto a t se llega a

$$B_x(y,t) = \frac{1}{c}E_{0z}\,\mathrm{sen}\left[\omega\left(t-\frac{y}{c}\right)+\epsilon\right] = \frac{1}{c}E_z(y,t)$$

Pr. 1-2. ¿Cuál es el índice de refracción de un vidrio, si su constante dieléctrica relativa vale 2.31? Cuánto vale la velocidad de propagación de la luz en el vidrio?

Resp. n = 1.52

Pr. 1-3

Una onda de luz anaranjada de frecuencia 500 THz existe en una región del espacio. (*a*) ¿Cuánto varía la fase en 1×10^{-9} segundos? (*B*) ¿Qué longitud tendría el tren de ondas correspondientes a tal intervalo? (A causa de la excesivamente alta frecuencia de la luz no existen medios para medir los valores instantáneos ni de la magnitud ni de la fase de una onda de luz).

Resp. (*a*) 5×10^5 ciclos o $\pi \times 10^6$ rad, (*b*) 0,3 m

Pr. 1-4

Una luz de longitud de onda en el espacio libre $\lambda_0 = 500$ nm pasa del vacío al diamante ($n_d = 2{,}4$). En circunstancias normales la frecuencia de la luz no se altera al atravesar diferentes sustancias. En tal supuesto, calcular la velocidad de la onda y la longitud de onda en el diamante.

Resp. Puesto que $n = c/v$, $v = c/n = 3 \times 10^8/2{,}4 = 1{,}25 \times 10^8$ m/s. En cuanto a la longitud de onda,

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0\nu_0}{\lambda\nu} = \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

ya que $\nu_0 = \nu$. Luego, $\lambda = 500/2{,}4 = 208$ nm.

Pr. 1-5

El índice de refracción de una determinada luz de longitud de onda en el vacío $\lambda_0 = 589$ nm es de 2,417 para el diamante (C) y 1,923 para el zirconio ($ZrO_2 \cdot SiO_2$). Calcular la relación de sus longitudes de onda en el diamante y en el zirconio.

Resp. 0,79

Pr. 1-6

Una onda infrarroja armónica plana que se desplaza en un medio trasparente está dada por

$$E_x(y,t) = E_{0x}\,\mathrm{sen}\,2\pi\left(\frac{y}{5\times 10^{-7}} - 3\times 10^{14}t\right)$$

en unidades SI como de costumbre. Determinar el índice de refracción del medio a esa frecuencia y la longitud de onda de la perturbación en el vacío.

Se sabe que la fase es de la forma $k(y - vt)$; en consecuencia lo anterior se replantea así

$$\varphi = \frac{2\pi}{5\times 10^{-7}}(y - 15\times 10^{7}t)$$

Como es claro, $\lambda = 5\times 10^{-7}$ m y $v = 1{,}5\times 10^{8}$ m/s. Entonces $n = c/v = 2$ y $\lambda_0 = n\lambda = 1000$ nm.

Pr. 1-7. La longitud de onda de la luz visible varía desde el violeta en los 390 nm al rojo en los 790 nm. Calcula el correspondiente intervalo de variación de la frecuencia.

Puesto que $v = \nu\lambda$,

$$\nu_{\text{vio}} = \frac{3\times 10^{8}\ \text{m/s}}{390\times 10^{-9}\ \text{m}} = 7{,}7\times 10^{14}\ \text{s}^{-1} \quad \text{y} \quad \nu_{\text{rojo}} = \frac{3\times 10^{8}\ \text{m/s}}{780\times 10^{-9}\ \text{m}} = 3{,}8\times 10^{14}\ \text{s}^{-1}$$

Las unidades son inversos de segundo o ciclos por segundo. Actualmente se usa la unidad *hertz*, abreviado Hz, en lugar de cps. El intervalo de variación de frecuencia está entonces entre los 380 THz y los 770 THz (1 terahertz = 10^{12} Hz = 1 THz).

Pr. 1-8. ¿Cuántas ondas de luz amarilla (λ = 580 nm) caben en una distancia igual al grosor de una hoja de papel (0.1 mm)? ¿Cuánto espacio ocupa un treno de microondas (ν = 10GHz) que contiene el mismo número de ondas?

Pr. 1-9

Supóngase que una onda de luz se propaga desde un punto A a un punto B, y que se interpone en su trayectoria una lámina de vidrio de espesor $\ell = 1$ mm ($n_g = 1{,}5$). ¿En cuánto se altera la fase de la onda en B si $\lambda_0 = 500$ nm?

El índice de refracción del aire (1,000293 a 0° C y 1 atmósfera) se supone igual a uno. El número de ondas en el aire sobre la distancia $\overline{AB}$ es simplemente $\overline{AB}/\lambda_0$. El desplazamiento de fase asociado es $2\pi(\overline{AB}/\lambda_0)$. Con el vidrio insertado hay $(\overline{AB} - \ell)/\lambda_0$ ondas en el aire y ℓ/λ ondas en el vidrio. La diferencia de fase es entonces

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi(\overline{AB} - \ell)}{\lambda_0} + \frac{2\pi\ell}{\lambda} - \frac{2\pi\overline{AB}}{\lambda_0} = 2\pi\ell\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)$$

Pero $1/\lambda = n/\lambda_0$ y así

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\ell}{\lambda_0}(n-1)$$

En este caso particular

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi 10^{-3}}{500\times 10^{-9}}(1{,}5 - 1) = 2\pi 10^{3}\ \text{rad}$$

Pr. 1-10

La longitud de onda en el vacío de un haz luminoso es de 600 nm. ¿ Cuál es el número de propagación en un medio de índice de refracción 1,5?

Resp. $1{,}57\times 10^{7}$ rad/m

Pr. 1-11. La luz de una lámpara de sodio (λ = 589 nm) pasa a través de un tanque de 20 m de largo. La luz tarda en un tiempo t_1 en atravesar el tanque cuando está lleno de glicerina (n = 1,47), y un tiempo t_2 si está lleno de bisolfuro de carbono (n = 1.63). Calcula la diferencia entre los dos tiempos.

Puesto que $v = c/n$.

$$t_1 = \frac{20}{c/n} = \frac{20(1,47)}{c} \quad y \quad t_2 = \frac{20(1,63)}{c}$$

En consecuencia,

Resp. $$t_2 - t_1 = \frac{20}{c}(1,63 - 1,47) = 1,07 \times 10^{-8} \text{ s}$$

Pr. 1-12

Se desea comparar los tiempos de recorrido de dos haces luminosos; el uno en un tanque de tetracloruro de carbono ($n = 1,46$) y el otro en aire ($n = 1,0$). Si las longitudes de las trayectorias se hacen iguales, ¿Cuál debe ser la longitud del tanque si se necesita que la diferencia de los tiempos de tránsito sea de una millonésima de segundo?

Resp. 650 m

Pr. 1-13. La energía que fluye a través de una sección ortogonal a una onda e.m. por unidad de superficie y de tiempo es dada por el valor medio temporal del vector de Poynting **S**, y se indica con la letra *I* . Demuestra que en unidades SI, **S** se expresa en W/m^2. Demuestra que para una onda armónica en el espacio libre es : $I = (c\epsilon_0/2)E_0^2$, que se puede también escribir como: $I = (1,33 \times 10^{-3} \text{ W/V}^2)E_0^2$

El campo **B** tiene la forma $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cos(kx - \omega t)$ y en consecuencia

$$\mathbf{S} = c^2\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = c^2\epsilon_0 \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \cos^2(kx - \omega t)$$

Luego $$\langle S \rangle = c^2\epsilon_0 |\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0| \langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle$$

Calculando el promedio sobre un intervalo de tiempo T, se encuentra:

$$\langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \cos^2(kx - \omega t')\, dt'$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4\omega T}\{\operatorname{sen}[2kx - 2\omega(t+T)] - \operatorname{sen} 2(kx - \omega t)\}$$

Cuando $T \gg \tau$, $\omega T \gg 1$ y $\langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = 1/2$. En consecuencia, puesto que $E_0 = cB_0$,

$$I = \frac{c\epsilon_0}{2}E_0^2$$

o si se prefiere,

Resp. $$I = c\epsilon_0 \langle \mathbf{E}^2 \rangle$$

Pr. 1-14. Calcula la densidad de flujo para una onda electromagnética (e.m.) plana cuyo campo ***E*** (también llamado campo óptico) sólo tiene componente *z* dada por: $E_z = 100 \operatorname{sen}\left[8\pi \times 10^{14}\left(t - \frac{x}{3 \times 10^8}\right)\right]$

Resp. $$I = \frac{(3 \times 10^8)(8,85 \times 10^{-12})(100)^2}{2} = 13,3 \text{ W/m}^2$$

Pr. 1-15. El umbral de sensibilidad del ojo humano es aproximadamente de 100 fotones por segundo a la longitud de onda de 550 nm (a la que el ojo es más sensible). Calcula el umbral de sensibilidad en potencia.

Pr. 1-16. ¿Cuál es la energía del fotón (en J) que corresponde a una onda de 60 Hz emitida por una línea eléctrica? ¿Cómo se compara con la energía de un fotón de luz visible?

Resp. Valiéndose de la expresión $\mathcal{E} = h\nu$, se tiene

$$\mathcal{E} = (6{,}6 \times 10^{-34})(60) = 39{,}6 \times 10^{-33}\ \mathrm{J}$$

como la energía de un fotón de 60 Hz. La luz se extiende desde los $3{,}8 \times 10^{14}$ Hz hasta los $7{,}7 \times 10^{14}$ Hz, desde los $25{,}1 \times 10^{-20}$ J hasta los $50{,}8 \times 10^{-20}$ J. De aquí que el fotón de 60 Hz es alrededor de 10^{13} menos energético que el de la luz.

Pr. 1-17. La irradiancia, en la superficie de la Tierra, debida sólo a la luz difusa por la atmósfera en un día soleado es típicamente del orden de 80 W m^{-2}. ¿Cuánto es el campo eléctrico asociado? Considerando que esta luz de color ligeramente azulado tiene una longitud de onda media de 500 nm, encuentra cuantos fotones por segundo llegan a tu ojo, si tu pupila tiene un diámetro de 3 mm.

Resp. The average photon carries an energy $hc/\lambda = 1240\mathrm{eV}\frac{\mathrm{nm}}{500\mathrm{nm}} \times 1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{J/eV} = 3.97 \times 10^{-19}$ J.

No. Photons/sec $= (80\mathrm{Wm}^{-2}/3.97 \times 10^{-19}\mathrm{J})\pi(1.5 \times 10^{-3}\mathrm{m})^2 = 1.4 \times 10^{15}$/sec.

Pr. 1-18. Un haz colimado de densidad 10 W/cm^2 incide normalmente sobre una superficie perfectamente absorbente de área 1 cm^2. Si esto ocurre durante 1000 s, ¿cuánta energía se imparte a la superficie?

Resp. 10^4 J

Pr. 1-19. Una onda monocromática de longitud de onda de 500 nm se propaga en el vacío en la dirección positiva del eje y. Si el campo ***B*** se confina en el plano *xy* y la densidad de flujo radiante es 1.197 W m^{-2} , determinar el campo ***E*** .

Resp. $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{k}}\, 30 \operatorname{sen} 4\pi 10^6 (y - 3 \times 10^8 t)$. La onda viaja en la dirección de $\hat{\mathbf{j}}$, $\mathbf{E}$ está en la dirección de $\hat{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{B}$ está en la dirección de $\hat{\mathbf{i}}$.

Pr. 1-20. a) La radiación que proviene de las nubes interestelares de hidrógeno tienen una longitud de onda de 21 cm. ¿Qué clase de ondas son? Determina su frecuencia y la energía del fotón. b) ¿Existen ondas electromagnéticas que tengan longitud de onda de 20 millones de km? Calcula su período y la energía de cada fotón.

Resp. a) Microondas $\nu = 1{,}4 \times 10^9\ \mathrm{Hz},\ \mathcal{E} = 9{,}24 \times 10^{-25}\ \mathrm{J}$; b) ondas de radiofrecuencia, con $\tau = 100\ \mathrm{s},\ 4{,}1 \times 10^{-17}\ \mathrm{eV}$

Pr. 1-21. Un detector radar muy sensible detecta una señal electromagnética de frecuencia 100 MHz y 6.63 $\times$ 10^{-16} W de potencia. Calcula: (a) la longitud de onda y la energía de cada fotón, y el número de fotones que llegan al detector por segundo; (b) el número de fotones por segundo que llegarían al detector si la misma potencia llegara como luz visible (λ = 555 nm) o como rayos X (λ = 0.1 nm)

Pr. 1-22. Determinar velocidad de propagación, frecuencia, longitud de onda, período, fase inicial, amplitud del campo óptico y polarización de una onda electromagnética plana (en unidades SI) cuyo campo ***E*** está dado por: $E_x = 10^2 \operatorname{sen} \pi(3 \times 10^6 z - 9 \times 10^{14} t) \qquad E_y = 0 \qquad E_z = 0$

Hallar también la expresión del campo magnético asociado.

$$E_x = 10^2 \text{ sen } [3 \times 10^6 \pi (z - 3 \times 10^8 t)]$$

en donde se ve que $k = 3 \times 10^6 \pi$ m^{-1} y $v = 3 \times 10^8$ m/s. Puesto que $k = 2\pi/\lambda = 3 \times 10^6 \pi$, $\lambda = 666$ nm.- Además,

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{(2/3) \times 10^{-6}} = 4{,}5 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

El período τ es $\tau = 1/\nu = 2{,}2 \times 10^{-15}$ s, mientras que la fase inicial es evidentemente cero. La amplitud del campo es simplemente $E_{0_x} = 10^2$ V/m. La onda es polarizada linealmente en la dirección x y se propaga a lo largo del eje z. Esta onda corresponde a luz roja.

Resp.

La onda se propaga en la dirección z mientras que el campo **E** oscila en la dirección x. En otras palabras, el campo **E** yace en el plano xz. En consecuencia, puesto que **B** es normal tanto a **E** como a la dirección de propagación, este debe estar localizado en el plano yz. De esta manera, $B_x = 0$, $B_z = 0$ y $\mathbf{B} = B_y(z, t)\hat{\mathbf{j}}$. Como se vio en el problema 2.3, $E = cB$, aplicando lo cual se llega a

$$B_y(z, t) = 0{,}33 \times 10^{-6} \text{ sen } \pi(3 \times 10^6 z - 9 \times 10^{14} t)$$

Aquí $B_{0_y} = E_{0_x}/c = 10^2/(3 \times 10^8)$, cuya unidad es el *tesla* (T), siendo $1\text{ T} = 1 \text{ kg s}^{-1} \text{ C}^{-1}$

Pr. 1-23. Una onda e.m. de 10 MHz de frecuencia y con polarización paralela al eje *y* , se propaga en el sentido positivo del eje *x* . Si la amplitud de E es E_0 = 0.08 V/m, calcula el periodo y la longitud de onda y escribe la expresión para E(t), B(t) y <S> .

Pr. 1-24. ¿Cuáles de estas expresiones corresponden a ondas propagantes? ¿Con qué velocidad?

(1)

(a) $\psi(z, t) = (az - bt)^2$

(b) $\psi(x, t) = (ax + bt + c)^2$

(c) $\psi(x, t) = 1\ (ax^2 + b)$

(2)

(a) $\psi(y, t) = e^{-(a^2x^2 + b^2t^2 - 2abtx)}$

(b) $\psi(z, t) = A \sin (az^2 - bt^2)$

(c) $\psi(x, t) = A \sin 2\pi\left(\frac{x}{a} + \frac{t}{b}\right)^2$

(d) $\psi(x, t) = A \cos^2 2\pi(t - x)$

Pr. 1-25. Determina la velocidad de propagación de cada una de las ondas:

$$\psi_1(y, t) = A(y - t)^2$$
$$\psi_2(x, t) = A(Bx + Ct + D)^2$$
$$\psi_3(z, t) = A \exp (Bz^2 + BC^2t^2 - 2BCzt)$$

Aquí *A, B, C* y *D* son constantes. (A veces se utilizará la notación exp *u* para indicar e^u).

Resp. $v_1 = 1$ en la dirección positiva del eje *y*, $v_2 = C/B$ en la dirección negativa del eje *x*, $v_3 = C$ en la dirección positiva del eje *z*.

Haz lo mismo con la onda Gaussiana $\psi(x, t) = Ae^{-a(bx + ct)^2}$ · y haz una gráfica de ψ al tiempo *t* = 0.

***Pr. 1-26**. La *Ley de Malus* afirma que la intensidad de un rayo de luz polarizado linealmente después de atravesar un polarizador perfecto vale $I = I_0 \cos^2 \theta$, donde I_0 indica la intensidad de la luz antes de pasar por el polarizador y θ indica el ángulo entre el eje de trasmisión del polarizador y el eje de polarización de la luz incidente.

Dos polarizadores, el primero con el eje de transmisión a 0° y el otro a 90° , interceptan un haz de luz no polarizada de intensidad I_0 , de modo que después del primero la intensidad es ½ I_0 y después del segundo no hay intensidad. Si se pone otro polarizador entre los dos, de manera que su eje de polarización esté a 45°, ¿cuánto es la intensidad del haz después de pasar por los tres polarizadores?

TEMA 2) La matemática de las ondas: ondas y notación compleja

Pr. 2-1. Demostrar que la parte real del número complejo *z* está dada por Re{z} = ½(z + z*)

Resp. Puesto que $z = x + iy$, se puede escribir

$$\tfrac{1}{2}(z + z^*) = \tfrac{1}{2}[(x + iy) + (x - iy)] = x$$

Pr. 2-2

Deducir las expresiones

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \qquad \operatorname{sen}\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

a partir de la fórmula de Euler $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi$

Resp. En la fórmula de Euler

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi$$

remplácese φ por $-\varphi$, para obtener

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\operatorname{sen}\varphi$$

puesto que $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$, $\operatorname{sen}(-\varphi) = -\operatorname{sen}\varphi$. Al sumar estas dos formas se llega a

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi$$

mientras que al restarlas resulta

$$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\operatorname{sen}\varphi$$

Nota: El primer resultado es equivalente a Re{z} = ½(z + z*), el segundo a Im {z} = (z – z*)/2*i*

Pr. 2-3

Determinar la parte real de $z = (1 - 4i)/2i$ y $z = 2e^{i\omega t}e^{-ikx}$.

Resp. -2, $2\cos(\omega t - kx)$

Determinar la parte imaginaria de

$$z = 5e^{ikx}e^{i\omega t}e^{i\varepsilon}, \quad z = \left(\frac{Ae^{i\omega t}}{Be^{ikx}}\right)e^{i\varepsilon}, \quad z = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

Resp. $5\operatorname{sen}(kx + \omega t + \varepsilon)$, $\dfrac{A}{B}\operatorname{sen}(\omega t - kx + \varepsilon)$, 0

Encontrar las magnitudes de las cantidades complejas

$$\psi(x,t) = e^{ikx}e^{-i\omega t}e^{i\varepsilon} \qquad \psi(y,t) = 2e^{iky}e^{i\omega t} + 4e^{iky}e^{-i\omega t}$$

Resp. 1, $2[5 + 4\cos 2\omega t]^{1/2}$

Pr. 2-4. Demostrar que en notación compleja una onda se puede escribir como $\psi = A\,e^{i\varphi}$, y que es invariable cuando su fase se aumente o se disminuye en una cantidad 2π .

Cuando la fase cambia en $\pm 2\pi$ la función de onda toma el valor

$$\psi' = Ae^{i(\varphi \pm 2\pi)} = Ae^{i\varphi}e^{\pm 2\pi i} = \psi e^{\pm 2\pi i}$$

Pero por la fórmula de Euler

$$e^{\pm 2\pi i} = \cos(\pm 2\pi) + i\operatorname{sen}(\pm 2\pi) = 1 + i0 = 1$$

Resp. En consecuencia, $\psi' = \psi$.

Pr. 2-5. Demuestra que multiplicar una onda compleja por ±*i* es equivalente a variar su fase en ± π/2

Si $\psi = Ae^{i\varphi}$, entonces $\pm i\psi = \pm iAe^{i\varphi}$. Pero por la fórmula de Euler

$$e^{\pm i\pi/2} = \cos(\pm\pi/2) + i\,\mathrm{sen}(\pm\pi/2) = \pm i$$

y así

$$\pm iAe^{i\varphi} = Ae^{\pm i\pi/2}e^{i\varphi} = Ae^{i(\varphi\pm\pi/2)}$$

Demuestra que multiplicar una onda compleja por –1 es equivalente a variar su fase en 180º.

Pr. 2-6. Calcular el valor de la suma $\cos\vartheta + \cos(\vartheta + \alpha)$ utilizando el cálculo complejo.

Resp. Con la notación compleja, esta cantidad es la parte real de $\psi = \exp(i\vartheta) + \exp[i(\vartheta+\alpha)]$

$$\tilde{\psi} = \exp(i\theta) + \exp[i(\theta+\alpha)] = \exp(i\theta)[1+\exp(i\alpha)]$$
$$= \exp(i\theta)\exp(i\alpha/2)[\exp(-i\alpha/2)+\exp(i\alpha/2)] = \exp[i(\theta+\alpha/2)]2\cos(\alpha/2).$$

Por tanto $\cos\vartheta + \cos(\vartheta + \alpha) = \mathrm{Re}\{\psi\} = 2\cos(\alpha/2)\cos(\alpha/2 + \vartheta)$

Pr. 2-7. (a) Calcula la onda resultante de la superposición de las ondas $E_1 = 2\cos\omega t$ y $E_2 = 7\cos(\frac{1}{4}\pi - \omega t)$; (b) haz lo mismo con dos ondas de la forma $A\cos(\alpha - \omega t)$, de amplitud 3 y 4 y fases de $\pi/6$ y $\pi/2$, respectivamente, ambas de período igual a 1 s.

Resp. (a) $E_R = 8.53\cos(0.2\pi - \omega t)$; (b) $E_R = 6.08\cos(0.36\pi - 2\pi t/s)$

Pr. 2-8

Es muy usual, en muchas de las ramas de la física y ciertamente en óptica, calcular el cuadrado de algunas clases de funciones armónicas, como por ejemplo la energía cinética si v es sinusoidal. Cuando se hace esto en la representación compleja, *se debe tener mucho cuidado* para evitar un error muy común. Para examinar este punto en detalle, determinar $\psi^2(x,t)$, donde $\psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$, utilizando la representación compleja. ¿En donde está la dificultad?

Resp. $\psi^2 = A^2\cos^2(kx - \omega t)$. Si ψ se escribe en la forma $Ae^{i(kx-\omega t)}$ se debe evaluar $[\mathrm{Re}(\psi)]^2$, que no es igual a $\mathrm{Re}(\psi\psi^*)$ sino más bien a $[(\psi + \psi^*)/2]^2$.

Pr. 2-9

Dada una onda electromagnética plana en el vacío cuyo campo **B** se denota por

$$B_x = 0 \qquad B_y = 66{,}7\times10^{-8}\,\mathrm{sen}\,4\pi10^6(z - 3\times10^8 t) \qquad B_z = 0$$

Hallar una expresión para el campo **E**. ¿Cuáles son la longitud de onda, velocidad y dirección del movimiento de la perturbación?

Resp. $E_x = 200\,\mathrm{sen}\,4\pi10^6(z - 3\times10^8 t)$, $E_y = E_z = 0$; $\lambda_0 = 500$ nm; $v = 3\times10^8$ m/s en la dirección positiva de z.

Pr. 2-10

Una onda electromagnética armónica plana de frecuencia 600×10^{12} Hz (luz verde), que se propaga en la dirección del eje x en el vacío, tiene una amplitud de campo eléctrico de 42,42 V/m. La onda es linealmente polarizada en tal forma que el plano de vibración del campo eléctrico está a 45° del plano xz. Hallar las expresiones de **E** y **B**.

Resp.

La amplitud del campo **E**, E_0, es igual a $(E_{0y}^2 + E_{0z}^2)^{1/2}$, donde, a causa de la polarización a 45°, $E_{0y} = E_{0z}$. Así $E_0 = 42{,}42 = \sqrt{2}E_{0y}$ y $E_{0y} = E_{0z} = 30$ V/m. Escribiendo la fase en la forma $\omega(t - x/v)$, el campo eléctrico viene a ser

$$E_x = 0 \qquad E_y = E_z = 30 \text{ sen}\left[2\pi 600 \times 10^{12}\left(t - \frac{x}{3 \times 10^8}\right)\right]$$

donde por supuesto, $\omega = 2\pi\nu$. Ya que $E = cB$,

$$B_x = 0 \qquad B_z = -B_y = 10^{-7} \text{ sen}\left[2\pi 600 \times 10^{12}\left(t - \frac{x}{3 \times 10^8}\right)\right]$$

Nota: **Obsérvese que B_z es perpendicular a E_y, como $-B_y$ lo es a E_z.**

¿Cómo se escriben estos campos en notación compleja?

Pr. 2-11. Una onda electromagnética plana con λ = 500 nm se propaga en el vació a lo largo del eje *y* . Si la irradiancia es 52,3 W m^{-2} y el campo ***E*** está linealmente polarizado en el plano yz , hallar ***B*** en notación real y compleja.

Resp.

Se puede determinar E_0 a partir de la irradiancia:

$$I = c\epsilon_0 E_0^2/2$$

$$53{,}2 = (3 \times 10^8)(8{,}85 \times 10^{-12})E_0^2/2$$

$$E_0 = 200 \text{ V/m}$$

Entonces, a partir de $B_0 = E_0/c = 66{,}7 \times 10^{-8}$ T, se deduce que

$$B_x = 66{,}7 \times 10^{-8} \text{ sen } \frac{2\pi}{500 \times 10^{-9}}(y - 3 \times 10^8 t) \qquad B_y = B_z = 0$$

Pr. 2-12. Determina el campo magnético y el vector de Poynting de una onda electromagnética cuyo campo óptico es dado por: $\vec{E}(\vec{r},t) = E_0\left(\hat{k} - \hat{i}\right)\exp i(ky - \omega t)$

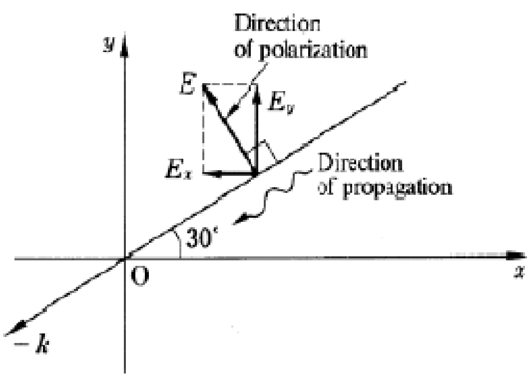
Pr. 2-13. Para una onda plana cuyo campo óptico es:

$$E = (-2\hat{i} + 2\sqrt{3}\hat{j}) \exp[j(\sqrt{3}x + y + 6 \times 10^8 t)].$$

Find; 1) the direction of polarization, 2) the direction of propagation, 3) the phase velocity, 4) the amplitude, 5) the frequency, and 6) the wavelength.

Solution

1) $-\hat{i} + \sqrt{3}\hat{j}$
2) $k = \sqrt{3}\hat{i} + \hat{j}$. This wave is propagating in the $-k$ direction (210°)
3) $|k| = k = \sqrt{3+1} = 2$
   $v = \frac{\omega}{k} = 3 \times 10^8$ m/s
4) $|E| = \sqrt{2^2 + 2^2 \times 3} = 4$ v/m
5) $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3}{\pi} \times 10^8$ Hz
6) $\lambda = \frac{v}{f} = \pi$ m.



Pr. 2-14. El campo óptico de cierta onda electromagnética es dado por la expresión:

$$E = \left(-\frac{\hat{i}}{2} - \frac{\hat{j}}{2} + \hat{k}\right)e^{j2\pi[10(x+y+z) - 3 \times 10^9 t]}$$

Hallar la dirección de polarización y de propagación, la amplitud, la longitud de onda, la velocidad de fase y el campo magnético asociado ***B***(t).

Pr. 2-15. Escribe las expresiones real y compleja de una onda armónica de amplitud *A* y frecuencia ω que se propaga en dirección paralela al vector (4, 2, 1). (Sugerencia: determina **k** y multiplícalo escalarmente por **r**).

Resp. El vector **k** se puede construir a partir del vector unitario de la dirección adecuada, multiplicándolo por el módulo de k . El vector unitario es

$$[(4-0)\hat{\mathbf{i}} + (2-0)\hat{\mathbf{j}} + (1-0)\hat{\mathbf{k}}]/\sqrt{4^2+2^2+1^2}$$
$$= (4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})/\sqrt{21}$$

and $\vec{\mathbf{k}} = k(4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})/\sqrt{21}$.

$$\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

hence $\psi(x, y, z, t) = A \sin[(4k/\sqrt{21})x + (2k/\sqrt{21})y + (k/\sqrt{21})z - \omega t]$.

Pr. 2-16. Escribe la expresión real y compleja de los campos E y B de una onda que se propaga en el sentido del eje *z* con polarización lineal a 45º respecto del plano *yz* .

Resp. $\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{E_0}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})\sin(kz-\omega t)$, $\vec{\mathbf{B}} = \dfrac{E_0}{c\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{i}})\sin(kz-\omega t)$.

Pr. 2-17. Una onda plana armónica linealmente polarizada, con el vector E en el plano *xy* y de amplitud 10 V/m, se propaga paralela a la bisectriz del plano *xy*. Escribe la expresión de la onda y calcula el flujo de energía.

Resp. **3.17** $\vec{\mathbf{E}}_0 = (-E_0/\sqrt{2})\hat{\mathbf{i}} + (E_0/\sqrt{2})\hat{\mathbf{j}}$; $\vec{\mathbf{k}} = (2\pi/\lambda)(\hat{\mathbf{i}}/\sqrt{2} + \hat{\mathbf{j}}\sqrt{2})$, hence $\vec{\mathbf{E}} = (1/\sqrt{2})(-10\hat{\mathbf{i}} + 10\hat{\mathbf{j}})\cos[(\sqrt{2}\pi/\lambda)(x+y) - \omega t]$ and $I = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_0^2 = 0.13\ \mathrm{W/m^2}$.

Pr. 2-18. Calcula el espectro de frecuencias de un pulso *g*(*t*) rectangular, definido por:

$g(t) = h$ for $\left(-\frac{1}{2}b < t < +\frac{1}{2}b\right)$

$g(t) = 0$ elsewhere.

Resp.
$$G(\nu) = \int_{-b/2}^{+b/2} h\exp(-2\pi i\nu t)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{h}{2\pi i\nu}\left[\exp\left(+2\pi i\nu\frac{b}{2}\right) - \exp\left(-2\pi i\nu\frac{b}{2}\right)\right]$$
$$= hb\frac{\sin\psi}{\psi} = hb\ \mathrm{sinc}\,\psi, \quad \text{where} \quad \psi = \pi\nu b.$$

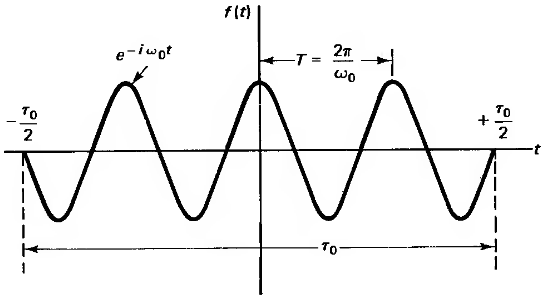
Pr. 2-19. Calcula el espectro en frecuencia de un treno de onda armónico finito de durada τ_0 y pulsación ω_0, definido por :

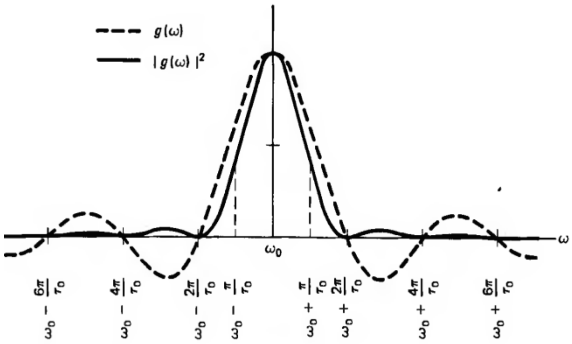
$$f(t) = \begin{cases} e^{-i\omega_0 t}, & -\frac{\tau_0}{2} < t < \frac{\tau_0}{2} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Resp. La transformada de Fourier de *f*(*t*) vale

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\tau_0/2}^{+\tau_0/2} e^{i(\omega-\omega_0)t}\,dt = \left[\frac{e^{i(\omega-\omega_0)t}}{2\pi i(\omega-\omega_0)}\right]_{-\tau_0/2}^{+\tau_0/2} = \frac{\tau_0}{2\pi}\left\{\frac{\sin[(\tau_0/2)(\omega-\omega_0)]}{[(\tau_0/2)(\omega-\omega_0)]}\right\}$$

Definiendo $u = (\tau_0/2)(\omega - \omega_0)$, tenemos pues: $g(\omega) = \frac{\tau_0}{2\pi}\frac{\sin(u)}{u} = \frac{\tau_0}{2\pi}\operatorname{sinc}(u)$

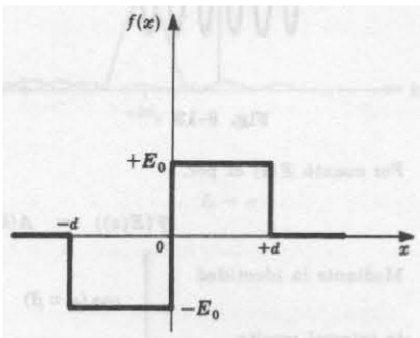




Pr. 2-20. Determinar la transformada de Fourier de $E(x) = P(x)\cos^2 k_p x$, donde $P(x)$ es el pulso cuadrado unitario que varía de $x = -L$ a $x = +L$, y dibujar el espectro en frecuencia (sugerencia: utilizar el hecho que $\cos^2 k_p x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2k_p x$ y escribirlo en forma compleja)

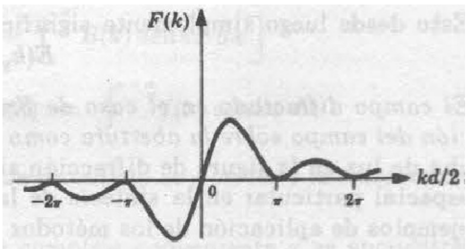
Resp. $\mathcal{F}\{E(x)\} = L \operatorname{senc} kL + \frac{L}{2}\operatorname{senc}(k + 2k_p)L + \frac{L}{2}\operatorname{senc}(k - 2k_p)L$

Pr. 2-21. Computar y trazar la transformada de Fourier de la función mostrada en figura:

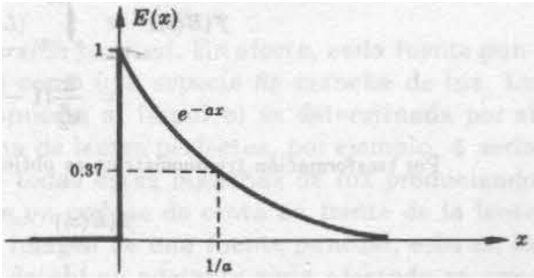


Resp. $\mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-d}^{0} -E_0 e^{ikx}\,dx + \int_{0}^{+d} E_0 e^{ikx}\,dx = \left[-\frac{E_0}{ik}e^{ikx}\right]_{-d}^{0} + \left[\frac{E_0}{ik}e^{ikx}\right]_{0}^{+d} = \frac{2iE_0}{k}(1 - \cos kd)$

Esto se puede escribir como: $\mathcal{F}\{f(x)\} = 2iE_0 d\,\frac{\operatorname{sen}^2(kd/2)}{kd/2}$. El gráfico de tal función es:



Pr. 2-22. Calcular la transformada de Fourier de la función $E(t) = U(t)e^{-at}$, donde a una constante positiva y $U(t)$ es la función escalonada unitaria, que es igual a cero para $t < 0$ e igual a uno para $t > 0$:



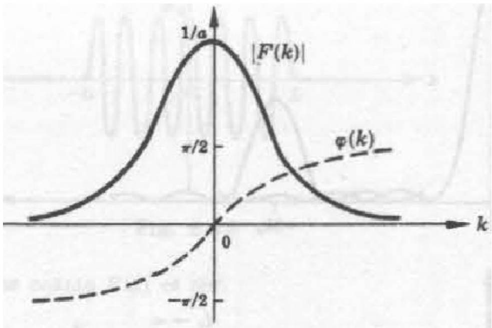
¿Sabes dibujar el espectro en frecuencia?

Resp. $\mathcal{F}\{E(x)\} = \int_0^\infty e^{-ax}\, e^{ikx}\, dx = \int_0^\infty e^{-(a-ik)x}\, dx = \left[-\frac{1}{a-ik}\, e^{-(a-ik)x}\right]_0^\infty = \frac{1}{a-ik}$

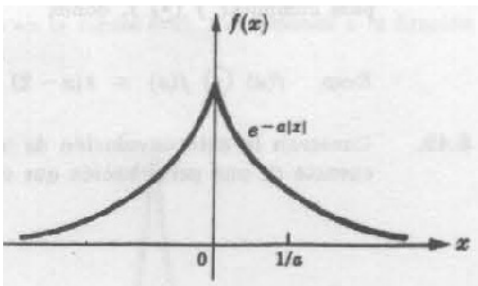
Para trazar este espectro complejo se puede escribirlo en términos de su magnitud y su fase, o sea : $\mathcal{F}\{E(x)\} = F(k) = |F(k)|\, e^{i\varphi(k)}$, y luego trazar cada una de ellas por separado. Con este fin se multiplica arriba y abajo por (*a* – *ik*)* , lo que da :

$$F(k) = \frac{a+ik}{(a-ik)(a+ik)} = \frac{a}{a^2+k^2} + i\,\frac{k}{a^2+k^2}.$$

Entonces: $$|F(k)|^2 = \left(\frac{a}{a^2+k^2}\right)^2 + \left(\frac{k}{a^2+k^2}\right)^2$$ $$\tan\varphi(k) = \left(\frac{k}{a^2+k^2}\right)\Big/\left(\frac{a}{a^2+k^2}\right)$$ y $$\mathcal{F}\{E(x)\} = \frac{1}{\sqrt{a^2+k^2}}\, e^{i\tan^{-1}(k/a)}$$

Las gráficas de magnitud y fase son: 

Pr. 2-23. Calcula la transformada de Fourier del pulso:



Resp. $\mathcal{F}_C\,\{f(x)\} = \frac{2a}{a^2+k^2}$

Pr. 2-24. Calcula el espectro en frecuencia de una onda armónica modulada por una función g(t), o sea una onda de la forma: $g(t)\cos(2\pi\nu_1 t)$

Resp. Llamando $G(v)$ la transformada de Fourier de $g(t)$, se ha:

$$\begin{aligned}F(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\cos(2\pi v_1 t)\exp(-2\pi \mathrm{i} v t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\frac{1}{2}\{\exp[-2\pi\mathrm{i}(v-v_1)t]+\exp[-2\pi\mathrm{i}(v+v_1)t]\}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}G(v-v_1)+\frac{1}{2}G(v+v_1)\end{aligned}$$

Pr. 2-25. ¿Cómo tienen que ser las polarizaciones de dos ondas electromagnéticas monocromáticas, para que éstas se sumen de modo que la irradiancia total sea igual a la suma de sus irradiancias por separado?

Resp. Pueden ser por ejemplo polarizaciones lineales ortogonales (por ejemplo una polarizada horizontal y la otra verticalmente), o también polarizaciones circulares con giro opuesto.

Pr. 2-26. Dos ondas de la misma amplitud, velocidad y frecuencia se superponen en una región del espacio de manera que la perturbación resultante es

$$\psi(y,t) = A\cos(ky+\omega t) + A\cos(ky-\omega t+\pi)$$

Utilizando exponenciales complejas demostrar que

$$\psi(y,t) = -2A \operatorname{sen} ky \operatorname{sen} \omega t$$

esto se conoce como una *onda estacionaria*.

Resp. Se puede replantear la función de onda si se tiene en cuenta que solamente interesa la *parte real*, en la siguiente forma

$$\begin{aligned}\psi(y,t) &= A[e^{i(ky+\omega t)} + e^{i(ky-\omega t+\pi)}] \\ &= Ae^{iky}[e^{i\omega t} + e^{i\pi}e^{-i\omega t}]\end{aligned}$$

Ahora, por la fórmula de Euler, $e^{i\pi} = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1$; por tanto

$$\psi(y,t) = Ae^{iky}[e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}] = Ae^{iky}\, 2i \operatorname{sen}\omega t$$

y así

$$\psi(y,t) = A(2i\cos ky \operatorname{sen}\omega t - 2\operatorname{sen} ky \operatorname{sen}\omega t)$$

La parte real de esta función de onda es $\psi(y,t) = -2A \operatorname{sen} ky \operatorname{sen}\omega t$.

Pr. 2-27. Una onda estacionaria es producida por la superposición de una onda e.m., de amplitud A y número de ondas igual a 4, con su reflexión. Encuentra la expresión de la onda resultante.

Pr. 2-28. Dado el siguiente campo electromagnético:

$$\mathbf{E}(x,y,t) = E_0\cos(\pi x/L)\cos(\pi y/L)\sin\omega t\ \hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{B}(x,y,t) = B_0\Big[-\cos(\pi x/L)\sin(\pi y/L)\,\hat{\mathbf{i}} + \sin(\pi x/L)\cos(\pi y/L)\,\hat{\mathbf{j}}\Big]\cos\omega t$$

(a) Muestra que es solución de las ecuaciones de Maxwell en el vacío si es $\omega = 2^{½}\pi c/L$ y $B_0 = E_0/2^{½}c$

(b) Haz un dibujo de la onda en la región 0 < x < L, 0 < y < L. ¿Qué tipo de onda es? Determina el número de onda y la longitud de onda.

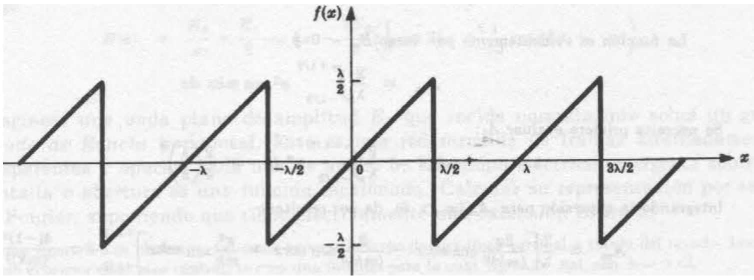
***Problemas con series (reales) de Fourier.**

Nota: Dada una función periódica *f*(*t*) de periodo T, ésta se puede expresar como:

$$f(t)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t)\right)\quad \text{con } \omega_0=\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\quad \text{y:}$$

$$a_n=\frac{2}{\mathrm{T}}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos(n\omega_0 t)dt\ ,\quad b_n=\frac{2}{\mathrm{T}}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

***Pr. 2-29**. Deducir la serie de Fourier que representa la función periódica dibujada a continuación:



Resp. Dado que la función (restringida al intervalo de –λ/2 a +λ/2) es *f*(*x*) = *x*, que es una función impar, los coeficientes *A* son nulos: $A_m = 0$. Para los coeficientes *B*:

$$B_m = \frac{2}{\lambda}\int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} x\ \text{sen}\, mkx\ dx = \frac{2}{\lambda}\left[\frac{\text{sen}\, mkx}{(mk)^2}-\frac{x\cos mkx}{mk}\right]_{-\lambda/2}^{\lambda/2} = -\frac{2}{mk}\cos m\pi$$

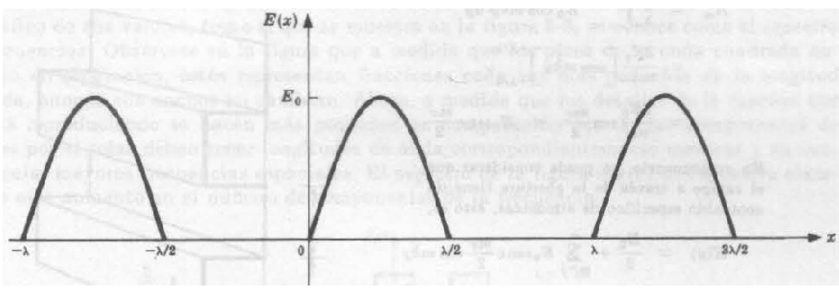
Así pues: $f(x) = \frac{2}{k}\left(\text{sen}\, kx - \frac{1}{2}\,\text{sen}\, 2kx + \frac{1}{3}\,\text{sen}\, 3kx - \cdots\right)$

***Pr. 2-30**. Calcula la serie de Fourier de la función rectangular periódica *E*(*y*) de periodo 2b y que vale 1 en el intervalo de –b/2 a +b/2, cero en los intervalos [–3b/2 ; –b/2] y [b/2 ; 3b/2] y así sucesivamente.

Resp. Por la paridad de la función restringida al intervalo indicado, sólo los coeficientes A son distintos de cero: $A_m = \frac{2}{\lambda}\int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4} E_0\cos mky\, dy = \frac{2E_0}{m\pi}\,\text{sen}\,\frac{m\pi}{2} = E_0\,\text{senc}\,\frac{m\pi}{2}$

Entonces: $E(y) = \frac{E_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} E_0\,\text{senc}\,\frac{m\pi}{2}\cos mky$

***Pr. 2-31**. Computar la representación por serie de Fourier de la función sinusoidal de rectificación de media onda de la figura siguiente (este tipo de perfil de oscilación se obtiene por ejemplo cuando se aplica una corriente alternada armónica a un diodo):



Esta vez la función, con el eje vertical en la posición dada, no es ni par ni impar. Se tiene:

$$A_m = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda/2} E_0 \operatorname{sen} kx \cos mkx \, dx$$

$$= \frac{2E_0}{\lambda}\left[-\frac{\cos k(1-m)x}{2k(1-m)} - \frac{\cos k(1+m)x}{2k(1+m)}\right]_0^{\lambda/2}$$

excepto cuando $m = 1$, en cuyo caso la integral es cero (esto es, $A_1 = 0$). Continuando,

$$A_m = \frac{2E_0}{\lambda}\left\{-\frac{\cos[\pi(1-m)] - 1}{2k(1-m)} - \frac{\cos[\pi(1+m)] - 1}{2k(1+m)}\right\}$$

que es cero para m impar y da por resultado

$$A_m = \frac{E_0}{\pi}\left[\frac{1}{1-m} + \frac{1}{1+m}\right]$$

para m par. Análogamente,

$$B_m = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda/2} E_0 \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} mkx \, dx$$

que a causa de los límites es cero para todo valor de $m \neq 1$. Sin embargo cuando $m = 1$,

$$B_1 = \frac{2E_0}{\lambda}\left[\frac{x}{2}\right]_0^{\lambda/2} = \frac{E_0}{2}$$

Luego

Resp.

$$E(x) = \frac{E_0}{\pi} + \frac{E_0}{2}\operatorname{sen} kx - \frac{2E_0}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 2kx + \frac{1}{15}\cos 4kx + \cdots\right)$$

***Pr. 2-32**

Calcular la representación en serie de Fourier de la función periódica

$$f(x) = \begin{cases} +1 \text{ cuando } 0 < x < \lambda/2, \text{ etc.} \\ -1 \text{ cuando } \lambda 2 < x < \lambda, \text{ etc.} \end{cases}$$

como se muestra en la figura 8-2.

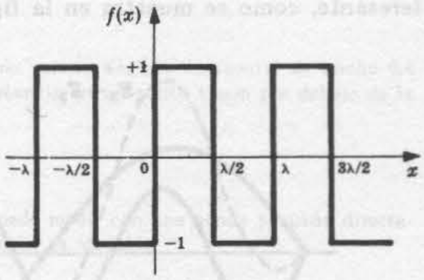


Fig. 8-2

Evidentemente $f(x)$ es impar y en consecuencia todos los términos en coseno están ausentes; $A_m = 0$. Los coeficientes B_m se computan a partir de

$$B_m = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda} f(x) \operatorname{sen} mkx \, dx$$

lo cual después de una sustitución del valor real de $f(x)$ resulta

$$B_m = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda/2} (+1) \operatorname{sen} mkx \, dx + \frac{2}{\lambda}\int_{\lambda/2}^{\lambda} (-1) \operatorname{sen} mkx \, dx$$

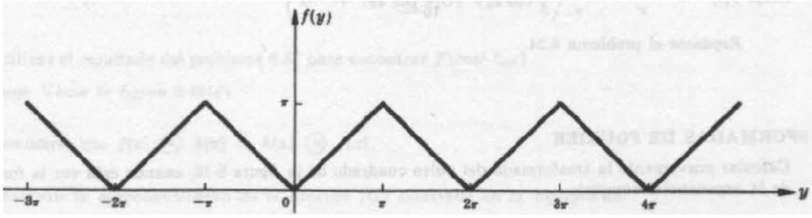
$$= \frac{1}{m\pi}\left[-\cos mkx\right]_0^{\lambda/2} + \frac{1}{m\pi}\left[\cos mkx\right]_{\lambda/2}^{\lambda} = \frac{2}{m\pi}(1 - \cos m\pi)$$

En otros términos, $\quad B_1 = \frac{4}{\pi}, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \frac{4}{3\pi}, \quad B_4 = 0, \quad$ etc.

y la serie buscada es

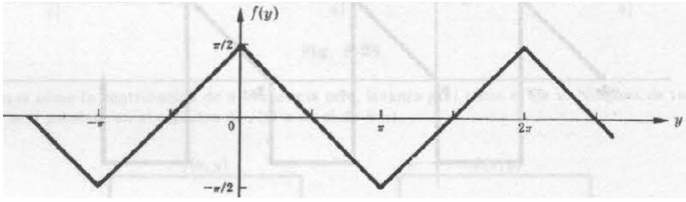
$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} kx + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3kx + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5kx + \cdots\right)$$

A propósito, si la función tiene el mismo aspecto por encima y debajo del eje, su representación por una serie contendrá solamente *armónicos impares*, esto es, solamente múltiplos impares de k, *Pr. 2-33. Computar la serie de Fourier de la función:



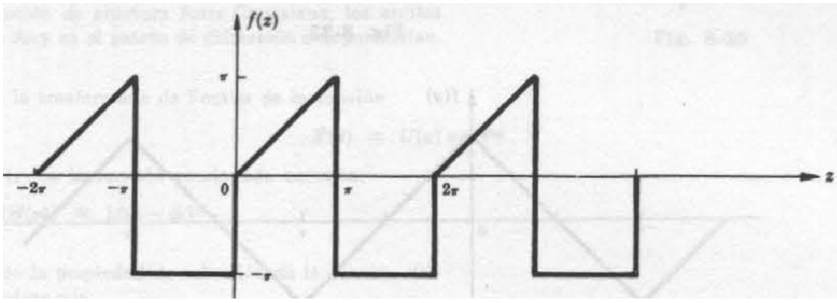
Resp. $$f(y) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos y}{1^2} + \frac{\cos 3y}{3^2} + \frac{\cos 5y}{5^2} + \cdots\right)$$

***Pr. 2-34**. Calcula la serie de Fourier de la función periódica:



Resp. $$f(y) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos y}{1^2} + \frac{\cos 3y}{3^2} + \cdots\right)$$

***Pr. 2-35**. Deducir la serie de Fourier de la función dibujada:



Resp. $$f(z) = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos z}{1^2} - \frac{2}{\pi}\frac{\cos 3z}{3^2} - \cdots + 3\,\mathrm{sen}\,z - \frac{1}{2}(\mathrm{sen}\,2z) + \frac{1}{3}(3\,\mathrm{sen}\,3z) - \cdots$$