

Tecnología de la Ilum

roberto.macovez@upc.edu despacho 11.45 (planta 11)

Consulta: LUN 11-13 y 15-17; MIE 16-18 ; VIE 11-13

- 1) la naturaleza de la luz y los fenómenos ópticos
- 2) aplicaciones tecnológicas:
 - fuentes (antenas, incandescencia, luminiscencia, láser)
 - espejos, lentes, rejillas de difracción, capas antirreflejo
 - instrumentos ópticos (lupa, el ojo, la cámara, telescopio, microscopio)

 - análisis de imagen, técnicas de microscopía, visión humana
 - semiconductores y optoelectrónica: LED, diodo láser, celdas solares, fotodiodo, pantallas, CCD
 - teoría y aplicaciones del láser (holografía, DVD, medicina, materiales...)
 - fibras ópticas y telecomunicaciones

 - si queda tiempo: un vistazo a las aplicaciones futuras: óptica integrada, plasmónica, cristales fotónicos y metamateriales, invisibilidad ...

Estructura de la asignatura (1ª mitad)

1) **Introducción: qué es la luz**

2) **La matemática de las ondas**

- Notación compleja
- Ondas monocromáticas planas y esféricas
- Transformada de Fourier
- Interferencia y difracción

3) **Fuentes de luz**

- Clasificación de las fuentes electromagnéticas
- Antenas
- Fuentes luminiscentes
- Fuentes incandescentes (cuerpo negro)

4) **Los fenómenos ópticos**

- Interacción microscópica con la materia: emisión, absorción y esparcimiento
- Luz en un aislante o conductor, scattering plasma y Rayleigh, velocidad de fase y de grupo
- Reflexión y refracción

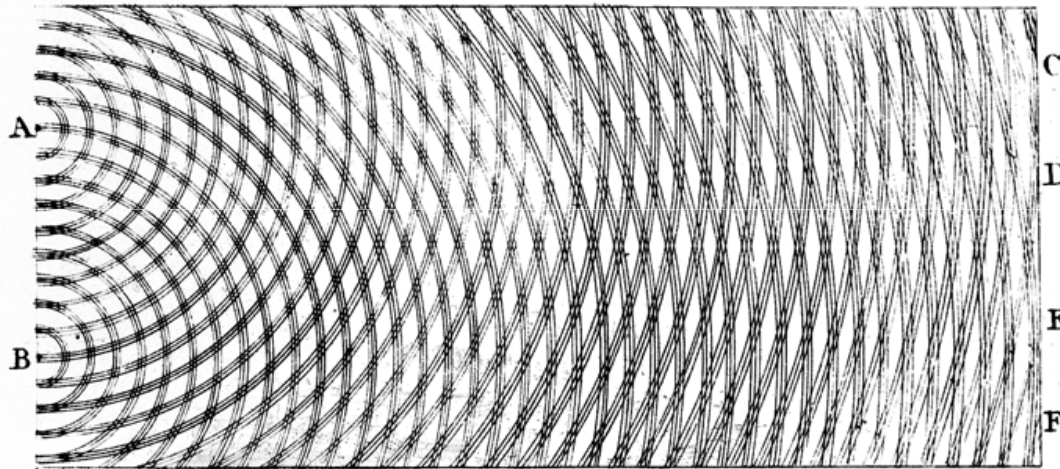
5) **Óptica geométrica e instrumentos ópticos**

Evaluación: $0,2 \text{ EvC} + 0,2 \text{ TEST} + 0,2 \text{ informe} + 0,4 \text{ EF}$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{40\%}$ 20% 40%

¿Qué es la luz? (TEMA 1)

- Siglos XVII y XVIII:
 - 1609: Galileo desarrolla y usa el telescopio para mirar la luna, Júpiter, los astros
 - 1676: Rømer demuestra que la luz se propaga con velocidad finita ($c \approx 2.2 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$)
 - 1690, 1704: Controversia Huygens – Newton: ¿ luz = onda o partículas?
- 1801: experimento de la doble rendija de Young (interferencia)



- 1808: Malus describe el comportamiento de la polarización de la luz (onda transversal)
- 1845: Faraday encuentra que un campo magnético puede variar la polarización de la luz que se propaga en un material → relación luz – magnetismo ?
- 1850 y 1862: Primero Fizeau y luego Foucault miden c . El 2º encuentra $2.98 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$
- 1873: Maxwell descubre que sus ecuaciones predicen la existencia de *ondas electromagnéticas* que se propagan en el vacío

Luz : onda electromagnética

Ec. de Maxwell $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ \Rightarrow $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$
 (en el vacío) $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ \Rightarrow $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$

Utilizando la identidad vectorial: $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V}$ se obtiene la:

Ecuación de ondas e.m.

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Velocidad de propagación:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3.0 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$$

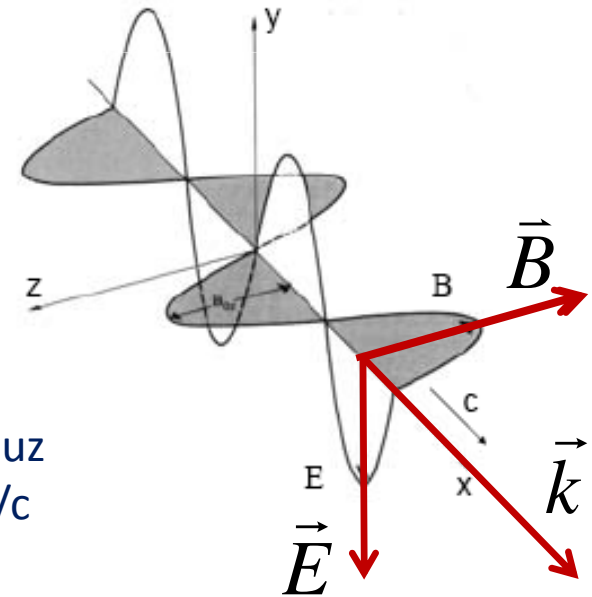
$$c = 1 / \sqrt{(8.85 \cdot 10^{-12} \text{ s}^2 \text{C}^2 \text{m}^{-3} \text{kg}^{-1})(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ mkgC}^{-2})}$$

En 1D: $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$ solución particular $\rightarrow y(x,t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$
 con $\omega/k = \lambda v = c$

En 3D k e y son vectores: $\vec{Y}(\vec{r}, t) = \vec{A} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}, \vec{k} \perp \vec{B}, \vec{B} \perp \vec{E}$$

- \rightarrow las ondas e.m. son transversales
- \rightarrow la dirección de \mathbf{E} se llama polarización de la luz
- \rightarrow el módulo de \mathbf{B} de una onda e.m. vale $B = E/c$



En un medio no conductor semitransparente (p.ej. aire, vidrio)

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_0 \rightarrow \epsilon_r \epsilon_0 \\ \mu_0 \rightarrow \mu_r \mu_0 \approx \mu_0 \end{array} \right. \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

con: $n = \sqrt{\epsilon_r} (= c/v)$
índice de refracción

*Propagación de la luz en un medio lineal e isótropo sin cargas libres ni corrientes (dieléctrico perfecto)

La descripción más simple (y no del todo correcta) de la propagación de una onda e.m. dentro de un material se puede hacer a través de las ecuaciones “macroscópicas” de Maxwell:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_c \end{cases} \xrightarrow{\text{(con } \vec{j}=0)} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}$$

Relaciones constitutivas en un medio lineal e isótropo:
 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$
 $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Esta es la ecuación de una onda que se propaga con velocidad: $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} c_0 = \frac{c_0}{n}$
 con $n = \sqrt{\epsilon_r} =$ **índice de refracción**

Entonces el efecto del medio se resume en una redefinición de la velocidad de la onda y de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} . Ya que la energía se conserva, y la energía de un fotón es su frecuencia (a menos de una constante, la frecuencia de la luz no varía básicamente nunca

Al cambiar de medio varía la velocidad de propagación, pero no la frecuencia \Rightarrow cuando varía el índice de refracción, **tiene que variar la longitud de onda ($\omega = \text{const}$)** L&C Ej. p. 503

ϵ_r se define en electrostática como “constante” dieléctrica. Si ϵ_r es constante, n también lo es, lo que daría una velocidad de propagación que no depende de la frecuencia. Esto vale sólo para ondas de frecuencias bajas, mientras que **para frecuencias ópticas n es una función de ω .**

Luz : energía electromagnética

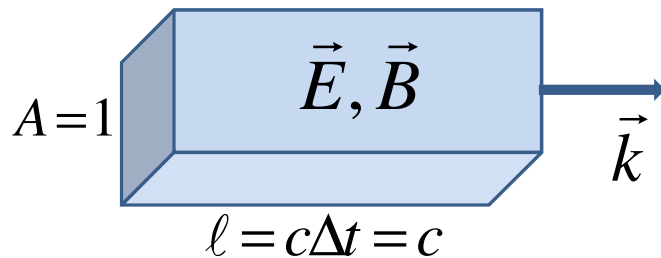
Densidad de energía (u) asociada a campos \mathbf{E} o \mathbf{B} : $u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$; $u_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2$

LUZ = campo e.m. oscilante ;
 en el espacio vacío : $B = E/c \Rightarrow u_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0} \frac{E^2}{c^2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = u_e \Rightarrow u_{e.m.} = \epsilon_0 E(t)^2$

En realidad no nos interesa el valor instantáneo: luz visible: $\lambda \sim 500 \text{ nm} \rightarrow \omega, \nu \sim 10^{15} \text{ Hz}$, no se puede medir el valor instantáneo de \mathbf{E} , y aún menos el de \mathbf{S} !!! Sólo podemos medir valores promedios en el tiempo de la energía, que denotamos con $\langle u \rangle$. Ej.: onda monocromática:

$$u_{e.m.} = \epsilon_0 E(t)^2 = \epsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t) \Rightarrow \langle u_{e.m.} \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \quad \langle \rangle = \text{promedio temporal}$$

Flujo de energía por área unitaria = energía transportada por unidad de tiempo y superficie :



Para una onda plana en el espacio vacío:

$$\Delta V = lA = c$$

$$\Delta U_{A=1, \Delta t=1} = \langle u_{em} \rangle \Delta V = c \langle u_{em} \rangle = \Phi_u$$

El flujo es en la dirección de \mathbf{k} . Vectorialmente puede escribirse:

\vec{S} = **vector de Poynting**

$$\vec{S} = \Phi_u \vec{k} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

La energía promedio que fluye por unidad de tiempo y superficie se llama **irradiancia (I)** , y es igual al valor medio temporal del módulo de \vec{S} . Para una onda e.m. monocromática es:

$$I = \langle S \rangle = c \langle u_{e.m.} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

1-19

NOTA: la luz transporta no solo energía, sino también momento lineal y momento angular

*Teorema de la energía electromagnética

Multiplicando escalarmente por \vec{E} la ecuación de Maxwell $\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, se halla:

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad . \quad \text{Por la identidad vectorial } \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad , \quad \text{se tiene :}$$

$$\epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = -\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) \quad \left(\text{se ha usado también } \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

Con la definición de vector de Poynting $\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$, la ecuación anterior puede escribirse:

$$\epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right] = \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \quad . \quad \text{Ya que:}$$

$\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 \rightarrow$ densidad energía eléctrica
 $\frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \rightarrow$ densidad energía magnética

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} u_{em} = \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \quad \rightarrow \quad \text{teorema de Poynting (en el vacío)} \\ \rightarrow \text{conservación de la energía electromagnética}$$

En forma integral (integrando sobre el volumen) :

$$\frac{\partial}{\partial t} U_{em} = \int dV \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \Phi_{\vec{S}}$$

→ la variación de energía electromagnética (en el vacío) es igual al flujo del vector de Poynting

$\vec{k} // \vec{S} \quad \rightarrow$ Una onda e.m. transporta energía en la dirección de propagación

Valor medio del módulo del vector de Poynting = **irradiancia (I) = flujo de energía por área y tiempo unitarios.** Onda monocromática :

$$\langle S \rangle = \frac{\langle EB \rangle}{\mu_0} = \frac{\langle E^2 \rangle}{\mu_0 c} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 = I$$

Tipos de luz e interacción luz-materia

- 1887: Hertz genera y detecta ondas e.m. en el laboratorio (antenas)
- 1875-1895: descubrimiento de los rayos X (y luego gamma)
- 1896: invención de la radio; primeras “fotos” con rayos X

→ **Espectro electromagnético**

velocidad c , ondas armónicas: $\lambda \nu = c$

la frecuencia/longitud de onda están asociadas con el **COLOR**

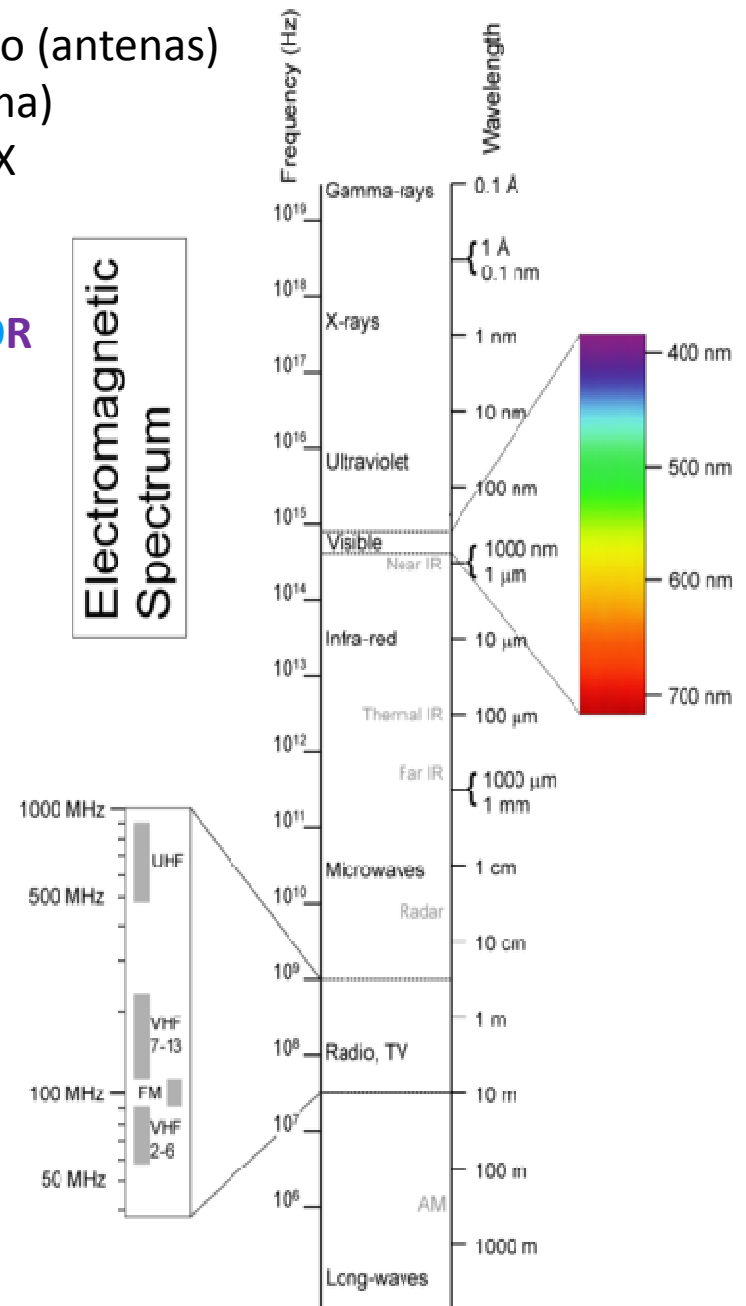
- Siglo XIX: descubrimiento que la luz emitida por un gas está formada de pocos colores
- 1901: Planck introduce la cuantización de la energía de las ondas e.m. para explicar la radiación térmica
- 1905: Einstein explica el efecto fotoeléctrico asociando a la radiación e.m. de frecuencia ν una energía $E = h\nu$ donde $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J s se llama constante de Planck
- 1920-1960: desarrollo de la teoría cuántica
- 1960: invención del láser

LUZ = campo electromagnético variable en el tiempo (onda e.m.), generado por el movimiento de cargas eléctricas, que es emitido o adsorbido en paquetes discretos de energía

1-17, 1-23



1-7,1-15,1-22



La matemática de las ondas (TEMA 2)

Números complejos: un "juego" matemático muy útil

Sabemos que la solución de $ax^2 + bx + c = 0$ es $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Esta solución funciona si $b^2 - 4ac \geq 0$, porque si no, no sabemos sacar la raíz. P. ej. para las ecuaciones $\frac{1}{2}x^2 - x + 1 = 0$, o $x^2 + 4 = 0$ no existe solución. Aún así, "formalmente" se podrían aceptar las soluciones simbólicas

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-1}$ o $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{-1}$, ya que p.ej.: $x = 2\sqrt{-1} \Rightarrow x^2 = 4\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = 4\sqrt{(-1) \cdot (-1)} = 4\sqrt{1} = 4$
 e igualmente $x_1 = 1 + \sqrt{-1} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-1})^2 = \frac{1}{2}(1^2 + (\sqrt{-1})^2 + 2\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}(1 - 1 + 2\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}$

(así que efectivamente es $\frac{1}{2}x_1^2 - x_1 + 1 = 0$). **Se utiliza el símbolo i para indicar $\sqrt{-1}$**

Si aceptamos como válidos números de la forma $a + ib = a + b\sqrt{-1}$, entonces el problema que con números reales $x^2 + 1 = 0$ no tenía solución, ahora sí la tiene: estamos preguntando si existe un número $a + ib$ tal que $(a + ib)^2 = -1 = -1 + 0i$ (de hecho hay dos, $+i$ y $-i$)

Un número de la forma $z = a + ib$, con $i = \sqrt{-1}$ (o $i^2 = -1$) se llama

número complejo :

$$z = a + ib$$

$$a = \text{Re}\{z\}$$

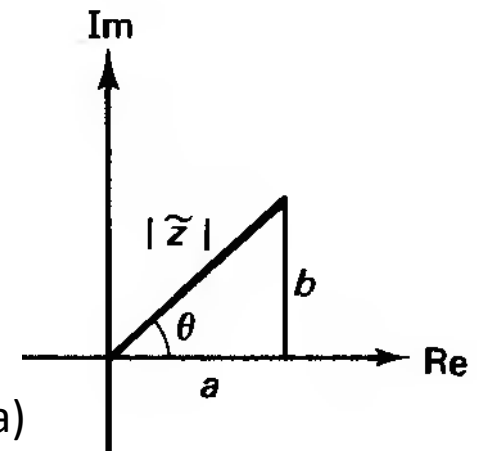
parte "real" de z

$$b = \text{Im}\{z\}$$

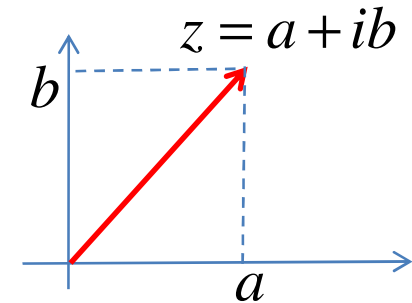
parte "imaginaria" de z

z se puede representar como vector 2D en el "plano complejo"
 (tal como un número real se puede representar como punto de una recta)

También se puede pensar y definir z como el par ordenado (a, b)



Del (vector o par ordenado) z podemos definir el módulo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y la dirección: $\hat{z} = \frac{z}{|z|} = \frac{a+ib}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \theta + i \sin \theta$



Dado el número complejo $z = a + ib$, se define su “conjugado” como: $z^* = a - ib$

Dos números complejos se pueden sumar y multiplicar:

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d) \quad (i^2 = -1)$$

$$(a+ib) \cdot (c+id) = (ac-bd) + i(bc+ad)$$

la representación gráfica de z se llama “fasor”

Podemos entonces también elevar a potencia y sacar raíces (en este último caso la operación no es unívoca (p.ej., existen 2 raíces complejas de -1, como existen dos soluciones reales de $x^2 = 9$). Además podemos definir funciones. La única que nos hará falta es la

función exponencial compleja: $e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib}$

Si z es real ($b=0, z=a$), esto es igual a la exponencial real e^a . Para z imaginario ($a=0, z=ib$) vale la

identidad de Euler: $e^{ib} = \cos b + i \sin b$

Cálculo de $\cos(2\omega)$, 2-2



2-3, 2-4, 2-5

La identidad de Euler es una relación sorprendente entre exponencial (complejo) y funciones sinusoidales. Para demostrarla, escribimos $q = \cos b + i \sin b$ y tomamos el diferencial (derivamos):

$$dq = -\sin b db + i \cos b db = i(\cos b + i \sin b) db = i q db, \text{ o sea: } \frac{dq}{q} = i db. \text{ Integrando pues: } q = e^{ib}$$

Esto implica que un número complejo puede escribirse como $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|e^{i\theta}$

Un número complejo de módulo 1, de la forma $\hat{z} = e^{i\theta}$, es una “dirección” en el plano complejo

Notación compleja. Veamos ahora la utilidad de la exponencial compleja. En mecánica y electromagnetismo encontramos ecuaciones diferenciales lineales de la forma $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Buscamos soluciones del estilo: $x(t) = Ae^{\kappa t}$. Esto da $\dot{x}(t) = A\kappa e^{\kappa t}$ y $\ddot{x}(t) = A\kappa^2 e^{\kappa t}$

Substituyendo en la ecuación diferencial: $Ae^{\kappa t} \kappa^2 + 2\gamma A\kappa e^{\kappa t} + \omega_0^2 A e^{\kappa t} = 0$, y simplificando $Ae^{\kappa t}$, obtenemos: $\kappa^2 + 2\gamma\kappa + \omega_0^2 = 0$. Las soluciones para κ son:

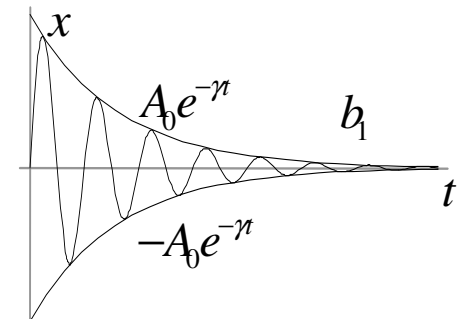
$$\kappa_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm \beta$$

Si $\gamma > \omega_0$: β es real; se tiene la solución "sobre-amortiguada": $x(t) = A_1 e^{-(\gamma-\beta)t} + A_2 e^{-(\gamma+\beta)t}$

Si $\gamma < \omega_0$: β es imaginario; poniendo $\beta = i\omega$ encontramos:

$$x_1(t) = A_1 e^{-(\gamma-i\omega)t} = A_1 e^{-\gamma t} e^{i\omega t} = A_1 e^{-\gamma t} (\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

Tomando la parte real de esta solución compleja, se obtiene una solución oscilatoria ("sub-amortiguada"): $x_1(t) = A_1 e^{-\gamma t} \cos \omega t$ →



Una ventaja de la notación compleja: Una onda armónica se escribe: $E(x, t) = \text{Re}\{E_0 e^{i(kx - \omega t)}\}$
 No hace falta poner explícitamente una fase inicial, porque se puede englobarla en la amplitud:
 $E_0 e^{i(kx - \omega t + \varphi_0)} = E_0 e^{i\varphi_0} e^{i(kx - \omega t)} = \tilde{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}$, donde $\tilde{E}_0 = E_0 e^{i\varphi_0}$ es la **amplitud compleja** de la onda

Con la notación compleja no sólo podemos encontrar soluciones a ecuaciones de oscilaciones y ondas, o escribir ondas armónicas, sino hacer cálculos de forma sencilla con senos y cosenos:

2-6 Calcula la suma: $\cos\theta + \cos(\theta + \alpha)$. (podría ser la interferencia de dos ondas en 1D)

Con la notación compleja, esta cantidad es la parte real de $\psi = \exp(i\theta) + \exp[i(\theta + \alpha)]$

$$\tilde{\psi} = \exp(i\theta) + \exp[i(\theta + \alpha)] = \exp(i\theta)[1 + \exp(i\alpha)] = \exp(i\theta) \exp(i\alpha/2)[\exp(-i\alpha/2) + \exp(i\alpha/2)] = \exp[i(\theta + \alpha/2)] 2 \cos(\alpha/2).$$

Por tanto: $\cos\theta + \cos(\theta + \alpha) = \text{Re}[\psi] = 2 \cos(\alpha/2) \cos(\alpha/2 + \theta)$

Ondas planas

Para una onda plana que se propaga en la dirección \hat{k} , los frentes de onda son planos (en 3D), o rectas (en 2D), ortogonales a \hat{k} (dibujo). En 2D un punto P de la onda de coordenadas $\vec{r} = (x,y)$ y cualquier otro punto sobre la recta que pasa por P paralela a los frentes de onda, tiene la misma fase que el punto P_0 , que está sobre la recta que sale del origen en dirección \hat{k} . Si φ_0 es la fase en el origen, la fase en P_0 y P es:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \overline{OP_0} + \varphi_0$$

siendo λ la longitud de onda. El segmento $\overline{OP_0}$ es la proyección de \vec{r} sobre \hat{k} , y puede escribirse como producto escalar entre estos dos vectores. Así:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0 = \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0$$

Aquí se ha definido el **vector de onda**:

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{k}$$

⇒ El campo óptico de una onda plana es pues (la parte real de):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0)]$$

Onda plana

La dirección de \vec{E}_0 se llama dirección de polarización. La onda se propaga con velocidad $v_f = \omega/k$ (dicha "de fase"), siendo k el módulo del vector de onda

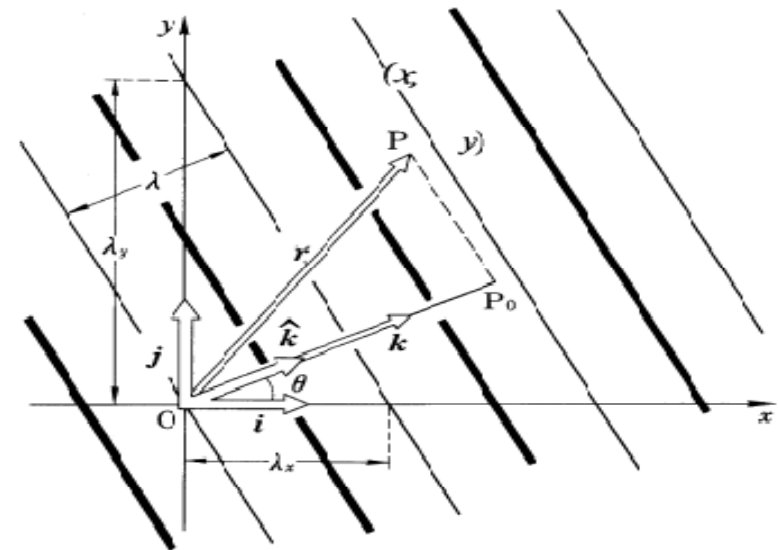
2-10,2-15



2-11,2-13

NOTAS IMPORTANTES:

- 1) Siendo $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$, la parte real de una onda compleja no cambia si el exponente (fase total) cambia de signo. **Por convención se pone siempre el signo - delante de ω**
- 2) Para calcular la **irradiancia**: **hay que tomar la parte real de E antes de elevar al cuadrado**, ya que: $\text{Re}\{z^2\} \neq (\text{Re}\{z\})^2$



Ondas esféricas

Una fuente puntual genera una onda esférica. Cualquier fuente se puede considerar formada por un conjunto de fuentes puntuales \Rightarrow las ondas esféricas juegan un papel importante en óptica

Tomemos una fuente puntual que oscila de forma armónica, proporcional a $e^{-i\omega t}$

La onda tarda un tiempo r/c para llegar a una superficie esférica de radio r alrededor de la fuente. La fase en todo punto de la superficie esférica al instante t es la misma que la de la fuente al tiempo $t - r/c$, y la intensidad es la misma en cada punto de la esfera. El módulo del campo \mathbf{E} en cada punto de la esfera es: $E(r, t) = E(r) \exp[-i\omega(t - r/c)] = E(r) \exp[i(kr - \omega t)]$

Aquí hemos utilizado el módulo del vector de onda: $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$

Para determinar el valor de $E(r)$. Para ello, consideremos la potencia W emitida por la fuente.

Por la conservación de la energía, la potencia que atraviesa una esfera alrededor de la fuente es independiente del radio, o sea: $W = 4\pi r^2 I(r) = 4\pi r^2 \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$. Por tanto $E(r) = \frac{E_0}{r}$, siendo E_0 el módulo del campo óptico a una distancia de 1 metro de la fuente. Se obtiene así:

$$E(r, t) = \frac{E_0}{r} \exp[i(kr - \omega t + \varphi_0)]$$

Onda esférica

No hemos especificado la dirección del campo \mathbf{E} , pero a menudo no hace falta. Una fuente puntual como un filamento pequeño (a distancia suficiente) no tiene coherencia temporal: la fase y la polarización de la luz emitida varían rápidamente (en un tiempo inferior a 10^{-9} s), así que no tiene sentido hablar de una dirección de polarización (hay fuentes puntuales coherentes, p. ej. antenas pequeñas, como veremos en detalle más adelante)

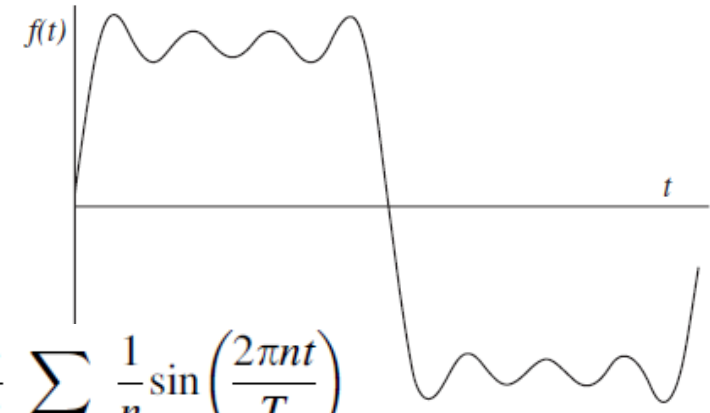


*Serie de Fourier real y compleja

Cualquier onda periódica se puede escribir como suma de ondas armónicas (síntesis de Fourier):

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \quad \text{con } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{y:}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$



$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

P. ej. en el caso de una onda cuadrada, la suma de tan sólo los primeros 3 términos es suficiente para obtener el perfil aproximado de la onda!

Se puede hacer lo mismo en notación compleja, sólo que aparecen peculiaridades matemáticas. La frecuencia o pulsación de una onda es siempre positiva. Sin embargo, en notación compleja necesitamos introducir frecuencias auxiliares negativas y los coeficientes son en general complejos. Ej.:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad ; \text{ o también: } \sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

Más en general, cualquier onda periódica de periodo T puede expresarse como serie de Fourier compleja :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad \text{con } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{y } c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

(el factor 1/T es de normalización, como se ve considerando el caso $f(t) = e^{i\omega_0 t} \rightarrow c_1 = 1$).

Las frecuencias que aparecen en el desarrollo en serie de Fourier de una función periódica forman su **espectro de frecuencias** . Los coeficientes complejos permiten tener en cuenta del desfase relativo entre las componentes armónicas (fase compleja del coeficiente = desfase).

Trasformada de Fourier

Se puede hacer algo parecido a una suma de Fourier también con una función no periódica (pero finita y limitada): una tal función resulta en general de la suma de un conjunto continuo de frecuencias, que no son múltiplos de una frecuencia fundamental. La generalización de la serie de Fourier al caso continuo es simplemente:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

El espectro de frecuencias es dado por la función amplitud (compleja) $A(\omega)$.

Interpretación: las componentes en frecuencia de una onda oscilan con períodos distintos.

Supongamos que la onda sea la suma de componentes de frecuencia $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$:

$$f(t) = A + B e^{-i\omega_1 t} + C e^{-i\omega_2 t} + D e^{-i\omega_3 t} + \dots$$

Cuando multiplicamos la onda por el factor $\exp(i\omega_1 t)$, la componente a frecuencia ω_1 (y sólo ella) “deja de oscilar”, de forma que cuando integramos en el tiempo (que es como promediar en el tiempo), sólo esta componente da una contribución distinta de cero mientras las demás, que siguen oscilando, dan una contribución promedia nula. Así, la integración que define cada coeficiente c_n o la amplitud $A(\omega)$ es equivalente a seleccionar la componente de la onda que oscila a una frecuencia determinada (la serie de Fourier se puede considerar como un caso especial de transformada de Fourier). Se demuestra que si la función $f(t)$ es real, $A(-\omega) = A^*(\omega)$, y viceversa. Por lo tanto toda la información sobre el espectro de frecuencia de un pulso (real) ya está contenida en la parte de frecuencias positivas.

La relación entre una función $f(t)$ y su espectro en frecuencia $F(\nu)$ es, en general, dada por los integrales:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) \exp(2\pi i \nu t) d\nu, \quad f(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-2\pi i \nu t) dt$$

Ejemplos de transformadas de Fourier

Puede calcularse la transformada de Fourier de un pulso temporal (\rightarrow espectro de frecuencias temporales ω) o de un perfil espacial (\rightarrow frecuencias “espaciales”, indicadas con k). En el vacío en 1D da lo mismo, ya que la onda es en tal caso función de la variable “conjunta” $x \pm vt$

2-18

Calcula el espectro de frecuencias de un pulso $g(t)$ rectangular dado por:

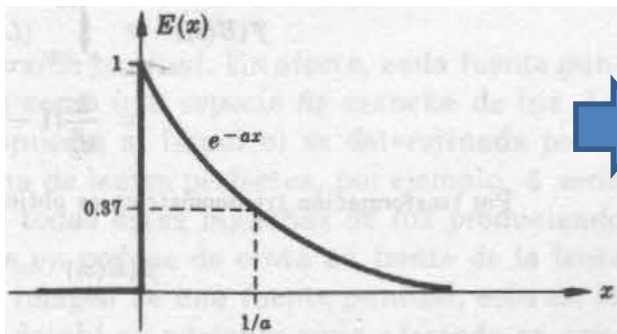
$$\begin{cases} g(t) = h \text{ for } \left(-\frac{1}{2}b < t < +\frac{1}{2}b\right) \\ g(t) = 0 \text{ elsewhere.} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} G(v) &= \int_{-b/2}^{+b/2} h \exp(-2\pi i v t) dt \\ &= \frac{h}{2\pi i v} \left[\exp\left(+2\pi i v \frac{b}{2}\right) - \exp\left(-2\pi i v \frac{b}{2}\right) \right] \\ &= hb \frac{\sin \psi}{\psi} = hb \operatorname{sinc} \psi, \quad \text{where } \psi = \pi v b. \end{aligned}$$

2-22

Calcula el espectro de $E(x) = U(x)e^{-ax}$

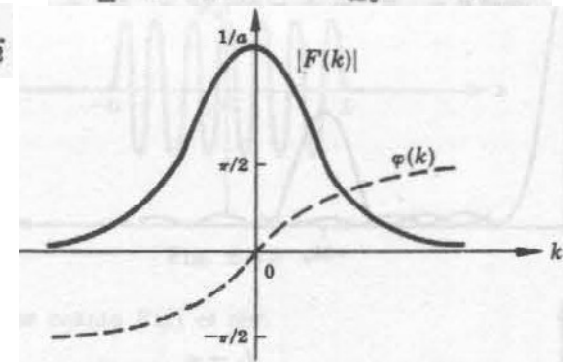


$$\mathcal{F}\{E(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{ikx} dx = \int_0^{\infty} e^{-(a-ik)x} dx = \left[-\frac{1}{a-ik} e^{-(a-ik)x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{a-ik}$$

$$F(k) = \frac{a+ik}{(a-ik)(a+ik)} = \frac{a}{a^2+k^2} + i \frac{k}{a^2+k^2}$$

$$|F(k)|^2 = \left(\frac{a}{a^2+k^2}\right)^2 + \left(\frac{k}{a^2+k^2}\right)^2$$

$$\tan \varphi(k) = \left(\frac{k}{a^2+k^2}\right) / \left(\frac{a}{a^2+k^2}\right)$$



Destello (pulso) con decaimiento exponencial

Módulo de $F(k)$ = peso relativo de cada componente de frecuencia

Fase de $F(k)$ = desfaseamiento relativo de cada componente



2-19,2-21,2-23


Interferencia

INTERFERENCIA : superposición de ondas
 → suma vectorial de **E** (y **B**)

{	1) ESPACIAL	misma frecuencia
	2) TEMPORAL	frecuencia diferente

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow I \propto \langle |\vec{E}|^2 \rangle = \langle \vec{E} \cdot \vec{E} \rangle = \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_1 \rangle + \langle \vec{E}_2 \cdot \vec{E}_2 \rangle + 2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle$$

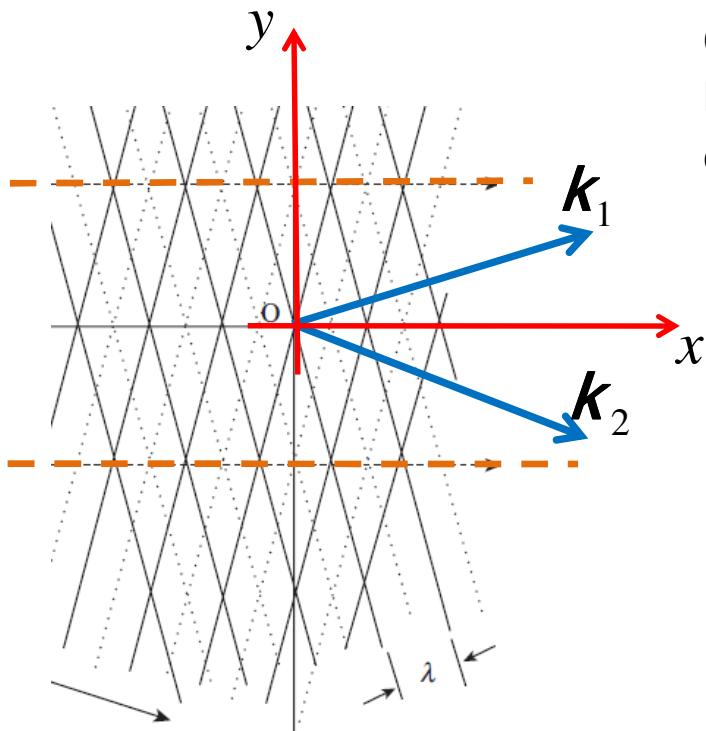
I_1 I_2 “correlación” entre 1 y 2


2-25

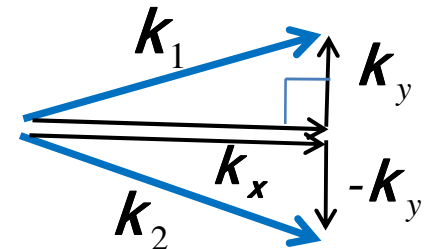
INTERFERENCIA ESPACIAL

CASO 1(a): dos ondas planas de igual frecuencia

y polarización, pero distinta dirección: $\vec{E}_1 = \vec{E}_0 \exp[i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)]$, $\vec{E}_2 = \vec{E}_0 \exp[i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)]$



Con el sistema de referencia dibujado, las componentes **x** de los vectores de onda son iguales, y las **y** opuestas:



El campo total $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ vale:

$$\vec{E}_0 \left(e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} + e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)} \right) = \vec{E}_0 e^{i(k_x x - \omega t)} \left(e^{ik_y y} + e^{-ik_y y} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = 2\vec{E}_0 \cos(k_y y) e^{i(k_x x - \omega t)}$$

La amplitud en **y** no depende del tiempo, y se anula en todos los puntos **r** en que: $k_y y = \pi(n + 1/2)$. Tales puntos forman las **franjas de interferencia**

La existencia del patrón de interferencia depende de que haya una componente antiparalela de los vectores **k**

Ondas estacionarias

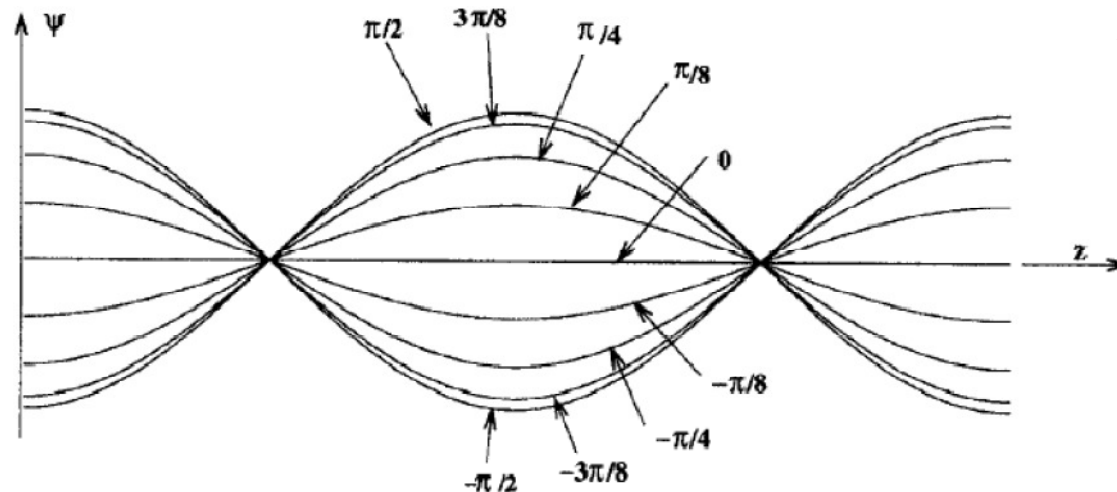
CASO 1(b): si dos ondas de la misma frecuencia se propagan en direcciones opuestas, se obtiene una onda estacionaria. Si 2 ondas de la misma amplitud se propagan una en la dirección positiva del eje z (+z), y la otra en -z, su suma es: $\psi = A \cos(kz - \omega t) + A \cos(-kz - \omega t)$

Con la ayuda de la notación compleja, se encuentra que la onda resultante tiene la expresión:

$$\tilde{\psi} = A \exp(-i\omega t) [\exp(-ikz) + \exp(ikz)] = 2A \cos kz \exp(-i\omega t)$$

→ 2-26

Mientras las ondas iniciales tienen amplitud A, su suma (que es una onda estacionaria y no depende de $z - vt$) tiene una amplitud dependiente de la posición $2A \cos kz$. En la figura de abajo se ven “instantáneas” de la onda estacionaria, en instantes separados por intervalos de tiempo de $1/16$ del periodo:



2-27, 2-28

Ondas electromagnéticas estacionarias se dan cerca de superficies reflectoras, p. ej. entre dos espejos planos paralelos. **La configuración de dos espejo paralelos es tan importante en óptica que tiene nombre propio: se le llama cavidad Fabry-Perot**. Además de tener otras aplicaciones importantes en interferometría y espectroscopia, es un elemento constitutivo del láser.

*Cavidades Fabry-Perot y modos de la luz

Tomemos dos espejos planos paralelos en aire. La luz entre los espejos será reflejada muchas veces antes de perder intensidad debido a la atenuación en aire o a la imperfección de los espejos. En general, para una periodo/frecuencia cualquiera de la onda e.m., la superposición de todas estas ondas de la misma frecuencia pero fase distinta será destructiva: en cada punto llegan reflexiones con fase arbitraria que se anularán mutuamente. Una onda de dicha frecuencia simplemente no puede existir, entre los dos espejos: si por ejemplo colocamos una fuente puntual de tal frecuencia entre los espejos, la fuente no puede irradiar en la dirección ortogonal a los espejos. Si por otro lado la separación entre espejos L es igual a un múltiplo del periodo, las ondas reflejadas se solapan perfectamente a la onda inicial; la frecuencia correspondiente sí puede propagarse.

Para describir las propiedades de una cavidad Fabry-Perot de longitud L , considérese la solución de las ecuaciones de Maxwell con dirección de propagación ortogonal a los espejos metálicos. Sabemos que en tal caso los campos E y B son paralelos a los espejos. Sin embargo, el campo eléctrico dentro de un metal tiene que ser nulo; esto implica que E es cero en la superficie y dentro de los dos espejos. Es decir: $\mathbf{E} = 0$ para $z = 0$ y $z = L$. Las únicas ondas (estacionarias) armónicas (sinusoidales) que cumplen esta condición se escriben

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \sin(k_n z) e^{-i\omega_n t}, \quad k_n = n \frac{\pi}{L}, \quad \omega_n = ck_n$$

Estas ondas se llaman **MODOS de la cavidad**

Interferencia temporal

CASO (2): suma de 2 ondas de distinta frecuencia, de pulsación $\omega + \Delta\omega$ y $\omega - \Delta\omega$, ambas de la misma amplitud a . El patrono de interferencia (suma) es:

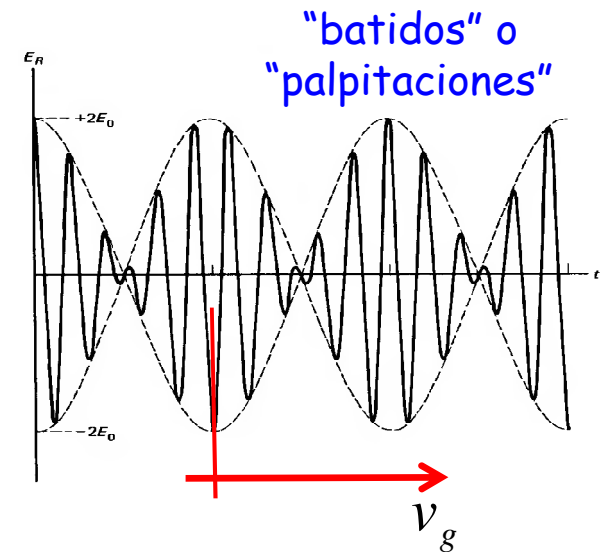
$$ae^{i[(\omega+\Delta\omega)t-(k+\Delta k)x]} + ae^{i[(\omega-\Delta\omega)t-(k-\Delta k)x]} = ae^{i\omega t - kx} \left(e^{i[(\Delta\omega)t-(\Delta k)x]} + e^{-i[(\Delta\omega)t-(\Delta k)x]} \right) = 2iae^{i\omega t - kx} \sin(\Delta\omega t + \Delta k x)$$

La parte real vale: $-2a \sin(\Delta\omega t - \Delta k x) \sin(\omega t - kx)$

La resultante es una onda de frecuencia ω con una modulación sinusoidal de la amplitud, como en el fenómeno de los batidos \rightarrow Una onda monocromática de frecuencia ω se propaga a la velocidad $v = \omega/k = c$. La modulación tipo “batidos”, o sea la modulación de amplitud $\sin(\Delta\omega t - \Delta k x)$, se mueve con velocidad

$v_g = \Delta\omega/\Delta k$, o en el límite $\Delta\omega \rightarrow 0$:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad \text{Velocidad de grupo}$$



No existen ondas armónicas infinitas: las ondas reales siempre están limitadas en el tiempo, es decir, tienen un ancho de banda no nulo. Toda onda e.m. es un “paquete” de ondas de distinta frecuencia, que no se propaga a la “velocidad de fase” $v_f = \omega/k = c/n$, sino con velocidad

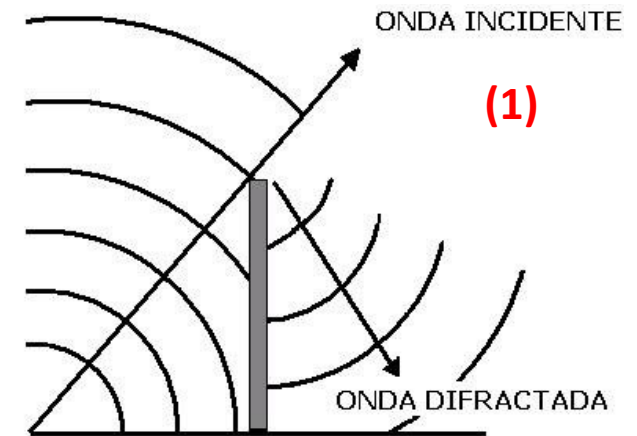
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv_f)}{dk} = v_f + k \frac{d(v_f)}{dk}$$

En el espacio vacío, la velocidad de fase no depende de $k \Rightarrow$ la velocidad de grupo es igual a la de fase. (Veremos que en un medio material la velocidad de fase sí depende de la frecuencia: ondas armónicas de frecuencia distinta se propagan con diferente velocidad, y por tanto $v_g \neq v_f$)

Difracción

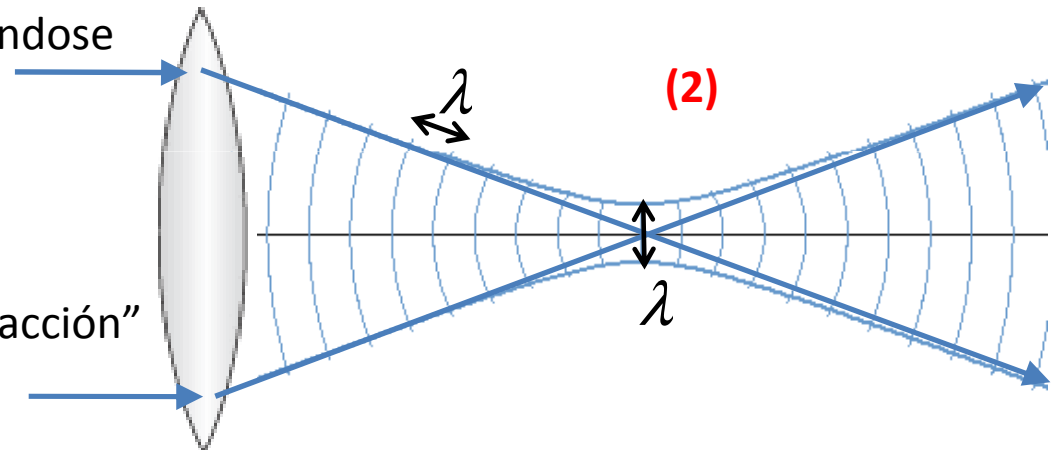
Ocurre difracción cuando una región del frente de onda se obstruye de alguna manera o se altera en forma (amplitud y/o fase). El término se utiliza en al menos tres contextos:

(1) cuando la onda interactúa con medios materiales que bloquean parcialmente su paso. Ej: olas del mar cerca de rompeolas; sonido; ondas radio cerca de colinas o edificios



(2) cuando una onda se propaga ensanchándose (incluso en el espacio vacío) :

→ no se puede focalizar un haz de luz a un punto: existe un tamaño mínimo de una onda, dado aproximadamente por la longitud de onda → "límite de difracción"

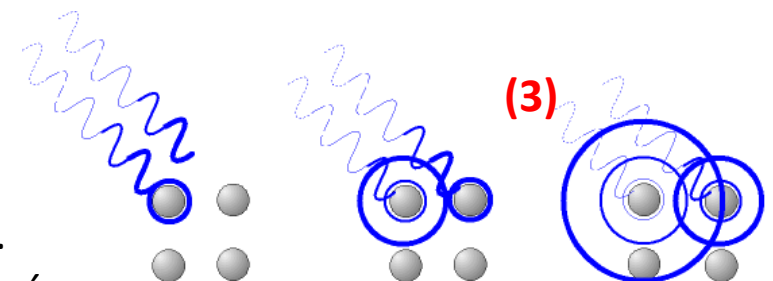


→ hasta un haz láser se ensancha

(pensad en la cara verde de un futbolista cuando los ninchas le apuntan con un puntero láser ...)

(3) cuando la longitud de onda de la luz es comparable con el tamaño de los componentes (átomos/moléculas, pero también dominios o granos) del material con que interactúa (es el equivalente ondulatorio de un choque).

Difracción de rayos X → información estructura/morfología

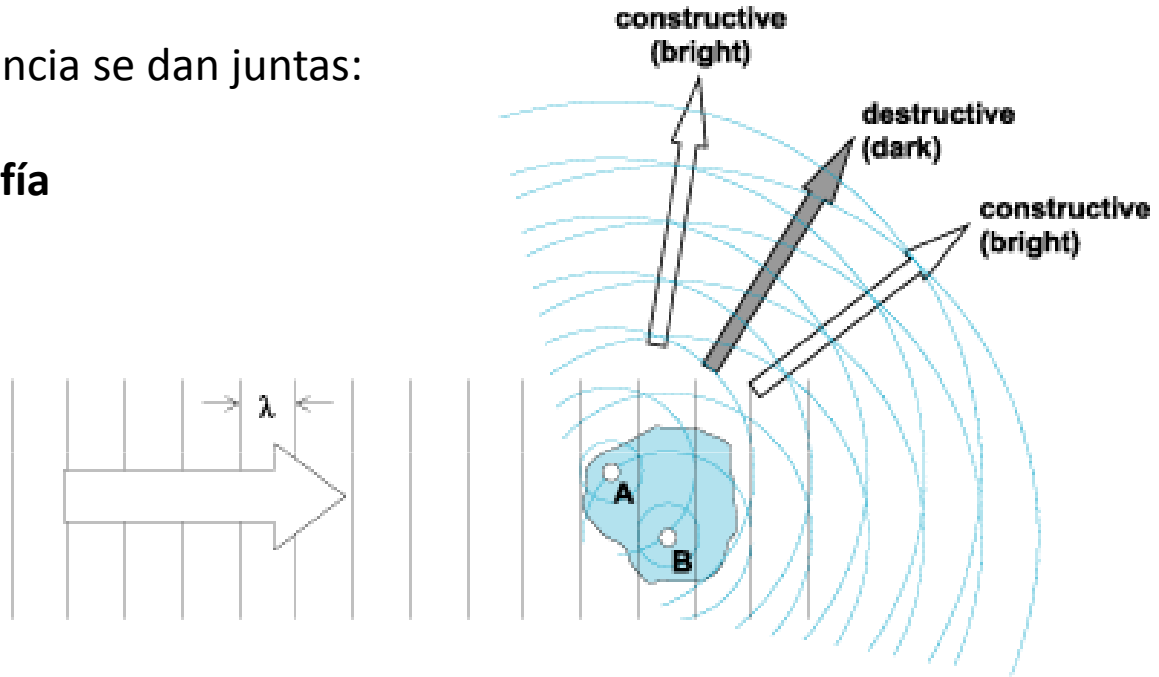


Difracción e interferencia

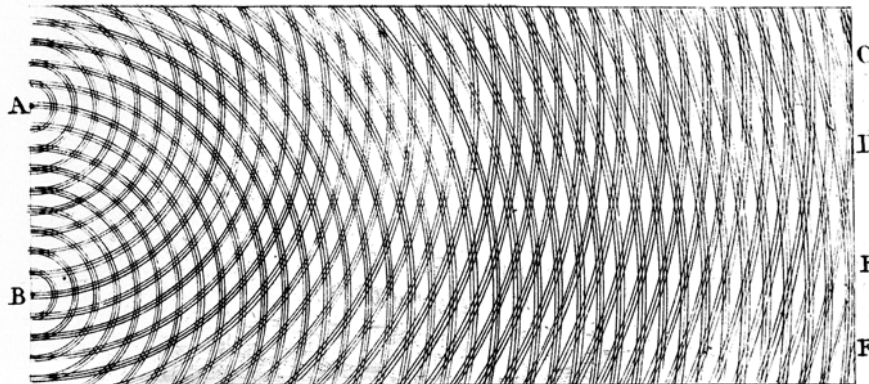
Son los fenómenos fundamentales de las ondas. La difracción (o esparcimiento) es de hecho la base de muchos fenómenos macroscópicos, como reflexión, refracción y difusión

Muchas veces difracción e interferencia se dan juntas:

→ **difracción de Bragg y cristalografía**



→ **experimento de Young** (naturaleza ondulatoria de la luz)



Veremos que **para describir algunos fenómenos como el del experimento de Young, es suficiente calcular una transformada de Fourier**

Espectro electromagnético

Frequency (Hz)	Type	Wavelength (m)
10^{22}		10^{-13}
10^{21}	gamma rays	10^{-12}
10^{20}		10^{-11}
10^{19}		10^{-10}
10^{18}	x rays	10^{-9}
10^{17}		10^{-8}
10^{16}	ultraviolet	10^{-7}
10^{15}	visible	10^{-6}
10^{14}	infrared	10^{-5}
10^{13}		10^{-4}
10^{12}		10^{-3}
10^{11}		10^{-2}
10^{10}	microwave	10^{-1}
10^9		1
10^8	TV, FM	10
10^7		10^2
10^6	AM	10^3
10^5		10^4
10^4	RF	10^5
10^3		10^6

The Visible Range	
Color	Wavelength (m)
near ultraviolet	3.0×10^{-7}
shortest visible blue	4.0×10^{-7}
blue	4.6×10^{-7}
green	5.4×10^{-7}
yellow	5.9×10^{-7}
orange	6.1×10^{-7}
longest visible red	7.6×10^{-7}
near infrared	1.0×10^{-6}

Fuentes de luz (TEMA 3)

Clasificación :

- 1) Electromagnéticas clásicas (antenas, ..)
- 2) Luminiscentes (tiempo típico de decaimiento y mecanismo de excitación)
- 3) Térmicas (filamentos/materiales incandescentes) y termonucleares (estrellas como el sol)
- 4) Láser (de emisión estimulada)

Propiedades de una fuente:

- **espectro de frecuencias**
- **grado de coherencia (temporal y espacial)**
- **irradiancia**
- **direccionalidad**
- **tipo y grado de polarización**

irradiancia = flujo de energía por unidad de tiempo y superficie =
= promedio módulo del vector de Poynting

Para luz monocromática:

$$I = \langle u_{e.m.} \rangle c = \langle S \rangle = \frac{\langle BE \rangle}{\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

 3-8, 3-9



Fuentes de luz continuas (“clásicas”)

Fuentes de radiación clásica: corrientes, p. ej. la de un dipolo oscilante. ¿Por qué un dipolo eléctrico oscilante genera una onda e.m.? Como corriente, genera un campo \mathbf{B} variable en t ; como conjunto de 2 cargas que se desplazan, también genera un campo \mathbf{E} variable.

Onda producida por una corriente oscilante \rightarrow Lo más fácil es utilizar el potencial vector \mathbf{A} , para luego sacar el campo \mathbf{B} . Para hallar \mathbf{A} , sólo hay que corregir la expresión para el potencial vector vista en electromagnetismo, introduciendo el tiempo que tarda el campo en propagarse.

Las ec. de Maxwell son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{De la 1ª se tiene que B se puede expresar como } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \text{ . Poniendo esta} \\ \text{expresión en la 2ª se saca : } \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} V \\ \\ \text{Tenemos entonces } \left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(la elección de } V \text{ y} \\ \vec{A} \text{ no es univoca)} \end{array} \end{array}$$

Escribiendo \mathbf{E} y \mathbf{B} en función de \mathbf{A} y V en las 2 últimas ecuaciones de Maxwell se obtiene:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \frac{\partial V}{\partial t} \quad \text{Utilizando } \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\vec{\nabla}^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}), \text{ se halla:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\vec{\nabla}^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{j} \\ \text{ec. de Gauss } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla}^2 V - \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{\partial t} = \rho/\epsilon_0 \Rightarrow -\vec{\nabla}^2 V - \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{A}}{\partial t} = \rho/\epsilon_0 \end{array} \right.$$

Ecuaciones para el potencial vector

Tenemos cierta libertad a la hora de elegir los potenciales V y \vec{A} . Sus expresiones se simplifican imponiendo la condición de Lorentz: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}$. Las ecuaciones de Maxwell dan así:

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 I d\vec{l} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} V - \nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{cases} \quad \text{(la ventaja de escribirlas para } V \text{ y } \vec{A} \text{ es que las ecuaciones para } \vec{E} \text{ y } \vec{B} \text{ son más complicadas)}$$

Vemos entonces que \vec{A} y V son solución de una ecuación de d'Alembert no homogénea. En los casos electrostático y magnetostático tales ecuaciones se reducen a las de Poisson:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad \text{Ya conocemos la solución de estas ecuaciones. Para la 1ª:}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{Análogamente para la 2ª: } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

La solución de la ec. de Poisson con una corriente "puntual" es $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \vec{j}(0) dV = \frac{\mu_0}{4\pi r} I d\vec{l}$, (de la que se puede sacar p.ej. la ley de Biot-Savart:)

$$d\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{\nabla} \times \frac{d\vec{l}}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} d\vec{l} \times \vec{r}$$

De forma análoga, la solución de la ec. de d'Alembert resulta ser $\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} I \left(t - \frac{r}{c} \right) d\vec{l}$,

que tiene sentido, pues es la ecuación de una onda esférica! Para un dipolo eléctrico oscilante

$$\vec{p}(t) = q(t) d\vec{l}, \text{ se tiene } I d\vec{l} = \frac{dq}{dt} d\vec{l} = \frac{d(qd\vec{l})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{y por tanto: } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d\vec{p}}{dt} (t - r/c)$$

Dipolo eléctrico oscilante (hertziano)

Con $\vec{p}(t) = p_0 \hat{k} e^{i\omega t}$ en el origen, \vec{A} está dado por $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d\vec{p}}{dt}(t-r/c) = i\omega \frac{\mu_0}{4\pi r} \hat{k} p_0 e^{i\omega(t-r/c)}$

r aparece 2 veces en $\vec{A} \Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ tiene 2 términos: uno disminuye con la distancia como $\vec{\nabla} \times \frac{\vec{p}_0}{r} \propto \frac{1}{r^2}$, el otro como $1/r$. A grandes distancias del dipolo oscilante domina el segundo,

que está dado por: $\vec{B}_{rad}(\vec{r}, t) = i\omega \frac{\mu_0}{4\pi r} p_0 \vec{\nabla} \times (\hat{k} e^{i\omega(t-r/c)}) = i\omega \frac{\mu_0 p_0}{4\pi r} e^{i\omega t} \vec{\nabla} \times (\hat{k} e^{-i\omega r/c})$

Ya que $\frac{de^{-i\omega r/c}}{dx} = \frac{d}{dx} f(r(x)) = \frac{df}{dr} \cdot \left(\frac{dr}{dx}\right) = -i \frac{\omega}{c} e^{-i\omega r/c} \cdot \left(\frac{x}{r}\right)$, se ha:

$$B(\vec{r}, t) = \frac{\omega^2}{c} \frac{\mu_0 p_0}{4\pi r} e^{i\omega t} \hat{k} \times \hat{r} e^{-i\frac{\omega}{c}r} = \boxed{\frac{\mu_0 p_0}{4\pi c} \omega^2 \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r} \sin(\theta) \hat{\phi}} = B_{rad} \hat{\phi}$$

campo B de radiación

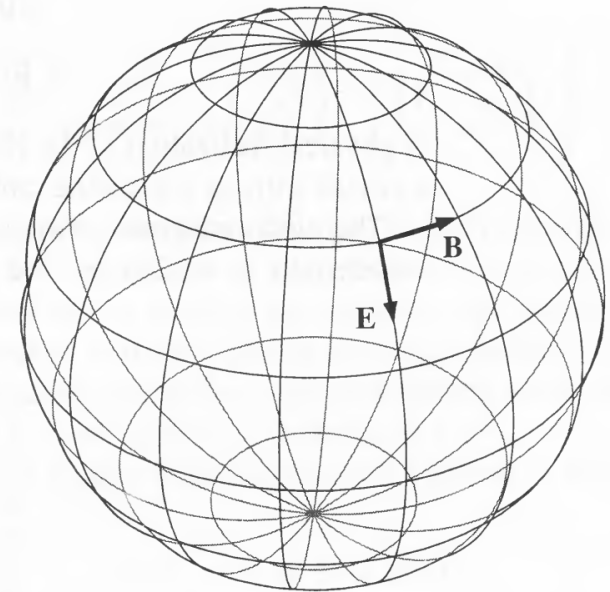
El campo \vec{E} correspondiente se halla de $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, o sea:

$$\boxed{\vec{E}_{rad} = c B_{rad} \hat{\theta}}$$

campo E de radiación

A grandes distancias del dipolo oscilante, \vec{E} y \vec{B} disminuyen pues como $1/r$, mucho menos rápido que el campo \vec{B} de una corriente estacionaria ($1/r^2$) o el campo electrostático de un dipolo ($1/r^3$).

→ Este hecho es en definitiva lo que permite la telecomunicación por ondas e.m. a grandes distancias.



Antenas emisoras de dipolo eléctrico

Campos de radiación de un dipolo eléctrico oscilante:

$$\begin{cases} \vec{B}_{rad} = \frac{\mu_0 p(t-r/c)}{4\pi c} \frac{\omega^2}{r} \sin(\theta) \hat{\phi} \\ \vec{E}_{rad} = c B_{rad} \hat{\theta} \end{cases} \rightarrow \text{La irradiancia vale } I = \frac{1}{2\mu_0 c} E_{0rad}^2 = \frac{c}{2\mu_0} B_{0rad}^2 \left(= \frac{c}{\mu_0} \langle B_{rad}^2 \rangle \right)$$

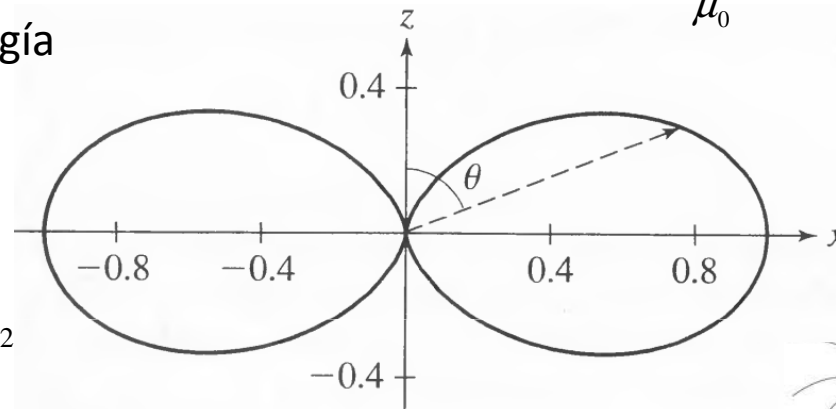
(vector de Poynting : $\vec{S}_{rad}(t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_{rad} \times \vec{B}_{rad} = \frac{c B_{rad}^2}{\mu_0} \hat{r}$)

La irradiancia y por tanto el flujo de energía dependen del ángulo acimutal θ :

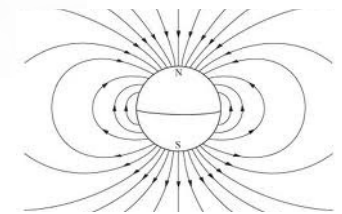
$$I = \frac{\mu_0 p_0^2}{2c(4\pi r)^2} \omega^4 \sin^2(\theta)$$

$$W = \int_{esfera} I dA = \frac{\mu_0}{12\pi c} p_0^2 \omega^4 = \frac{\mu_0}{12\pi c} I_0^2 L^2 \omega^2$$

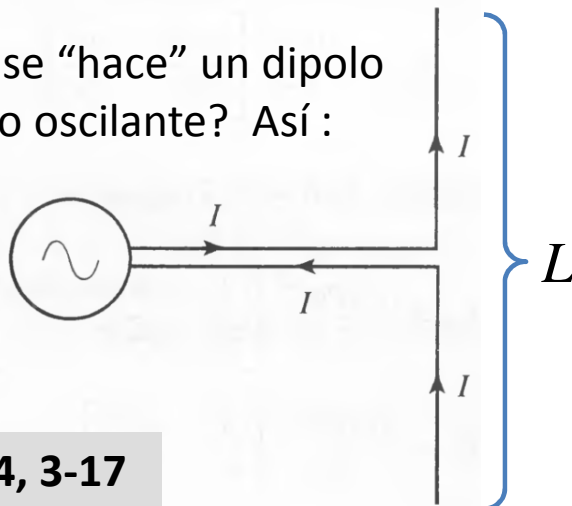
3-15, 3-16



lóbulo de radiación dipolar



¿Cómo se "hace" un dipolo eléctrico oscilante? Así:



3-14, 3-17

Antena de media onda. Hicimos el cálculo para una antena puntual, y el resultado encontrado vale para antenas de longitud $L \ll \lambda$. Si tenemos en cuenta el tamaño de la antena, resulta que la máxima eficiencia de una antena de dipolo eléctrico que emite a la longitud de onda λ se ha cuando: $L = \lambda/2$

En tal caso la potencia radiada es: $W \approx 36.5 I_0^2$

Aplicaciones

Antenas receptoras. La antena dipolar también se usa como antena receptora. Si la resistencia de la antena es R , la tensión generada por una onda e.m. entre sus extremos es $V = E_T L$, siendo L la longitud de la antena y E_T la componente del campo E de la onda tangente a la antena (el campo magnético de la onda induce una corriente menospreciable)

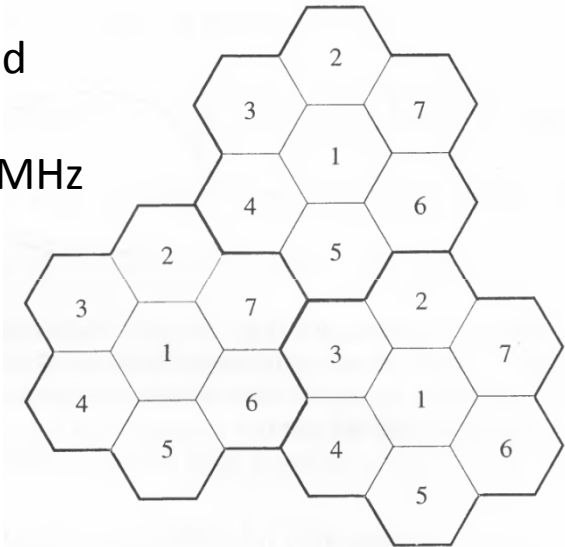
Radio y telefonía móvil

Para la radio se utiliza modulación de frecuencia (FM) o de amplitud (AM). Para la AM se usa la llamada “banda de onda media” entre 535 y 1705 kHz . Para la FM se usan las frecuencias entre 87 y 108 MHz

<http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Amfm3-en-de.gif>

Los móviles funcionan en dos bandas de frecuencia “ultra-alta” (UHF), una cerca de 800 MHz y otra cerca de 1900 MHz.

Inicialmente se usaba en modo FM, ahora la modulación es digital. Para poder seguir el “desplazamiento” de la antena de un móvil o de un car audio, se tiene que utilizar un conjunto de antenas distribuidas en todo el espacio, que utilizan frecuencias ligeramente distintas

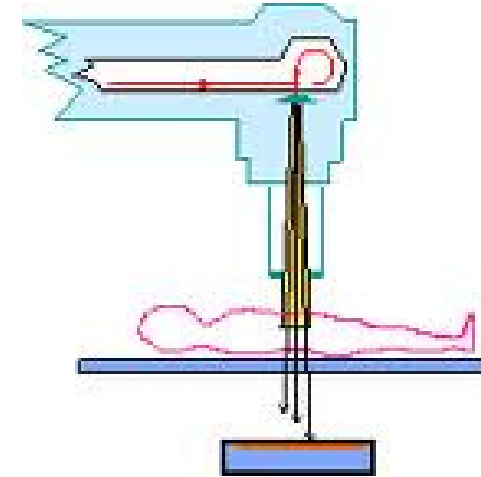
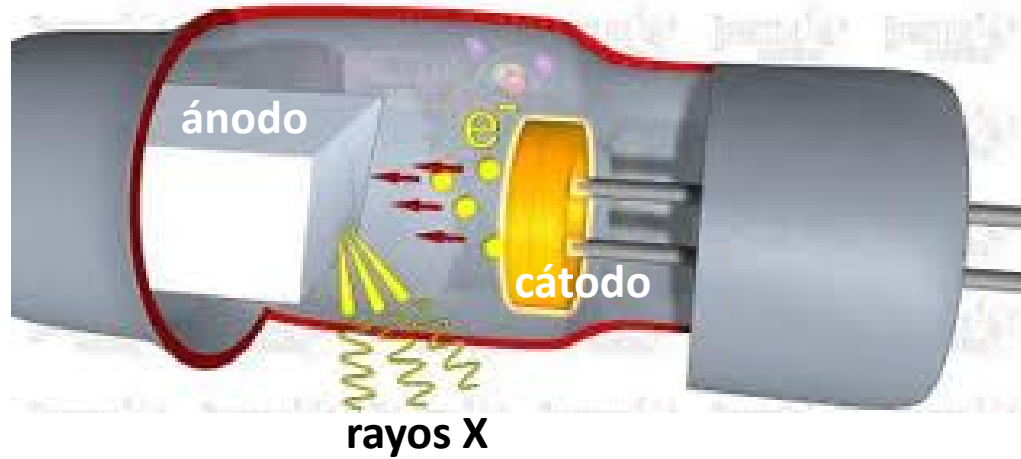


Horno de microondas

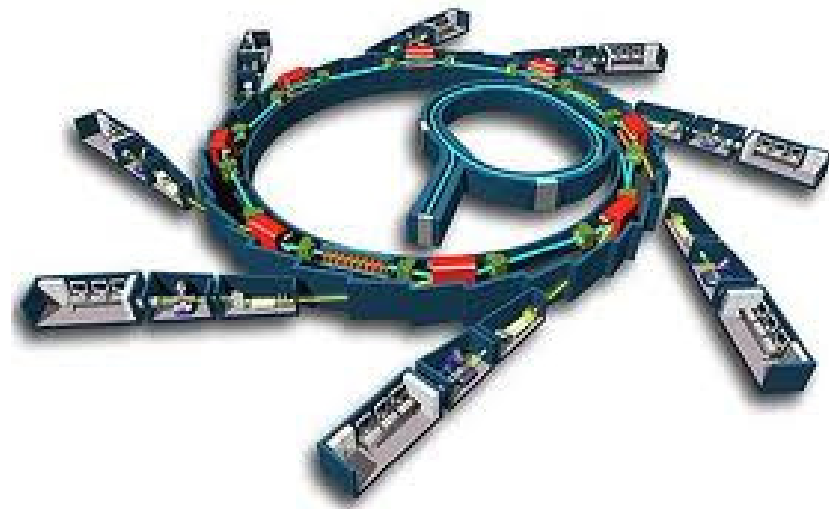
Las microondas tienen frecuencias aún más altas, y se utilizan también para telecos. La frecuencia 2.4 GHz usada en los hornos microondas provoca la excitación del enlace O-H del agua y otras moléculas (2.4 GHz es la frecuencia de resonancia del enlace O-H : se puede pensar a un pequeño muelle entre los dos átomos); la energía cinética luego se disipa como calor.

Otras fuentes clásicas

Bremsstrahlung (fuentes de rayos X)



Sincrotrón (ALBA) (electrones relativistas)



*Inestabilidad del átomo clásico

Los cálculos que vimos para el dipolo oscilante significan que cada corriente variable (cada carga acelerada) genera radiación:

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0 q}{4\pi r} \vec{a}_{\perp}(t - r/c) \quad , \quad \text{con } \vec{a}_{\perp} = \text{componente de } \vec{a} \text{ perpendicular a } \vec{r}$$

⇒ El modelo atómico “clásico”, con uno o más electrones que orbitan alrededor del núcleo, no es estable : un electrón en órbita circular tiene una aceleración centrípeta y radiaría, dibujando un movimiento en espiral alrededor del núcleo, hasta perder toda su energía cinética.

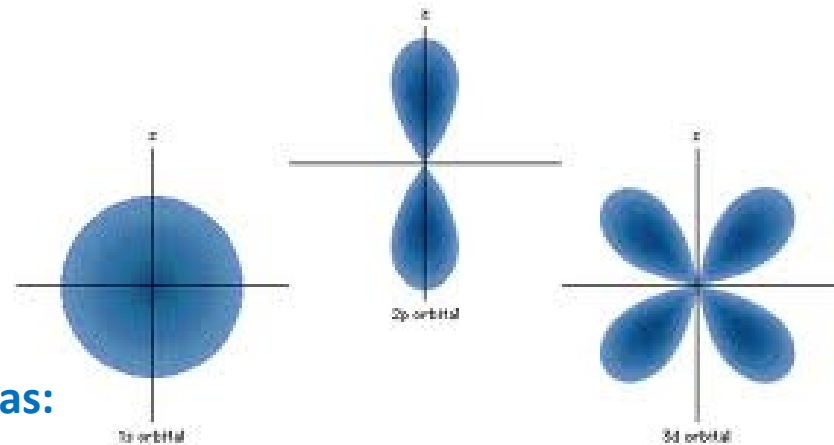
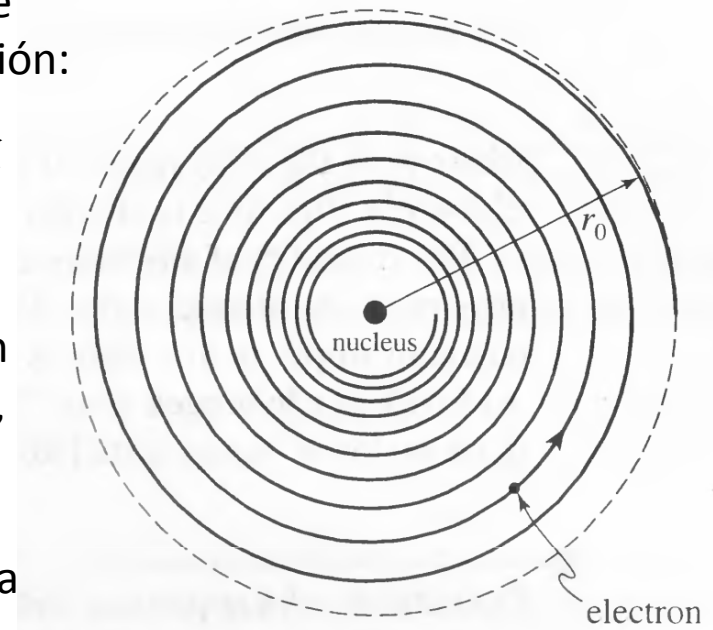
(El cálculo hecho a partir de lo que hemos visto hasta aquí da un tiempo de vida del átomo de hidrógeno de 10^{-11} s !)

¿Por qué son estables los átomos? Porque para ellos no vale la física clásica, sino la cuántica : sólo existen unos cuantos valores posibles de energía (niveles discretos) para un electrón en un átomo; cuando está en el nivel de más baja energía, ya no puede ir a ningún otro

Ecuación de Schrödinger para un electrón (1925):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t)$$

orbitales = ondas de Schrödinger estacionarias:



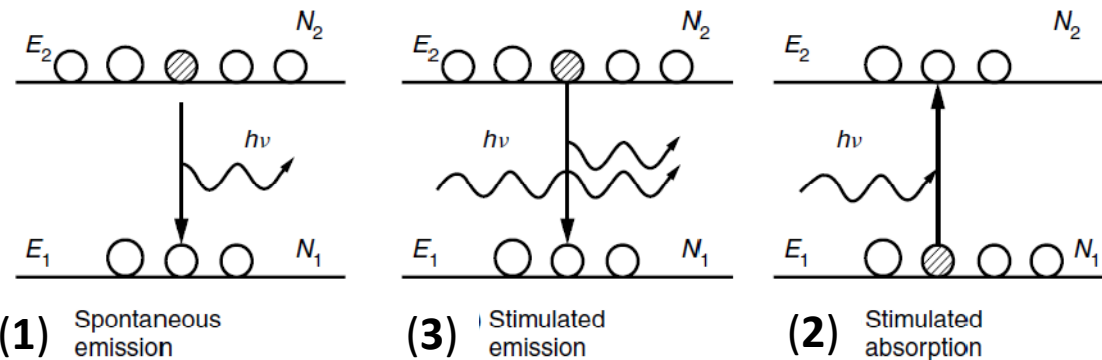
Fuentes de luz discretas (descripción cuántica)

Descripción cuántica: transiciones entre niveles discretos de energía.

Existen 3 tipos:

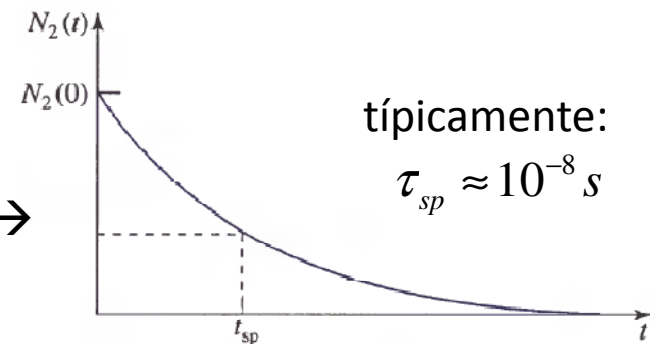
Niveles discretos \Leftrightarrow rayas de emisión/absorción

\Leftrightarrow espectroscopia



(1) emisión espontánea:
$$\frac{dN_2}{dt} = -A \cdot N_2 = -\frac{N_2}{\tau_{sp}}$$

Sin luz incidente es el único proceso posible. La población inicial del nivel 2 decae con un tiempo característico $\tau_{sp} = A^{-1} \rightarrow$



(2) absorción:
$$\frac{dN_1}{dt} = -B_{12} \cdot I^* \cdot N_1 = -\frac{dn_{fotones}^*}{dt}$$

Ej: onda de sección unitaria en dirección del eje z: $\frac{dn_{fotones}^*}{dt} = B_{12} \cdot I^* \cdot N_1$. Para I^* pequeña $N_1 \approx N_{TOT}$

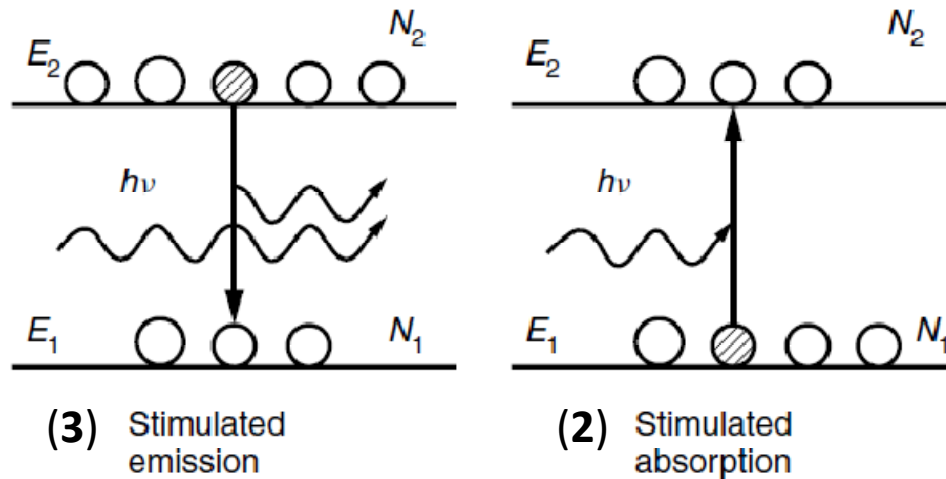
$$\frac{\Delta n_{fotones}^*}{\Delta t} = \frac{\Delta(\langle U_{e.m.}^* \rangle / hv)}{\Delta z / c} = \frac{1}{hv} \frac{\Delta(c \langle U_{e.m.}^* \rangle)}{\Delta z} = \frac{1}{hv} \frac{\Delta I^*}{\Delta z} \Rightarrow \frac{1}{hv} \frac{\Delta I^*}{\Delta z} = -B_{12} I^* \cdot N_{TOT} \Rightarrow \frac{dI^*}{dz} = -(B_{12} hv N_{TOT}) I^*$$

\Rightarrow ley de Beer $I^* = I_0^* e^{-\alpha z}$, con $\alpha = B_{12} hv N_{TOT}$ = coeficiente de absorción

(3) emisión estimulada:
$$\frac{dN_2}{dt} = -B_{21} \cdot I^* \cdot N_2 = +\frac{dn_{fotones}^*}{dt}$$

$n_{fotones}^*$ = número de fotones en un "modo" específico

Emisión estimulada (→ láser)



$$\frac{dN_2}{dt} = -B \cdot I \cdot N_2$$

Emisión estimulada (3) → luz coherente → principio de funcionamiento del LASER

(1) emisión espontánea en un único “modo” (*): $\frac{dN_2}{dt} = -A^* \cdot N_2 = -\frac{N_2}{\tau_{sp}^*}$

(2) absorción: $\frac{dN_1}{dt} = -B_{12} \cdot I^* \cdot N_1 = -\frac{1}{\tau_{sp}^*} n_{fotones}^* \cdot N_1$

(3) emisión estimulada: $\frac{dN_2}{dt} = -B_{21} \cdot I^* \cdot N_2 = -\frac{1}{\tau_{sp}^*} n_{fotones}^* \cdot N_2$

inversión temporal
Einstein 1905

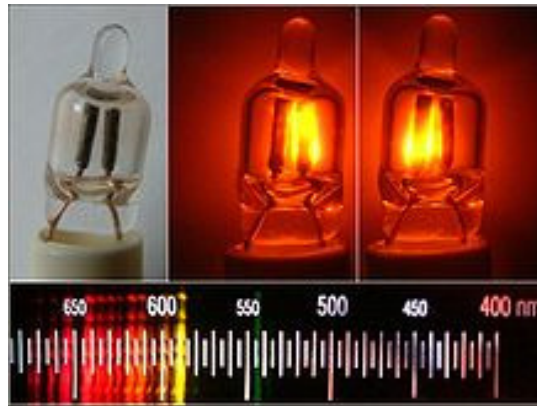
Nota histórica: Einstein escribió las dos últimas ecuaciones en función de la densidad de energía en lugar de la irradiancia (llamando B el correspondiente coeficiente de proporcionalidad), y fue el 1º en ver que $B_{12} = B_{21}$. Los coeficientes A y B se llaman en su honor **coeficientes de Einstein**.

Fuentes luminiscentes

→ Funcionan por emisión espontánea, que ocurre después de la excitación de los electrones del material de la fuente. Fluorescencia ($\tau_{sp} \approx 10 \text{ ns}$) o fosforescencia ($\tau_{sp} \approx 1 \text{ ms} \div \text{horas}$)

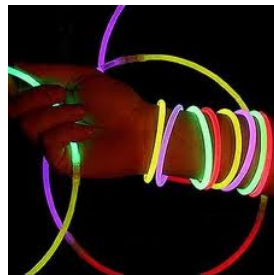
Clasificación según el mecanismo de excitación:

- **electroluminiscencia** (relámpago, neón, LED)



→ Televisor al plasma y pantalla LED

- **quimioluminiscencia** (luciérnagas, palitos de luz, fuego)



- **fotoluminiscencia:** → materiales fosforescentes →
→ lámparas fluorescentes



* Fuentes de luz térmicas

Mecanismo: emisión espontánea (los niveles de energía más alta están poblados debido a la excitación térmica. Sean 1 y 2 dos niveles de energía de la fuente ($2 > 1$), y (*) un modo de luz de energía igual a la diferencia $E_2 - E_1$. Si dominan las transiciones radiativas:

$$\frac{dN_2}{dt} = -\frac{N_2}{\tau_{sp}^*} + n_{fotones}^* \frac{N_2}{\tau_{sp}^*} - n_{fotones}^* \frac{N_1}{\tau_{sp}^*}$$

En condiciones estacionarias: $\frac{dN_2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{n_{fotones}^*}{1 + n_{fotones}^*}$

En equilibrio termodinámico la población de un nivel electrónico de energía E_i es proporcional al

factor de Boltzmann $N_i \propto e^{-E_i/k_B T}$ ($T =$ temperatura en K ; $k_B =$ constante de Boltzmann)

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}\right) = \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) \Rightarrow$$

$$n_{fotones}^* = \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}$$

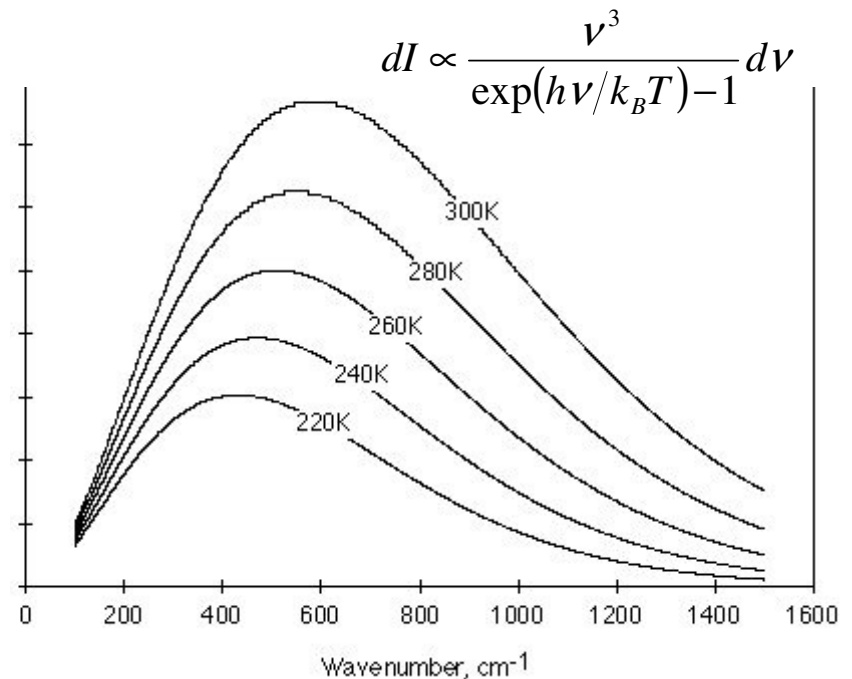
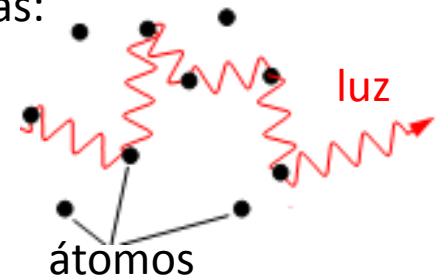
distribución de Bose-Einstein

3-25

La energía del modo es $\varepsilon = n_{fotones}^* h\nu = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}$

La irradiancia en función de la frecuencia se halla multiplicando ε por la densidad de modos radiativos (que es proporcional a ν^2). El espectro de radiación resultante se llama **espectro de cuerpo negro**

equilibrio térmico radiación-materia



Fuentes térmicas: espectro de cuerpo negro

espectro de radiación fuente térmica:
espectro de cuerpo negro

→ ley de Wien

$$\lambda_{\max} T = 2.8976 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$$

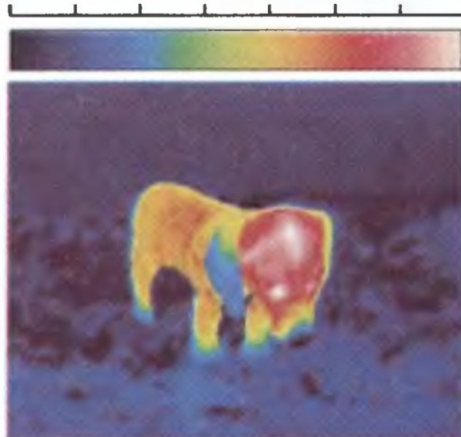
→ ley de Stefan-Boltzmann

$$W = \sigma A T^4 \propto T^4$$

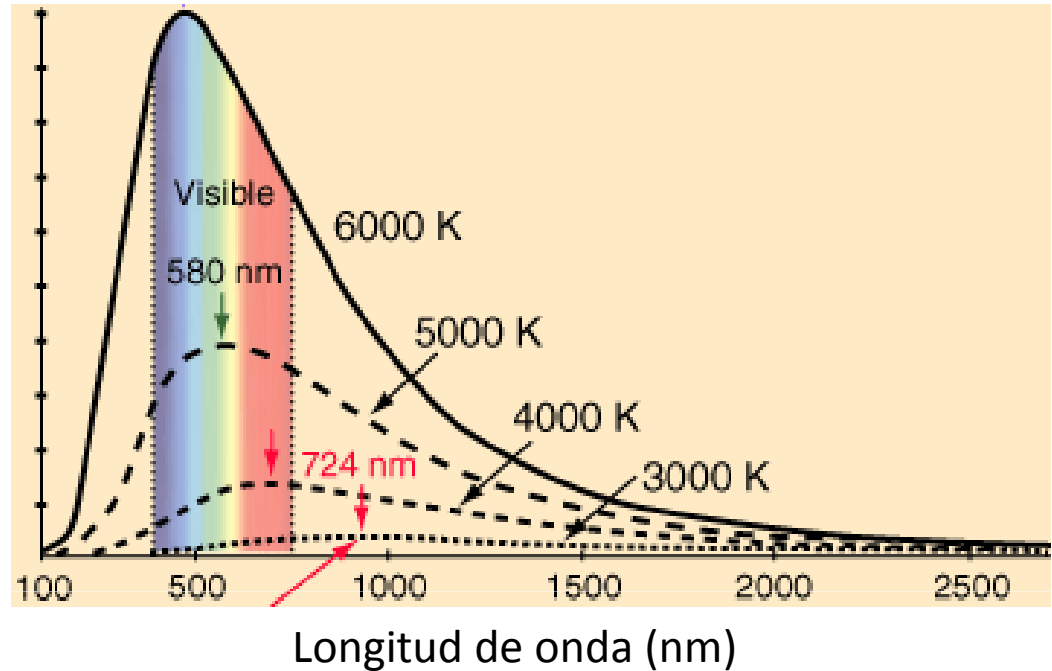
constante de Stefan área superficial de la fuente

Aplicación: termovisión (infrarroja)
 (en falso color):

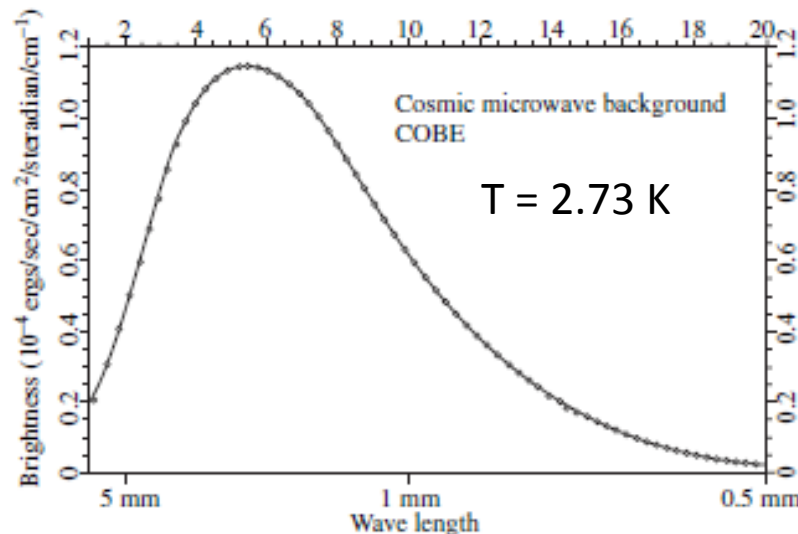
22°C 24 26 28 30 32 34 36



3-23



Radiación cósmica de fondo (de microondas)



3-21
 3-24

Los fenómenos ópticos (TEMA 4)

Propagación (y “difracción”) en el vacío (\leftrightarrow ec. de onda)

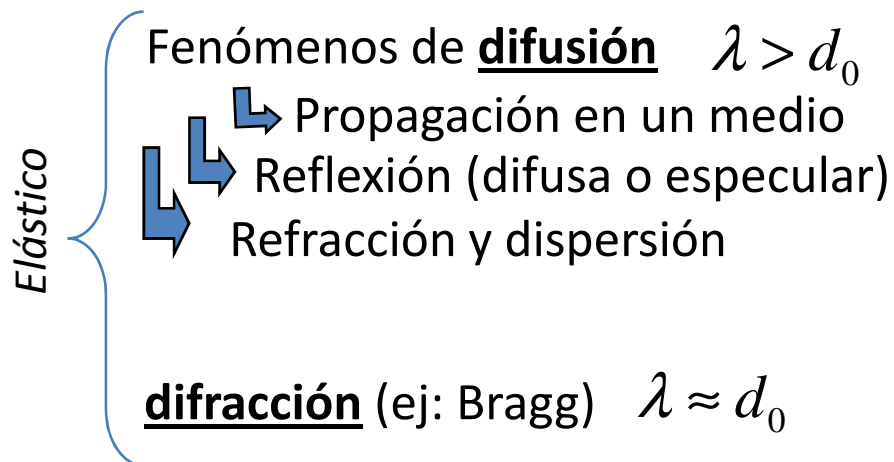
ensanchamiento del frente de onda, ondas esféricas, casos límite de las ondas planas y rayos

Interferencia (\leftrightarrow ec. de onda: suma de campos E y B)

(superposición de ondas, batidos, ondas estacionarias)

Interacción con la materia :

- Emisión (fuentes de radiación)
- Absorción (espectroscopia, detectores)
- Esparcimiento (scattering) elástico e inelástico



reflexión, refracción, propagación en un medio material, dispersión: todas son manifestaciones macroscópicas del *esparcimiento* en la escala microscópica

Inelástico: Compton + efectos no lineales: generación de armónicos, Raman, Brillouin, ...

(traducción de “scattering”: esparcimiento, dispersión o difracción)

Interacción luz - materia: absorción y scattering

Luz: campo **E** (y **B**) oscilante que interactúa con las cargas en la materia, especialmente con las que más se pueden mover: los electrones. La interacción de una onda electromagnética con los átomos que constituyen un medio es de dos tipos, según la frecuencia de la onda corresponde o menos a un nivel de absorción. Si la frecuencia está por debajo del umbral de absorción, el efecto de la onda es el de generar una oscilación de los electrones, sin llegar a producir transiciones entre niveles; esta oscilación se parece a la de un dipolo radiante: el electrón es acelerado por el campo óptico, y debido a su aceleración, emite a la vez a la misma frecuencia en una dirección que puede ser distinta de la de la onda inicial, prevalentemente en el plano normal al dipolo oscilante. Este fenómeno se llama “esparcimiento” (scattering) elástico (o también “dispersión” elástica) de la onda. La interpretación microscópica de todos los fenómenos ópticos en la materia distintos de la emisión o absorción, se basa en el fenómeno de “scattering”. La distinta velocidad de fase en un medio, la reflexión y la refracción, la actividad óptica, los espejismos, todo ello puede explicarse a partir del esparcimiento elástico de la luz.

Tipos de scattering elástico:

- **Scattering Rayleigh** (átomos y moléculas, aislantes)
- **Scattering de plasma** (electrones en un metal o en un plasma)
- **Scattering Bragg** (rayos X con átomos/moléculas; UV-VIS-IR rejillas de difracción)
- Scattering Mie (partículas (esféricas) pequeñas)
- Scattering Thomson (rayos X con electrones libres), ...

Scattering en metales y aislantes

Modelo sencillo del esparcimiento: movimiento de electrones en campos E armónicos.

Metal: electrones libres ; Aislantes: electrones ligados. Sea: N = número e^- en volumen unitario

METAL:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = eE = eE_0 e^{-i\omega t} \rightarrow x = x_0 e^{i\omega t}, \quad x_0 = -\frac{eE_0}{m\omega^2} \Rightarrow p_0 = ex_0 = -\frac{e^2}{m\omega^2} E_0 \Rightarrow Np_0 = P = -\frac{Ne^2}{m\omega^2} E_0 = \chi \epsilon_0 E_0$$

$$\Rightarrow n^2 = \epsilon_r = 1 + \chi = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{con: } \omega_p = e \sqrt{\frac{N}{\epsilon_0 m}} \quad \text{frecuencia de plasma}$$

Para $\omega > \omega_p$, n es real; para $\omega < \omega_p$, n es puramente imaginario

AISLANTE:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = eE_0 e^{-i\omega t} \rightarrow x(t) = \frac{e}{m} \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + ib\omega} \Rightarrow P = Nex_0 = \frac{Ne^2}{m} \frac{E_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + ib\omega}$$

$$\Rightarrow n^2 = \epsilon_r = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + ib\omega} \rightarrow n \text{ es en general complejo: } n = n' + in''$$

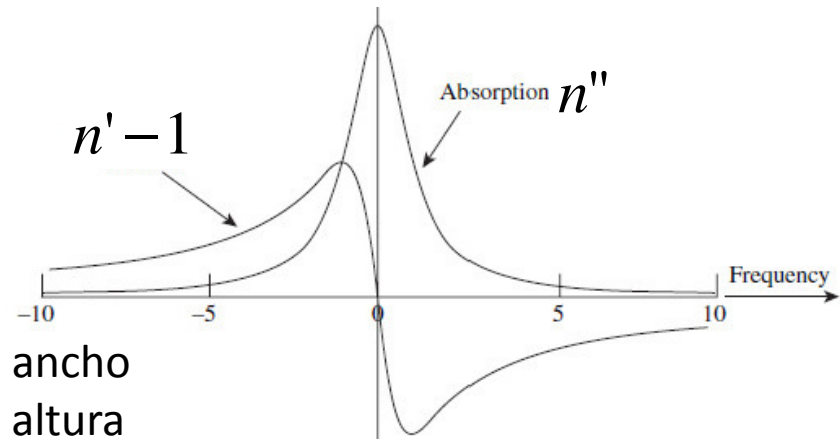
y además depende de la frecuencia

Si $n'-1$ y n'' son pequeños, como es el caso de un gas a baja presión, entonces se ha aprox. :

$$n' = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega \Delta\omega_{1/2})^2}$$

$$n'' = \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \frac{\omega \Delta\omega_{1/2}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega \Delta\omega_{1/2})^2}$$

$b = \Delta\omega_{1/2}$ = ancho a media altura



Índice de refracción complejo

$$n = n' + in'' \text{ complejo} \Rightarrow \text{vector de onda complejo: } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{\omega}{c} n = \frac{\omega}{c} n' + i \frac{\omega}{c} n''$$

Sustituyendo en la expresión de una onda monocromática:

$$\vec{E} = E_0 \exp\{i(k'x - \omega t)\} \exp\{-k''x\}. \text{ Definiendo } k_0 = \frac{\omega}{c}, \text{ se ha:}$$

$$\Rightarrow E_0 \exp(-n''k_0x) \exp\{i(n'k_0x - \omega t)\}$$

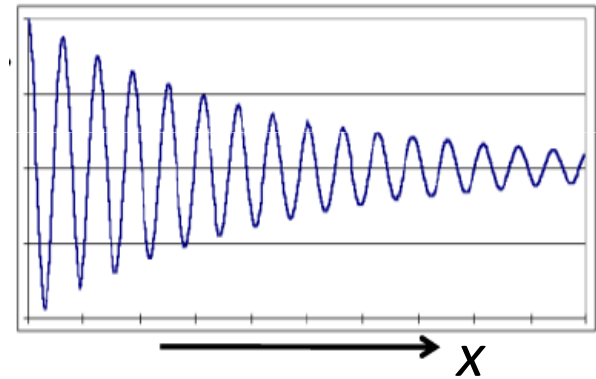
4-1, 4-2

→ La parte real de n describe la velocidad de fase en el material

→ La parte imaginaria de n nos da la **atenuación** de la onda en el material, o sea las pérdidas debidas a scattering y absorción.

Un índice n puramente imaginario significa que la onda no penetra en el material, sino que es totalmente reflejada.

⇒ **un material muy absorbente es muy buen reflector**



Se define una **longitud de atenuación**: $\delta = \frac{1}{k''}$

P. ej. en un metal o plasma a muy baja frecuencia $n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \approx \sqrt{-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = i \frac{\omega_p}{\omega} = in''$, por lo que:

$$k'' = \frac{\omega}{c} n'' = \frac{\omega_p}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_p} \quad \text{y} \quad \delta = \frac{\lambda_p}{2\pi}$$

4-4 4-8

La irradiancia disminuye según la **ley de Beer**: $I = I_0 e^{-\alpha x}$, con $\alpha = \frac{2}{\delta} = 2k'' = 2\left(\frac{\omega}{c}\right)n''$

Estos parámetros resumen a la vez el efecto de la absorción y del esparcimiento

4-7 4-5

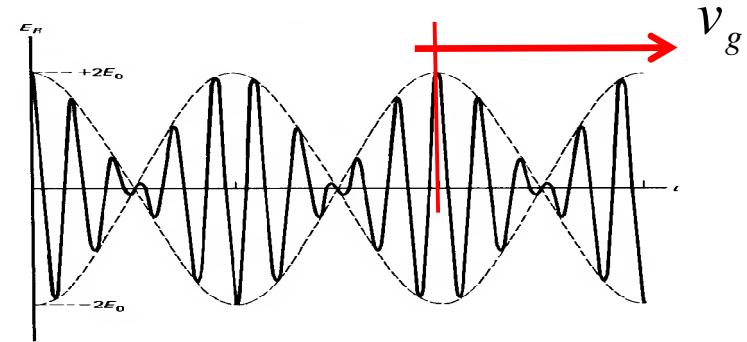
Medios dispersivos: velocidad de grupo

Dos ondas de igual amplitud a , una de pulsación $\omega - d\omega$ y la otra $\omega + d\omega$, dan resultante de

$$\text{la forma } ae^{i\omega t - kx} \left(e^{i[(d\omega)t - (dk)x]} + e^{-i[(d\omega)t - (dk)x]} \right) = 2iae^{i\omega t - kx} \sin((d\omega)t + (dk)x)$$

→ “grupo” de ondas que se desplaza con velocidad :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad \text{Velocidad de grupo}$$



Una onda perfectamente monocromática se propaga a la “velocidad de fase” $v_f = \omega/k = c/n$

En un medio material tal velocidad de fase (o, lo que es lo mismo, n) depende de la frecuencia. Esto hace que la velocidad de grupo v_g , que es la velocidad de un grupo de ondas o de un pulso,

sea distinta de v_f : $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv_f)}{dk} = v_f + k \frac{d(v_f)}{dk} \neq v_f$. En función de n :

$$v_g = v_f + k \frac{d(v_f)}{dk} = v_f + k \frac{d(c/n)}{dk} = v_f + kc \frac{d(n^{-1})}{dk} = v_f - \frac{kc}{n^2} \frac{dn}{dk}, \text{ o sea: } v_g = v_f \left(1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk} \right)$$

Dado que $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda$, puede escribirse también:

$$v_g = v_f \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right)$$



Scattering Rayleigh (aislantes)

El movimiento de un electrón ligado en un campo \mathbf{E} armónico es $x(t) = \frac{e}{m} \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i b \omega}$, con aceleración $a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$. Los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} de radiación son proporcionales a $\frac{d^2 p}{dt^2} = e \frac{d^2 x}{dt^2}$

\Rightarrow la potencia radiada es proporcional a $a^2 \Rightarrow P \propto \frac{E_0^2 \omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i b \omega)^2}$

Muy por debajo de la resonancia ($\omega \ll \omega_0$) el denominador es básicamente constante y vale ω_0^4 . Si la luz incidente tiene un espectro en frecuencia plano y limitado a la región $\omega \ll \omega_0$, la potencia esparcida es:

$$P_{Rayleigh} \propto \omega^4 / \omega_0^4$$



P es proporcional a la cuarta potencia de la frecuencia, igual que para una antena de dipolo eléctrico (de hecho un electrón atómico oscilante es muy parecido a una pequeña antena). En comparación en un metal $x(t) = -\frac{eE_0}{m\omega^2} e^{i\omega t}$, por lo que a^2 y P no dependen de la frecuencia.

Cuando la luz del sol atraviesa un gas como el aire, cuyas moléculas (N_2 , O_2) no tienen niveles de absorción en el visible sino en el ultravioleta, solo puede ser esparcida y no absorbida (dado que $\omega \ll \omega_0$). La amplitud de las oscilaciones aumenta con la frecuencia; más oscilaciones significan más esparcimiento, así que la luz violeta es esparcida más que la luz azul, ésta más de la luz verde, etc.. El haz transmitido se vuelve cada vez más rojo, mientras que la luz esparcida es sobretodo azul (la luz solar no contiene mucho UV). De allí el rojo de las puestas del sol y el azul del cielo, que sin scattering Rayleigh sería negro como el espacio exterior.

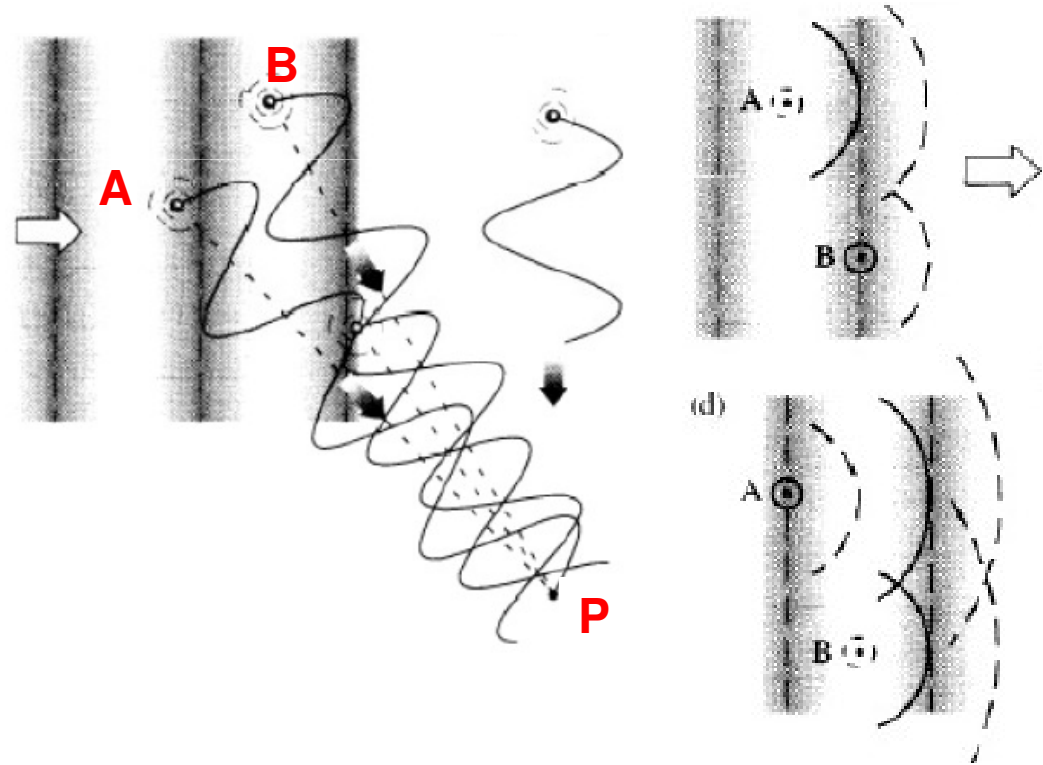


Fenómenos debidos a scattering Rayleigh + interferencia:

Esparcimiento en medios muy diluidos

En un gas a baja presión la separación entre moléculas es mucho mayor que la longitud de onda de la luz, así que las ondas esparcidas por distintas moléculas A y B llegan a un punto P lejano con fases arbitrarias. Algunas interfieren de manera constructiva y otras destructiva: esto anula en promedio los efectos de interferencia, y hace que siempre haya una onda esparcida. La única dirección en que esto no ocurre es la del haz, pues en tal caso hay una relación de fase fija entre la radiación emitida por A y B, ya que las ondas incidente y la esparcida recorren en tal caso la misma distancia entre A a B.

El esparsamiento atmosférico que determina el color azul del cielo se produce en las capas exteriores (menos densas) de la atmósfera. NOTA: A nivel del mar la atmósfera es todo menos diluida: en un cubo de lado 500 nm (longitud de onda típica de la luz visible) hay 3 millones de moléculas de aire; las moléculas son tan cercanas que radian con fases muy parecidas, con efectos importantes de interferencia



Un medio diluido con absorción en el UV esparce la luz visible; la luz esparcida es incoherente

Fenómenos debidos a scattering Rayleigh + interferencia: Ausencia de esparcimiento en medios densos

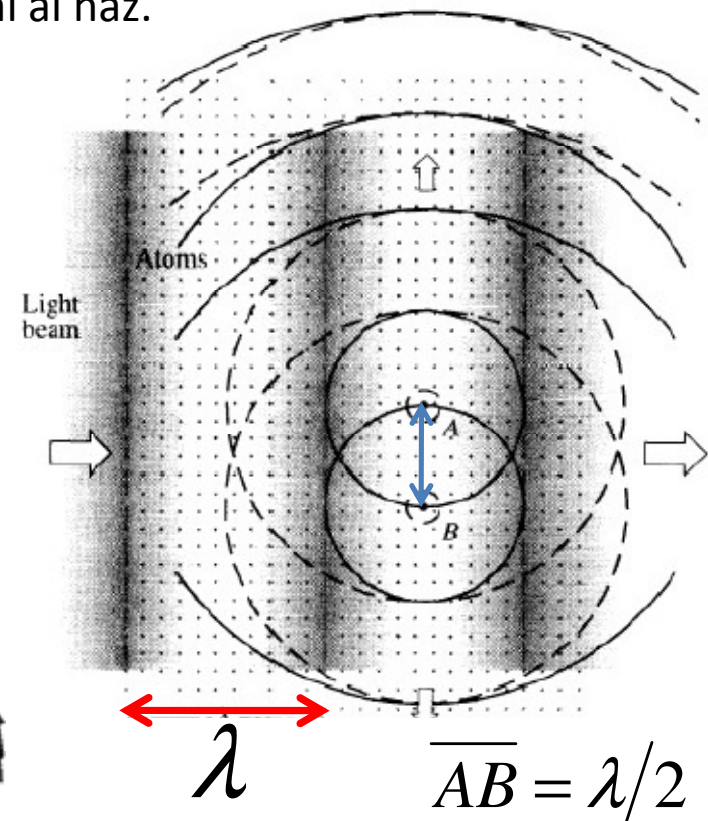
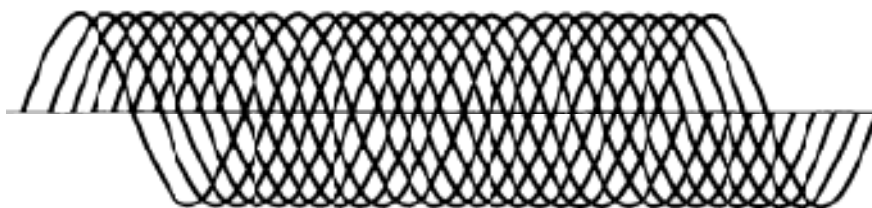
En un gas a alta presión como la atmósfera terrestre a nivel del mar no hay esparcimiento, y lo mismo ocurre en líquidos y sólidos, que son 10 veces más densos (el vidrio y el aire no son azulados). ¿Cómo puede ser, si hay muchas más moléculas debido a la alta densidad? Como para los medios diluidos, hay interferencia constructiva en dirección de propagación ya que la luz esparcida está entonces en fase. Sin embargo, el esparcimiento está inhibido en otras direcciones debido a la interferencia destructiva. ¿Cómo ocurre esto?

Cada molécula difunde mayormente en dirección transversal al haz.

Debido a la alta densidad, por cada molécula A que difunde la luz, siempre se puede encontrar otra B a una distancia $\lambda/2$, que radia con fase opuesta a la de A; en dirección transversal, la interferencia es pues totalmente destructiva.

Más en general, en una dirección cualquiera fuera del haz llegan un número muy alto de onditas de intensidad muy pequeña y fase arbitraria. La suma de todas ellas es nula o como mucho muy pequeña, así que la potencia esparcida es insignificante.

en un medio denso y homogéneo no ocurre esparcimiento



Luz en dieléctricos y metales: descripción e.m.

Ningún dieléctrico es perfecto y siempre hay alguna corriente; y en un metal pueden también haber efectos de polarización, sobre todo a altas frecuencias. En un material lineal, la densidad de corriente es proporcional al campo eléctrico: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, donde σ es la conductividad. Para frecuencias altas, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho = 0$ (en un dieléctrico porque la carga ligada no tiene el tiempo de acumularse con la continua inversión de polaridad, y en el interior de un metal porque los electrones apantallan el campo incidente). De las ecuaciones de Maxwell se saca:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \Rightarrow \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

(con $\epsilon_r = 1$ para un metal)

Onda monocromática en un medio:

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}} = \frac{\omega}{c} n = k' + ik'' \Rightarrow n^2 = \left(\frac{c}{\omega} k \right)^2 = \epsilon_r + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}$$

Además se ha $B = E/v$ y

$$I = \frac{1}{2\mu_0 v} E_0^2, \text{ con } v = v_f = \frac{c}{n'}$$

- parte real de k (o n) : velocidad de fase 4-17, 4-18

- parte imaginaria de k (o n) : atenuación:

$$k = k' + ik'' \Rightarrow \vec{E} = E_x \hat{i} \exp\{i(k'x - \omega t)\} \exp(-k''x)$$

$$\delta = \frac{1}{k''} \quad \text{longitud de atenuación} \quad \text{4-19}$$

Para frecuencias ω pequeñas en un metal o dieléctrico: $n^2 \approx i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} = e^{i\pi/2} \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \Rightarrow n \approx e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}}$

$$\Rightarrow n' = n'' = \sqrt{b/2} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}} \Rightarrow k' = k'' = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\sigma \omega}{2\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\sigma \omega \mu_0}{2}}$$

4-21

4-20, 4-22

METAL: $\epsilon_r = 1 \Rightarrow$ para ω suficientemente alta ($\omega > \sigma/\epsilon_0$), $n \approx 1$ (sólo que $\sigma = \sigma(\omega)$...)

(\rightarrow compara con la predicción del modelo de plasma: un metal es transparente $\Leftrightarrow \omega > \omega_p$)

Reflexión y refracción en una separación plana

Separación entre medios: la luz es en parte reflejada (R) y en parte transmitida (T) (o sea, refractada). El campo \mathbf{E} (o \mathbf{B}) a un lado de la separación es la suma de \mathbf{E}_I y \mathbf{E}_R , al otro vale \mathbf{E}_T

Condiciones de frontera para la óptica: $\mathbf{B} = \text{const}$, $E_{//} = \text{const}$

Onda incidente monocromática \rightarrow hay una relación fija entre los campos en todo punto \vec{r} de la frontera. Para que sea así en todo momento, las tres ondas (incidente, reflejada y transmitida) han de tener igual fase: $\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega_I t = \vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega_R t = \vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega_T t$

Poniendo el origen $\vec{r} = 0$ en un punto de la frontera, se ha allí $-\omega_I t = -\omega_R t = -\omega_T t$, o sea:

$$\omega_I = \omega_R = \omega_T$$

(\rightarrow consistente con la definición de fotón y conservación de la energía)

Para $t = 0$: $\vec{k}_I \cdot \vec{r} = \vec{k}_R \cdot \vec{r} = \vec{k}_T \cdot \vec{r} \Rightarrow \vec{k}_I, \vec{k}_R$ y \vec{k}_T son coplanares

Tomando \vec{r} coplanar a los vectores de onda se saca pues: $\vec{k}_I \cdot \vec{r} = \vec{k}_R \cdot \vec{r} \Rightarrow k_I r \sin \theta_I = k_R r \sin \theta_R$
es decir: $k_I \sin \theta_I = k_R \sin \theta_R = k_T \sin \theta_T$

\Rightarrow ley de la reflexión

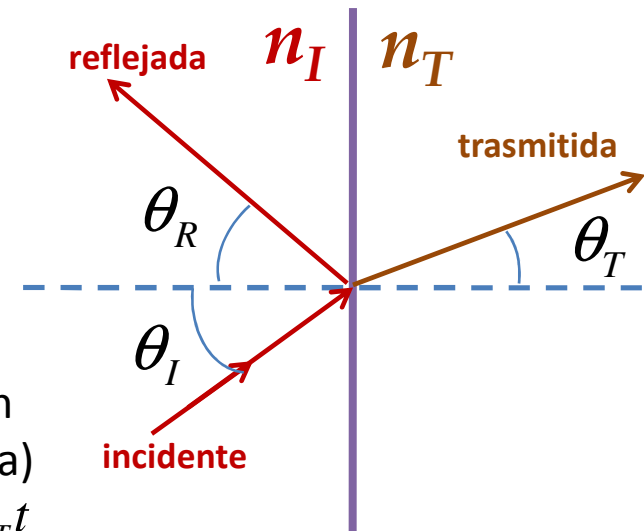
$$\theta_R = \theta_I$$

(onda incidente y reflejada el mismo medio de índice de refracción $n_I \rightarrow$ tienen mismo módulo de \mathbf{k})

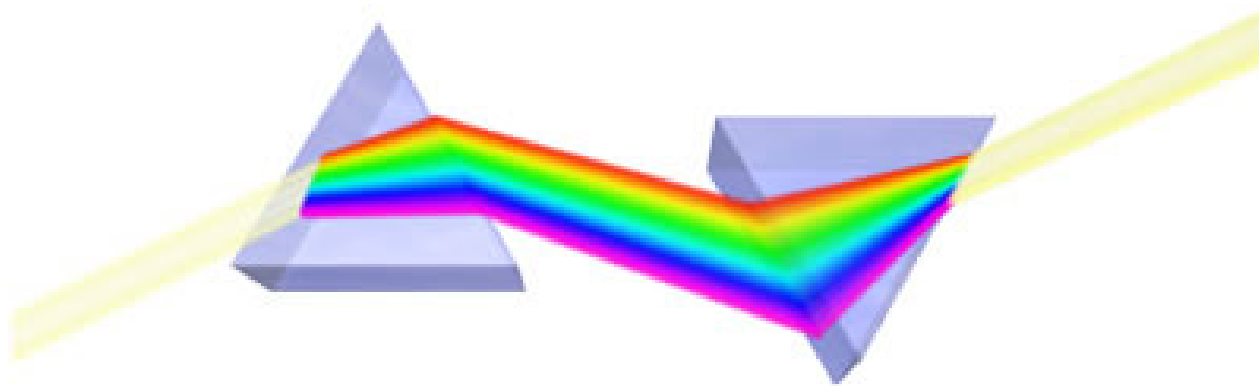
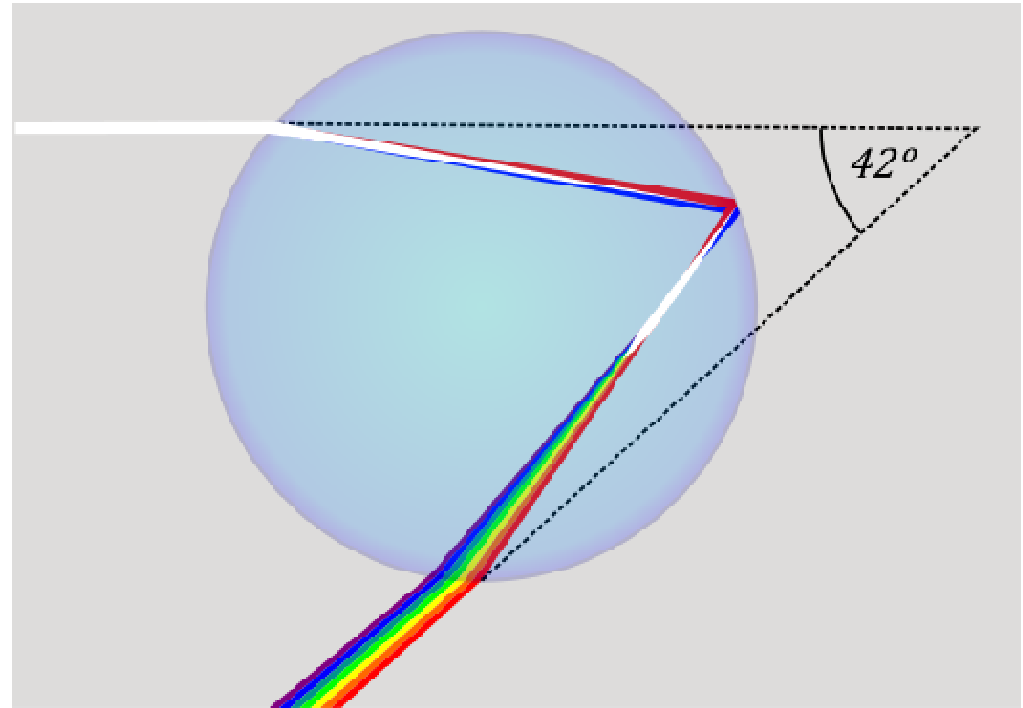
\Rightarrow ley de Snell

$$n_T \sin \theta_T = n_I \sin \theta_I$$

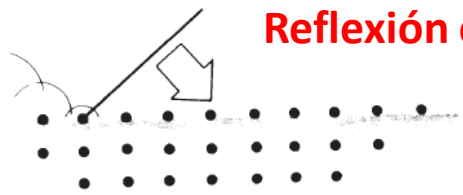
(la onda transmitida se propaga en un medio con $n_T \neq n_I$ la frecuencia es la misma \rightarrow varía la longitud de onda)



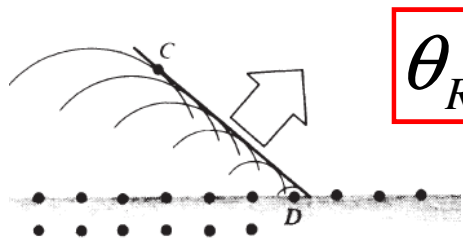
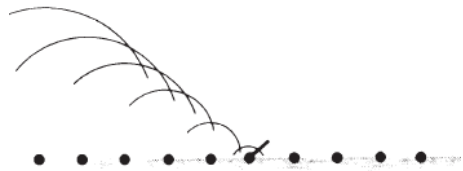
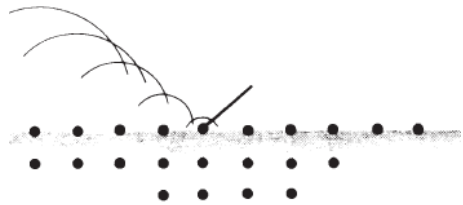
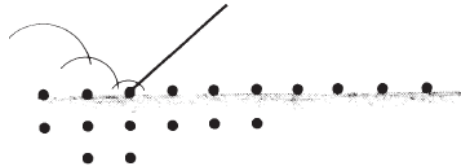
Refracción y medios dispersivos: prisma, arco iris



* Interpretación basada en el esparcimiento



Reflexión especular



$$\theta_R = \theta_I$$

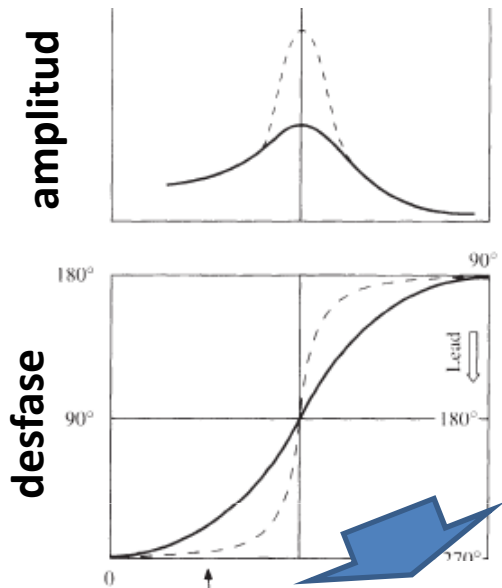
Reflexión difusa



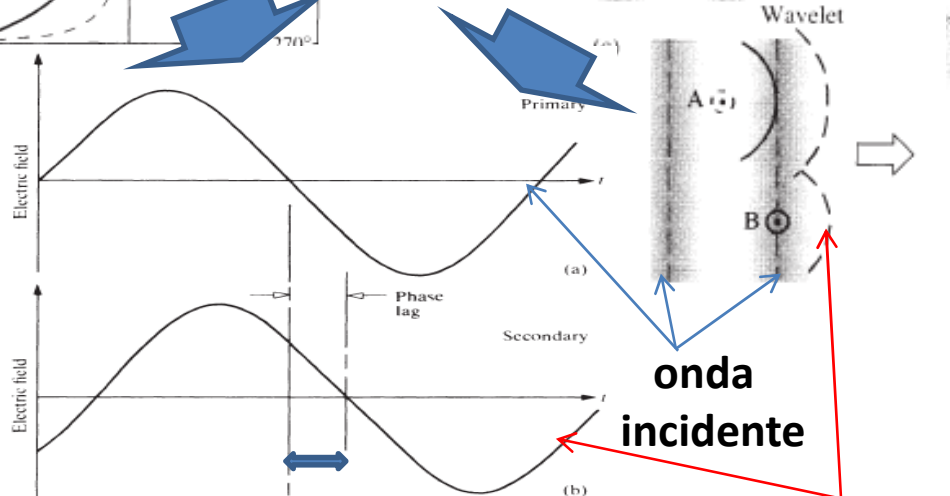
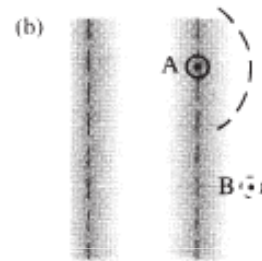
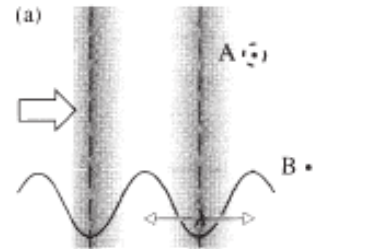
Figure 5.2 A person's face, like everything else we ordinarily see in reflected light, is covered with countless atomic scatterers.

*Esparcimiento: velocidad de fase y refracción

Esparcimiento elástico



Propagación en un medio

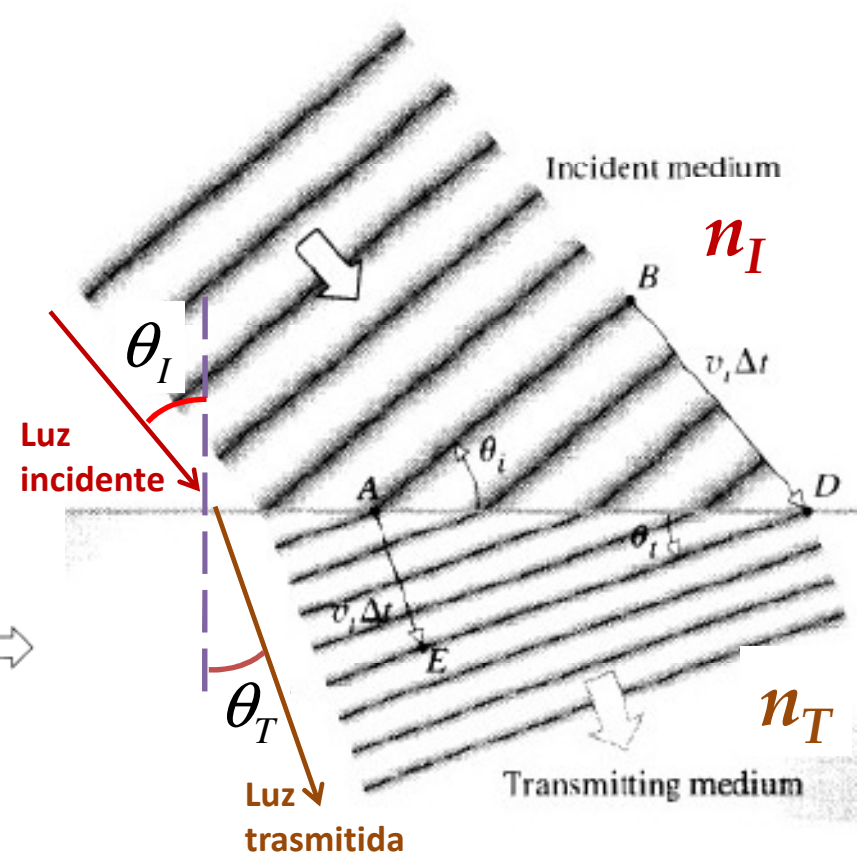


retraso de fase
onda secundaria \Rightarrow

$$v = \frac{c}{n}$$

onda
secundaria

refracción



$$n_T \sin \theta_T = n_I \sin \theta_I$$

Reflectividad para incidencia normal

Condiciones de frontera para la óptica: $\mathbf{B} = \text{const}$, $E_{//} = \text{const}$. Para incidencia normal esto es:

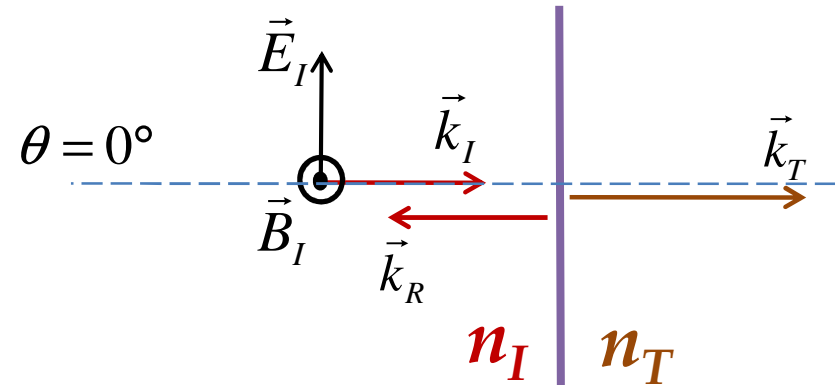
$$\begin{cases} E_{0I} + E_{0R} = E_{0T} \\ B_{0I} + B_{0R} = B_{0T} \end{cases}$$

Por la Ley de Faraday (3ª ec. de Maxwell):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow kE_0 = \omega B_0 \Rightarrow B_0 = \frac{E_0}{\omega/k} = \frac{E_0}{v} = n \frac{E_0}{c}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{0I} + E_{0R} = E_{0T} \\ n_I E_{0I} - n_I E_{0R} = n_T E_{0T} \end{cases}$$

el signo $-$ proviene del cambio de orientación relativa de E y B en la onda reflejada (al ser $\vec{k}_R = -\vec{k}_I$)



Resolviendo para las amplitudes transmitida y reflejada:

$$\begin{cases} E_{0T} = \frac{2n_I}{n_I + n_T} E_{0I} \\ E_{0R} = \frac{n_I - n_T}{n_I + n_T} E_{0I} \end{cases}$$

→ **REFLECTIVIDAD**

4-31

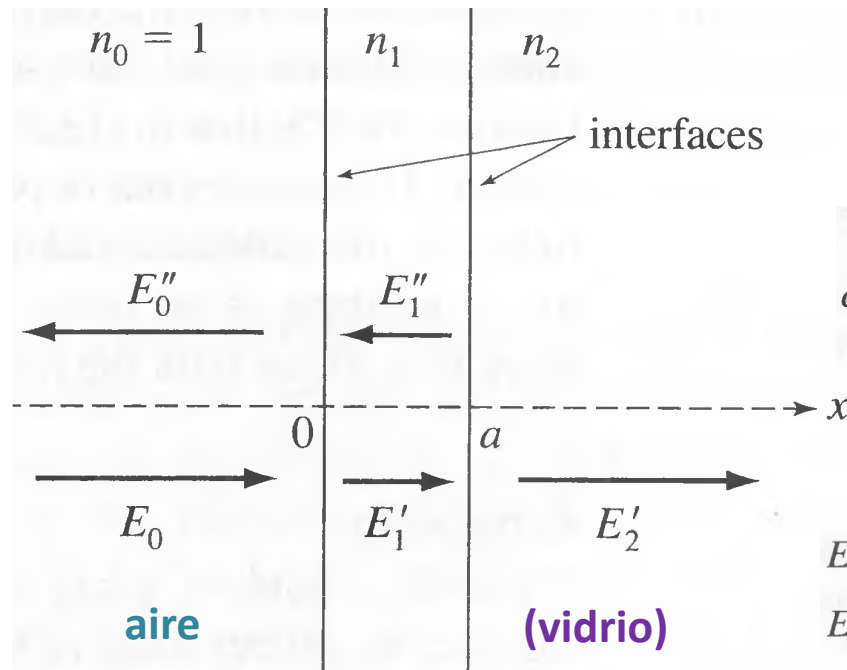
$$R = \frac{I_R}{I_I} = \frac{E_{0R}^2}{E_{0I}^2} = \left(\frac{n_I - n_T}{n_I + n_T} \right)^2$$

NOTAS IMPORTANTES: R es la misma si la luz incide desde un medio o desde el otro.

Para una separación aire/vidrio ($n = 1.5$) → $R = 4\%$. También se define una “trasmisividad” T .

Por la conservación de la energía electromagnética total se ha: $T = \frac{I_T}{I_I} = 1 - R$

*Recubrimiento antirreflejo



$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} E_0 \hat{\mathbf{j}} e^{i(kx - \omega t)} + E_0'' \hat{\mathbf{j}} e^{-i(kx + \omega t)} & \text{for } x \leq 0 \\ E_1' \hat{\mathbf{j}} e^{i(k_1 x - \omega t)} + E_1'' \hat{\mathbf{j}} e^{-i(k_1 x + \omega t)} & \text{for } 0 \leq x \leq a \\ E_2' \hat{\mathbf{j}} e^{i(k_2 x - \omega t)} & \text{for } x \geq a \end{cases}$$

$$c\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} E_0 \hat{\mathbf{z}} e^{i(kx - \omega t)} - E_0'' \hat{\mathbf{z}} e^{-i(kx + \omega t)} & \text{for } x \leq 0 \\ n_1 E_1' \hat{\mathbf{z}} e^{i(k_1 x - \omega t)} - n_1 E_1'' \hat{\mathbf{z}} e^{-i(k_1 x + \omega t)} & \text{for } 0 \leq x \leq a \\ n_2 E_2' \hat{\mathbf{z}} e^{i(k_2 x - \omega t)} & \text{for } x \geq a. \end{cases}$$

Condiciones de frontera →

en $x = 0$:

$$E_0 + E_0'' = E_1' + E_1''$$

$$E_0 - E_0'' = n_1 (E_1' - E_1'')$$

en $x = a$:

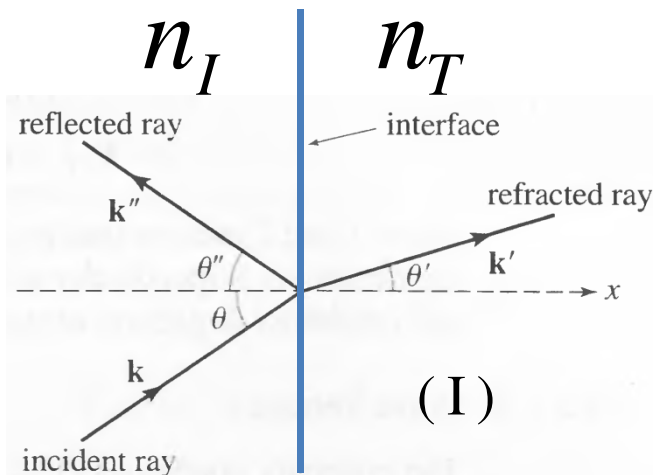
$$E_1' e^{ik_1 a} + E_1'' e^{-ik_1 a} = E_2' e^{ik_2 a}$$

$$n_1 (E_1' e^{ik_1 a} - E_1'' e^{-ik_1 a}) = n_2 E_2' e^{ik_2 a}$$

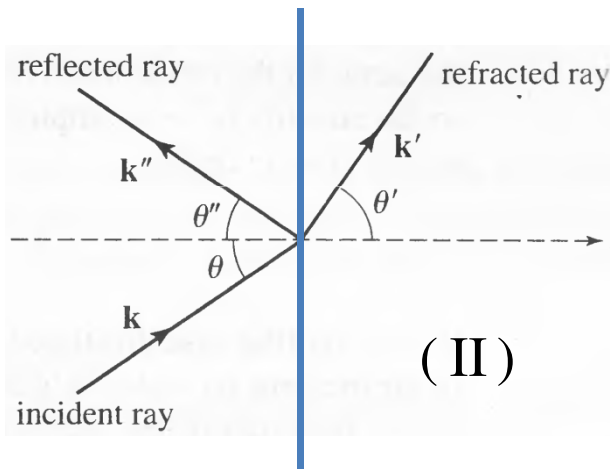
$$E_0'' = 0 \Leftrightarrow \text{Cero reflectividad} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = \sqrt{n_2} \\ a = \lambda_1/4, 3\lambda_1/4, \dots \end{cases}$$

Las lentes (de vidrio, $n_2 = 1.5$) de las cámaras se recubren de una capa delgada de fluoruro de magnesio (MgF_2), que tiene índice de refracción $n_1 = 1.38$, de modo que se cumpla la condición $n_1 = \sqrt{n_2}$ (sólo aproximadamente). El grosor del recubrimiento se elige de forma de utilizar la cantidad mínima de MgF_2 , con λ en el medio del espectro visible. El recubrimiento maximiza la cantidad de luz transmitida, y es importante porque de otra forma cada separación vidrio-aire disminuye del 4% la intensidad incidente.

El mismo concepto se utiliza con aviones de guerra, para hacerlos "invisibles" a los radares



(I)



(II)

Ángulo crítico

$$n_T \sin \theta_T = n_I \sin \theta_I$$

caso I) $n_I < n_T$

Ej: luz que incide sobre un material desde el aire. El ángulo del rayo refracto con la normal es menor que el ángulo incidente

caso II) $n_I > n_T$

4-35



4-32, 4-33

Ej: luz incidente sobre la superficie desde dentro el material
El ángulo de refracción es mayor que el de incidencia
→ existe un ángulo de incidencia (**ángulo crítico**) por el que el ángulo de refracción es 90° :

$$n_T \sin 90^\circ = n_T = n_I \sin \theta_c \Rightarrow \theta_c = \arcsin \frac{n_T}{n_I}$$

para ángulos $\theta_I > \theta_c$ se ha **reflexión total interna**

El vector de onda transmitido tiene componentes: $\vec{k}_T = (k_T \cos \theta_T, k_T \sin \theta_T) = (k_T \sqrt{1 - \sin^2 \theta_T}, k_T \sin \theta_T)$
Utilizando la Ley de Snell, la componente horizontal (ortogonal a la separación) es:

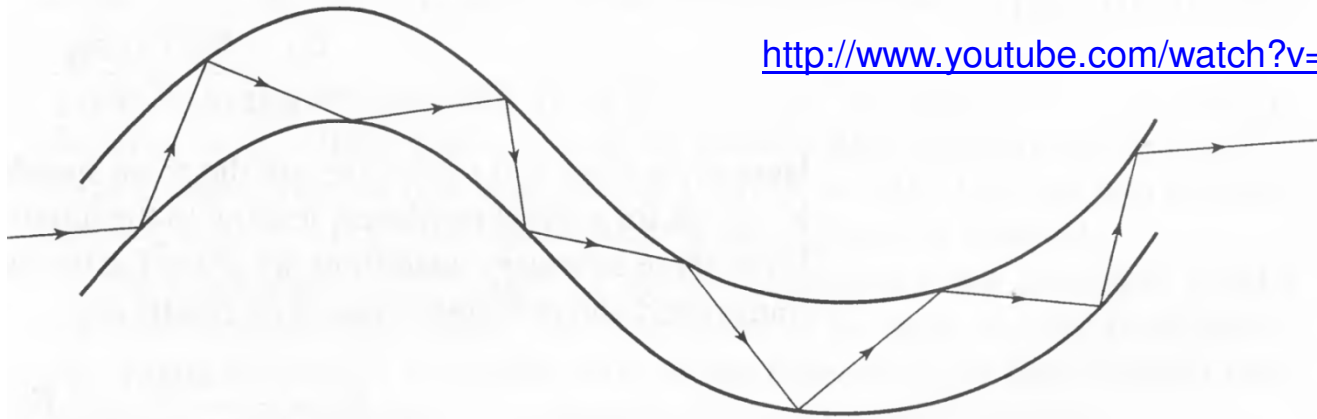
$$k_{T,x} = k_T \sqrt{1 - \left(\frac{n_I}{n_T} \sin \theta_I \right)^2}$$

Reflexión total interna ($\theta_I > \theta_c$) $\Rightarrow k_{T,x}$ puramente imaginario,
la onda transmitida decae rápidamente en la dirección normal

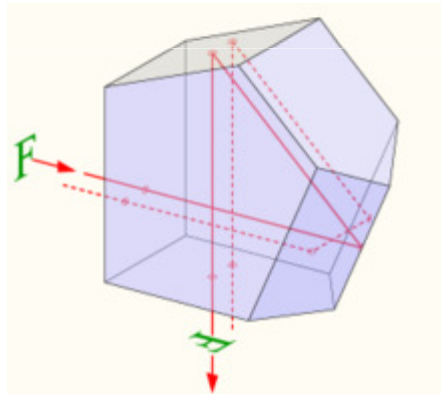
→ **onda evanescente** , con longitud de atenuación $\delta = 1/|k_{T,x}|$

Aplicaciones de la reflexión total interna

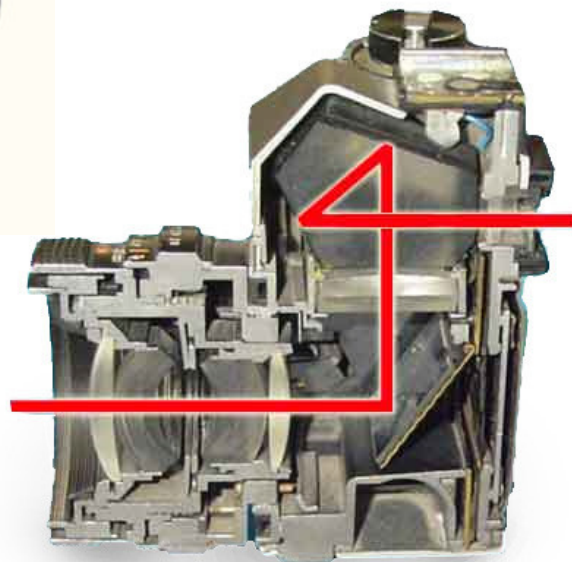
FIBRAS ÓPTICAS



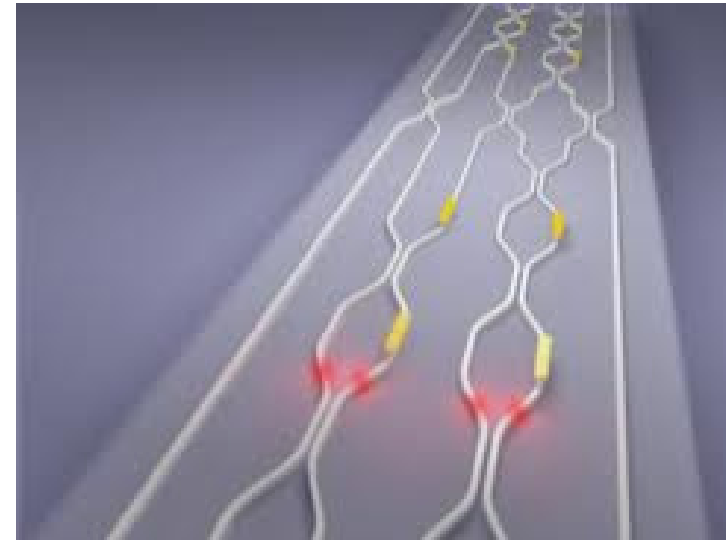
http://www.youtube.com/watch?v=hBQ8fh_Fp04&feature=related



PENTAPRISMA CÁMARA REFLEX

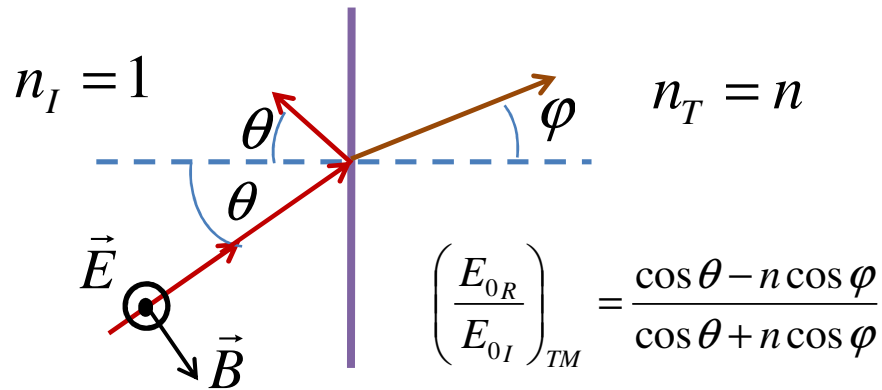


ÓPTICA INTEGRADA

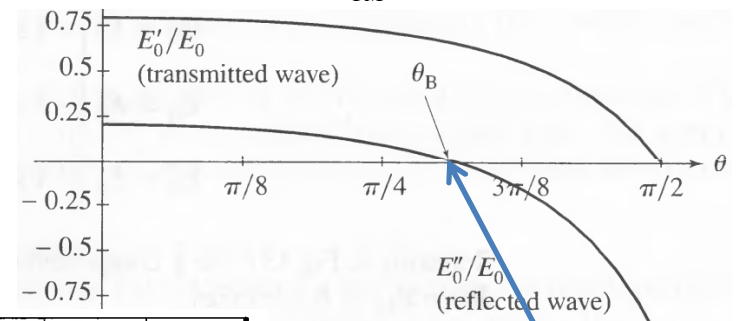
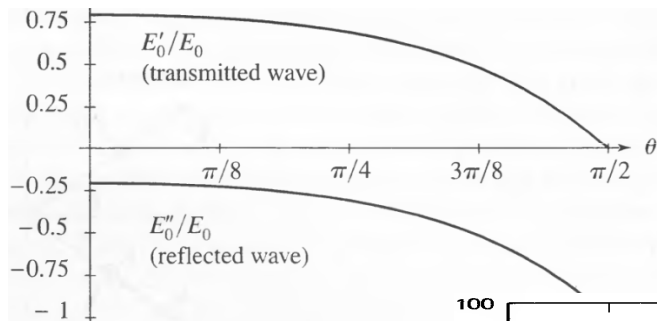
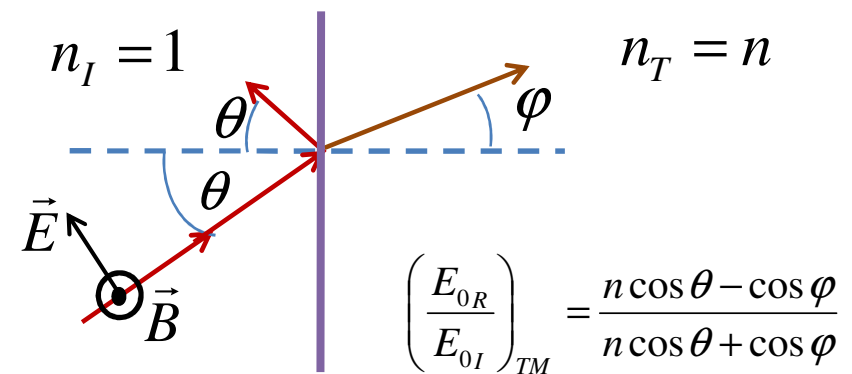


*Ecuaciones de Fresnel y ángulo de Brewster

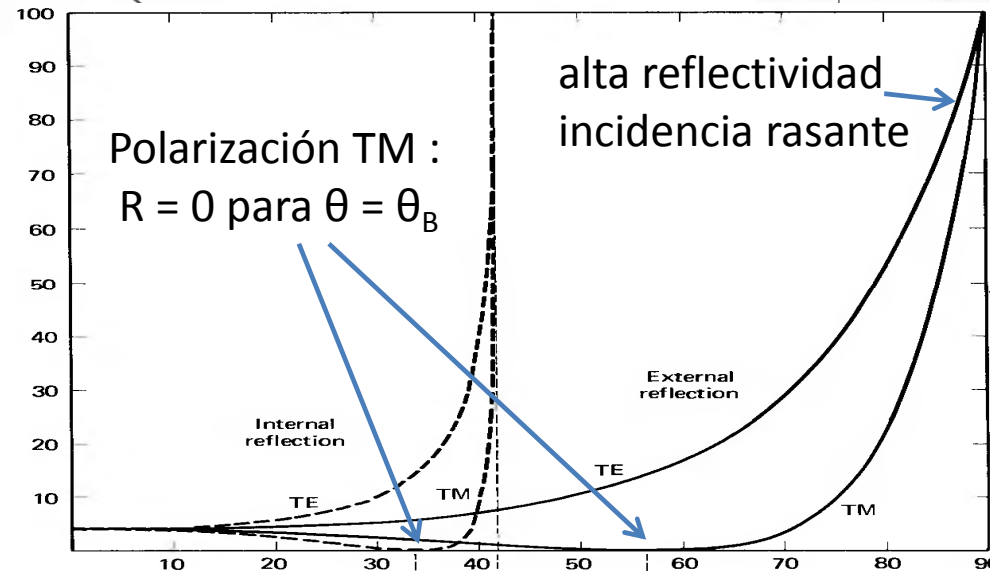
Polarización TE



Polarización TM



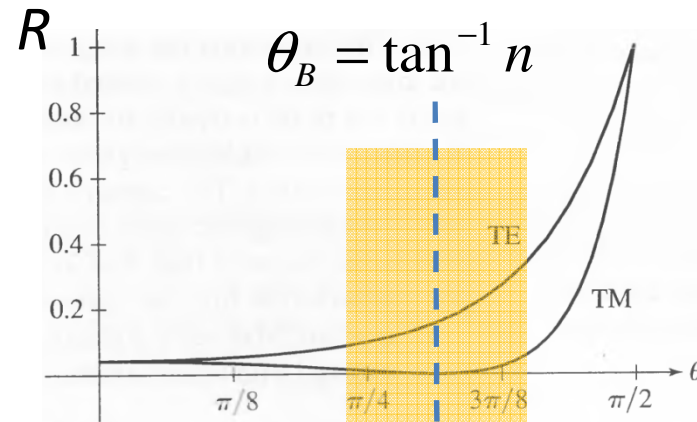
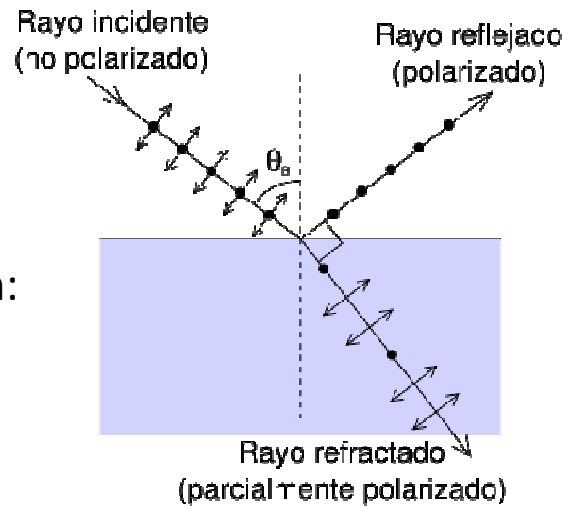
R (%)



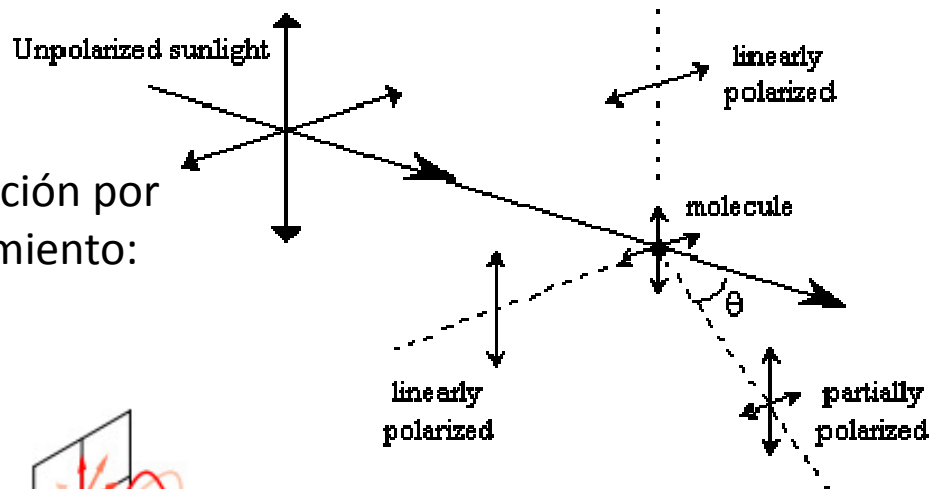
ángulo de Brewster:
 $\tan \theta_B = n$

Polarización: filtros y gafas polaroid

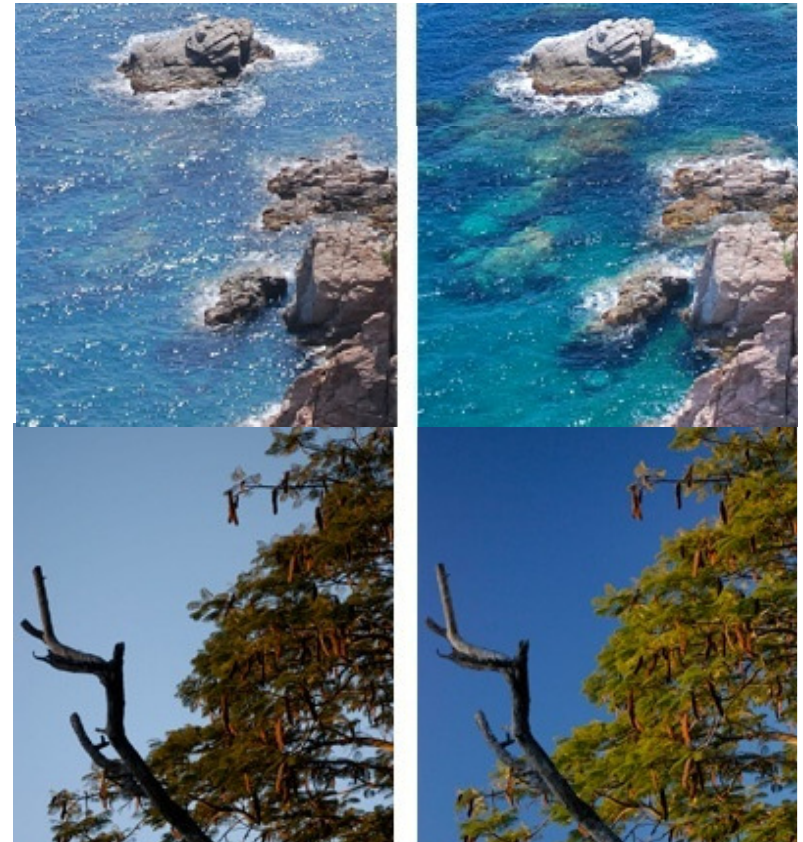
Polarización por reflexión:



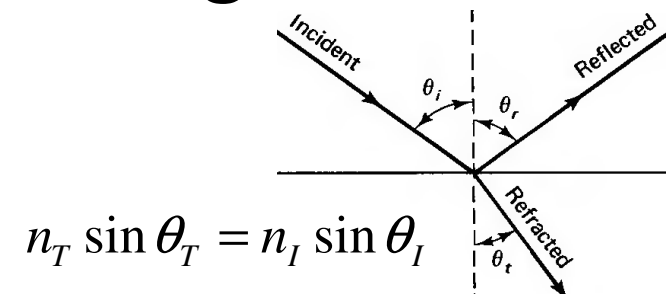
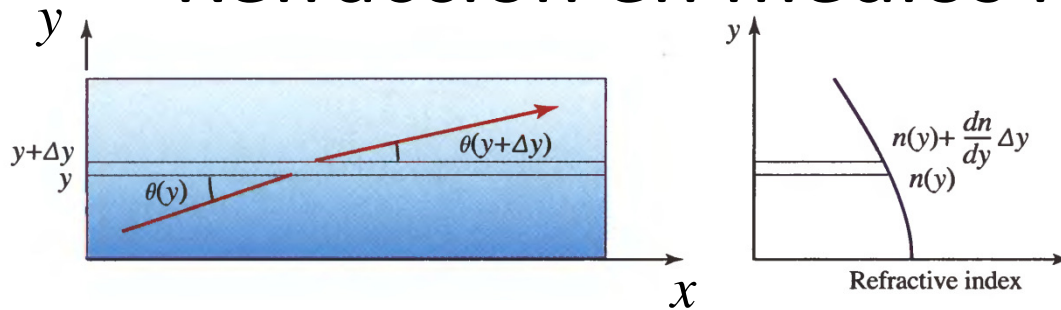
Polarización por esparcimiento:



polarizador :
(gafas/filtro polaroid,
gafas de visión 3D)



* Refracción en medios no homogéneos



$$n_T \sin \theta_T = n_I \sin \theta_I$$

Consideremos un medio no homogéneo con índice de refracción dependiente de la altura y . En el dibujo se ve un rayo casi horizontal que forma, a la posición x y altura y , un ángulo θ con la horizontal, cuya tangente está dada por $\tan \theta = \frac{dy}{dx}$. Al pasar la luz a través de un espesor Δy del medio, el ángulo $\theta(y)$ varía al valor $\theta(y + \Delta y)$ debido a la refracción. Por la

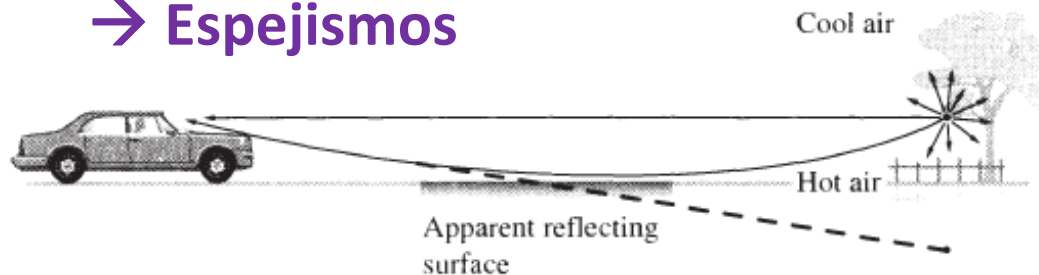
ley de Snell: $n(y) \cos \theta(y) = n(y + \Delta y) \cos \theta(y + \Delta y) = \left(n(y) + \frac{dn}{dy} \Delta y \right) \left(\cos \theta(y) - \sin \theta \frac{d\theta}{dy} \Delta y \right)$

(se ha utilizado la expansión en serie de Taylor de n y del coseno del ángulo). Menospreciando el término en Δy^2 , se halla $\frac{dn}{dy} = n \frac{d\theta}{dy} \tan \theta = n \frac{d\theta}{dy} \frac{dy}{dx} = n \frac{d\theta}{dx}$. Para θ pequeño se ha: $\theta \approx \tan \theta = \frac{dy}{dx}$

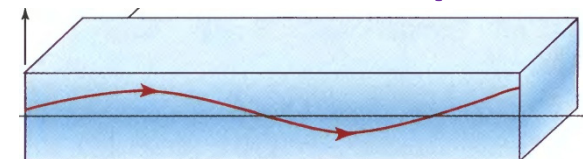
⇒ la ecuación de la trayectoria de la luz en el medio es:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{n(y)} \frac{dn}{dy}$$

→ Espejismos



→ Materiales GRIN (Selfoc)



<http://www.youtube.com/watch?v=d8zUHBbfilmM>

Óptica geométrica e instrumentos ópticos (TEMA 5)

Óptica geométrica: es válida la aproximación de rayo (rayo = dirección del vector de onda)
(no nos interesa difracción ni interferencia, sólo la propagación de la luz en línea “recta”)

Finalidad de un instrumento óptico: formar una **imagen** (I) de un objeto (O). La imagen es:
- **real** (como la que se imprime en la película fotográfica de una cámara), o por el contrario:
- **virtual** (como la que se ve en un espejo).

Ej: espejo plano: los rayos que salen del objeto puntual O son reflejados de forma que parecen salir de un punto I que está detrás del espejo mismo. I es una imagen virtual

La distancia $|d_o| = \overline{OV}$ se llama distancia objeto

La distancia $|d_i| = \overline{VI}$ se llama distancia imagen

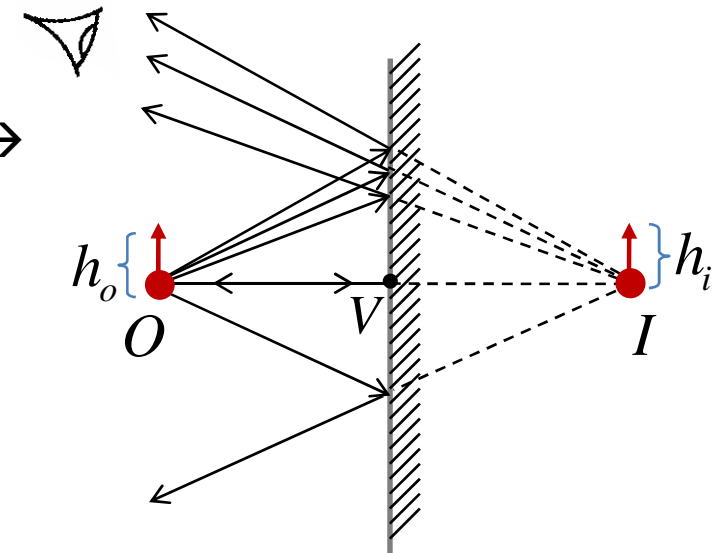
Para un espejo plano $d_i = d_o$

En el caso de que el objeto no sea un solo punto, la imagen puede ser aumentada o reducida, y derecha o invertida. Se define la **magnificación** (transversal) como:

$$M = \frac{h_i}{h_o}$$

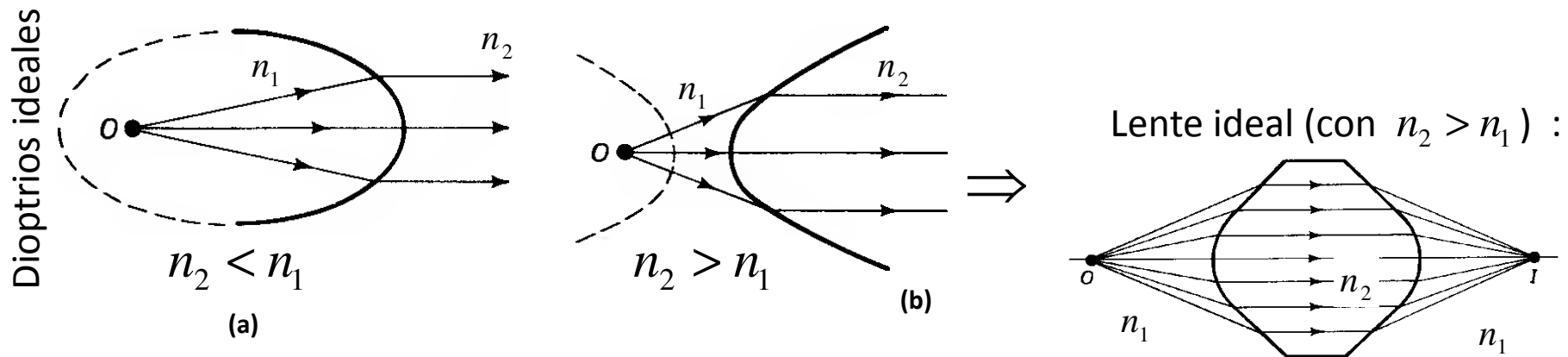
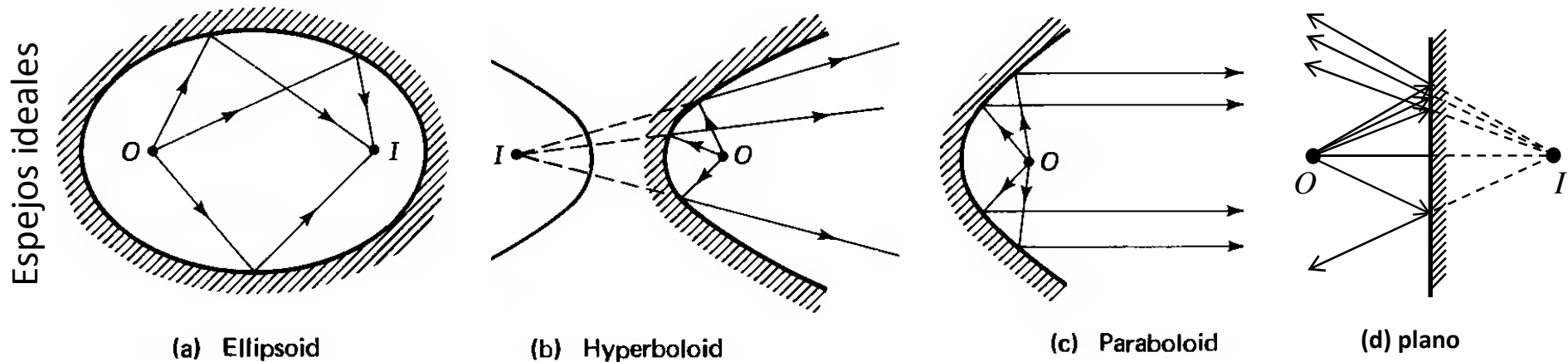
Las “alturas” h llevan signo; en el caso de un espejo plano, h_o y h_i son ambas en el mismo sentido (p. ej. hacia arriba) y tienen igual módulo:

$$\Rightarrow M_{(\text{espejo plano})} = +1$$



Instrumentos ópticos “ideales”

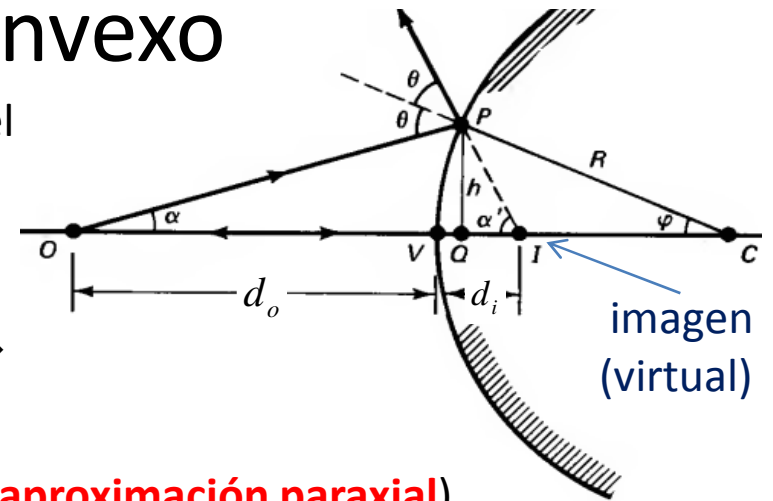
Todos rayos que salen del punto O y entran en el instrumento – y sólo ellos – llegan al punto I



Superficies cónicas son difíciles de obtener; además la forma de una superficie refractora (**dioptrio**) ideal depende de los índices de refracción \rightarrow por cada longitud de onda se necesitaría una superficie distinta. Esencialmente sólo se usan espejos parabólicos e hiperbólicos, y por lo demás se utilizan superficies reflectoras/refractoras **planas** o **esféricas**

Espejo esférico convexo

Las distancias objeto e imagen se miden del "vértice" V del espejo, que es el punto del espejo más cercano al objeto. Sea C el centro de la superficie esférica (convexa). Para encontrar la relación de las distancias empezamos de las relaciones angulares: $2\theta = \alpha + \alpha'$ y $\theta = \alpha + \varphi$ →

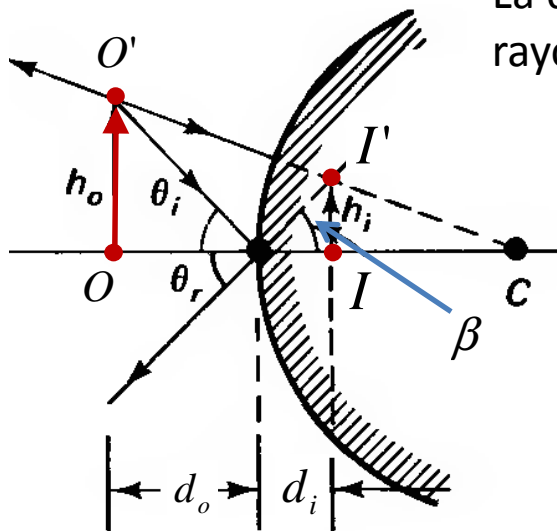
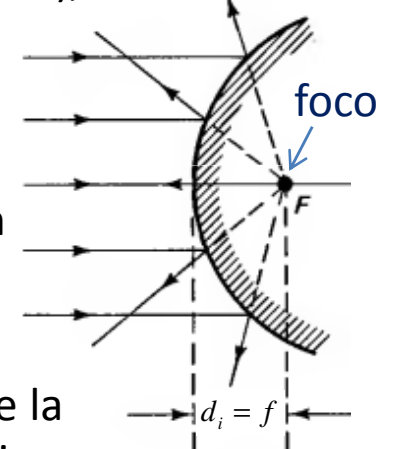


Eliminando el ángulo θ se halla: $\alpha - \alpha' = -2\varphi$

Si los ángulos α , α' y φ son suficientemente pequeños (**aproximación paraxial**), pueden remplazarse por sus tangentes (menospreciando la distancia VQ).

Se halla así $\frac{h}{d_o} - \frac{h}{d_i} = -2\frac{h}{R}$, es decir: $\frac{1}{d_o} - \frac{1}{d_i} = -\frac{2}{R} = \frac{1}{f}$, con $f = -\frac{R}{2}$

La distancia focal $|f|$ es la distancia en que convergen rayos paralelos (es decir, provenientes de $d_o \rightarrow \infty$)



Para un objeto no puntual, utilizando el dibujo de la izquierda se puede ver que los dos puntos O y O' del objeto (flecha roja) forman imágenes en I e I'. Todo rayo que sale de O' después de la reflexión tiene que pasar por el punto I'.

Por tanto los ángulos β y θ_i son iguales y se ha $\frac{h_o}{d_o} = \frac{h_i}{d_i}$

⇒ la magnificación depende de las distancias objeto e imagen y vale: $M = \frac{h_i}{h_o} = \frac{d_i}{d_o}$

Ecuación espejos esféricos y planos

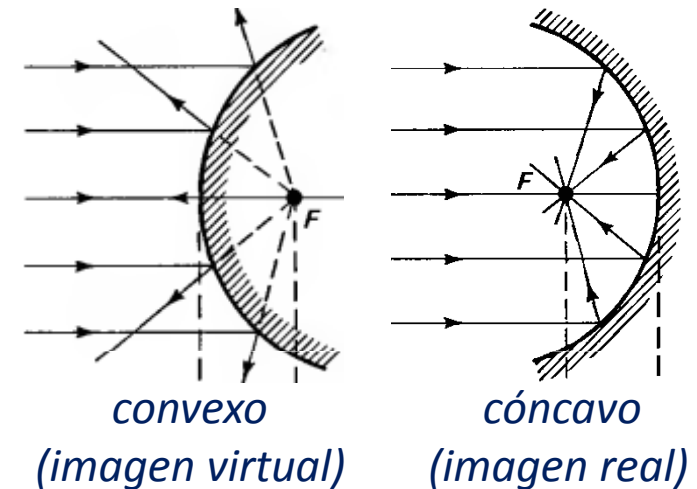
Utilizando una convención sobre signos, las ecuaciones que acabamos de ver para un espejo esférico convexo se pueden generalizar también a espejos esféricos cóncavos y a espejos planos. Si el espejo es cóncavo, el centro de curvatura es a la izquierda, la imagen es real, y se halla una ecuación parecida para las distancias objeto e imagen, pero con todos los signos positivos.

Se utiliza la convención que:

- 1) la distancia imagen es positiva si la imagen es real, y negativa si la imagen es virtual ;
- 2) el radio R es positivo para un espejo esférico convexo, y negativo para uno cóncavo ;

Entonces ambos casos se pueden resumir en las fórmulas:

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = -\frac{2}{R} = \frac{1}{f}, \quad M = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o}$$



Estas fórmulas valen también para espejos planos, para los que $R \rightarrow \infty$

(la distancia focal $f = -\frac{R}{2}$ es la distancia a donde convergen rayos incidentes paralelos; para un espejo plano la distancia focal es infinita, igual que el radio de curvatura).

ECUACIÓN del ESPEJO $\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = -\frac{2}{R}$

Convenio de SIGNOS: **REAL y CONVEXO = POSITIVO**

5-5

5-3, 5-6, 5-7

Ecuación dioptrios esféricos y planos

Dioptrio : superficie de refracción entre dos materiales

La Ley de Snell $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ es, en aproximación paraxial: $n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$

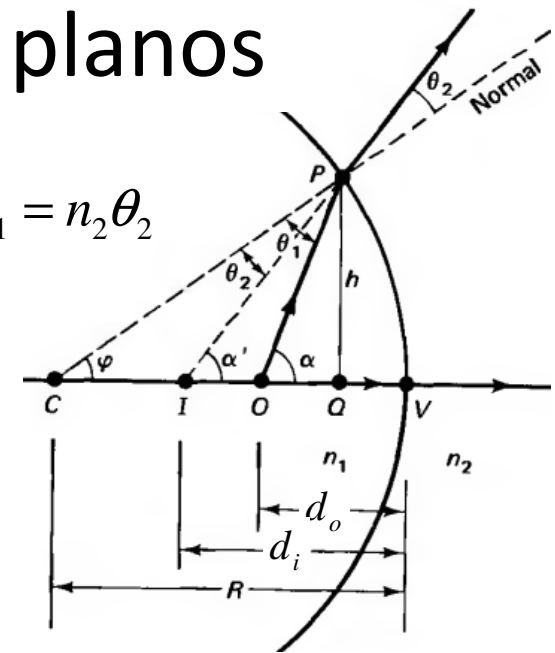
Utilizando las relaciones angulares $\alpha = \theta_1 + \varphi$ y $\alpha' = \theta_2 + \varphi$,

se ha pues: $n_1(\alpha - \varphi) = n_1(\alpha' - \varphi)$

En términos de las distancias, esto es $n_1 \left(\frac{h}{d_o} - \frac{h}{R} \right) = n_2 \left(\frac{h}{d_i} - \frac{h}{R} \right)$

Utilizando la misma convención para los signos que utilizamos para los espejos, se halla pues:

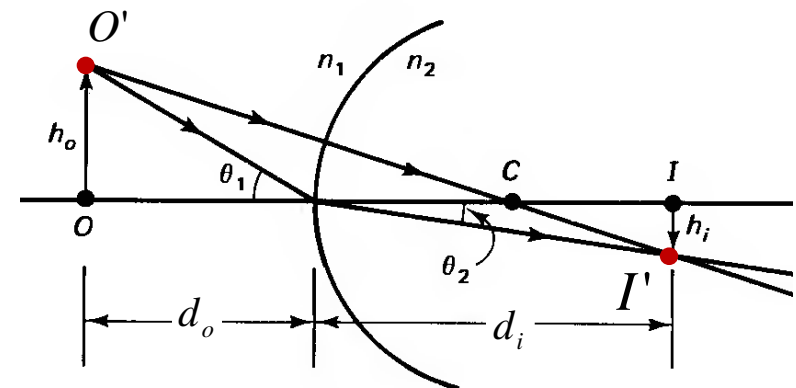
$$\frac{n_1}{d_o} + \frac{n_2}{d_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{1}{f}$$



Esta ecuación vale para dioptrios esféricos (convexos y cóncavos) y planos ($R \rightarrow \infty$). También para los dioptrios puede hallarse la magnificación, a partir

de la relación $n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$, que da: $n_1 \left(\frac{h_o}{d_o} \right) = n_2 \left(\frac{h_i}{d_i} \right)$

$$\Rightarrow M = \frac{h_i}{h_o} = - \frac{n_1}{n_2} \frac{d_i}{d_o}$$



ECUACIÓN del DIOPTRIO $\frac{n_1}{d_o} + \frac{n_2}{d_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{1}{f}$

Convenio de SIGNOS: REAL y CONVEXO = POSITIVO

Lente : combinación de dos dioptros esféricos

La luz que atraviesa una lente (b) pasa por las dos caras de la misma, que son dioptros: así la imagen final es el resultado de 2 “aumentos” sucesivos.

La 1ª cara, de radio R_1 , forma por si sola una imagen

dada por la ecuación:
$$\frac{n_1}{d_o} + \frac{n_2}{d_i} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}$$

Esta imagen sería visible si sólo hubiese la primera cara de la lente (a); pero al ser interceptada por la 2ª cara, de radio R_2 , actúa como “objeto” (virtual)

para ésta, según la ecuación:
$$\frac{n_2}{d_o'} + \frac{n_1}{d_i'} = \frac{n_1 - n_2}{R_2}$$

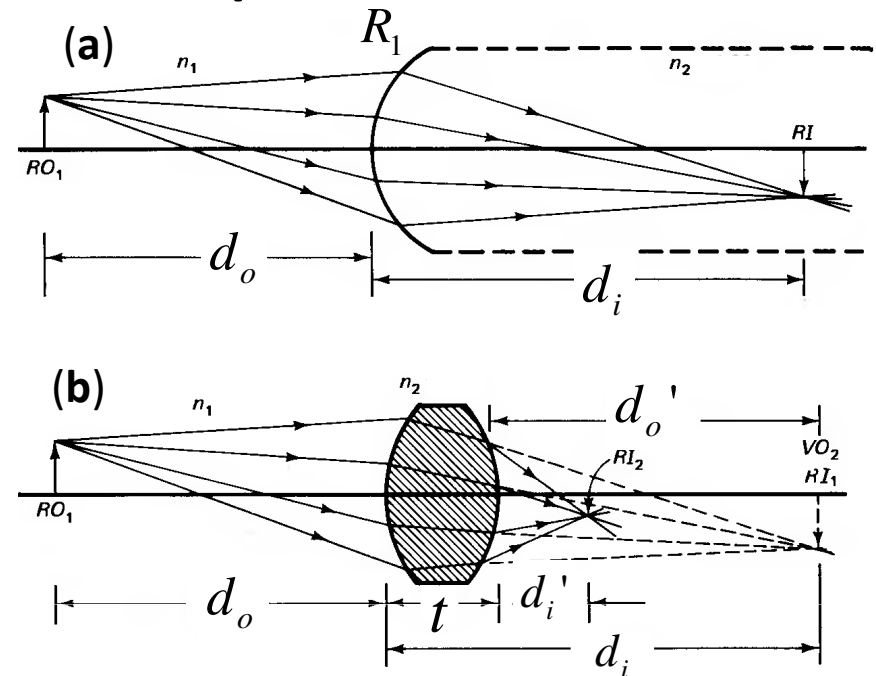
Estas dos ecuaciones se pueden resolver para hallar la distancia imagen final, utilizando el hecho que $d_o' = t - d_i$ (esto da el signo correcto de d_o'), siendo t el ancho máximo de la lente (distancia entre los vértices)

En el caso de una **lente delgada**, la separación entre las caras es casi cero (o al menos pequeña respecto de las distancia objeto e imagen, una condición que habitualmente se cumple). En tal

supuesto $d_o' = -d_i$ y se puede escribir entonces
$$\frac{n_1}{d_o} + \left(\frac{n_2}{d_i} + \frac{n_2}{d_o'} \right) + \frac{n_1}{d_i'} = \frac{n_1}{d_o} + \frac{n_1}{d_i'} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_1 - n_2}{R_2},$$

o sea:
$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i'} = \frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$
 que define la distancia focal f de la lente

Lente (delgada) = combinación de 2 dioptros en serie (casi solapados)



Ejemplo: comparación dioptrio / lente

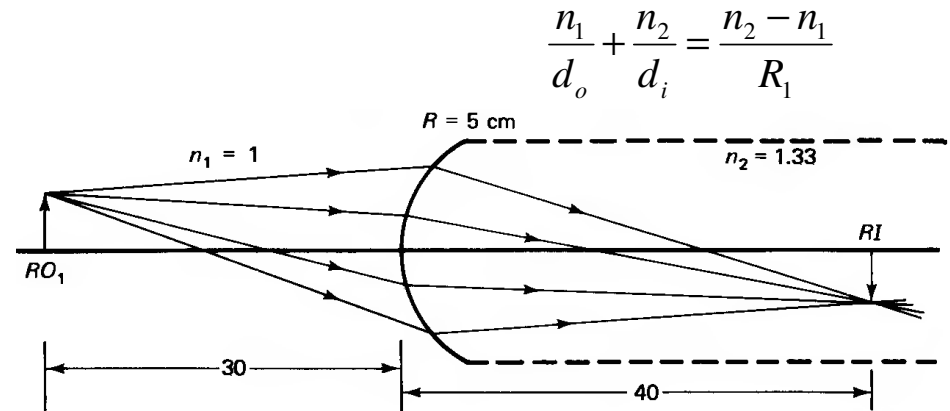
In (a), a real object is positioned in air, 30 cm from a convex spherical surface of radius 5 cm. To the right of the interface, the refractive index is that of water.

$$\text{In (a), } \frac{1}{30} + \frac{1.33}{d_i} = \frac{1.33 - 1}{5}$$

giving $d_i = +40$ cm. The positive sign indicates that the image is real and so is located to the right of the surface, where real rays of light are refracted.

$$M = -\frac{(1)(+40)}{(1.33)(+30)} = -1$$

indicating an inverted image, equal in size to that of the object.



(a)

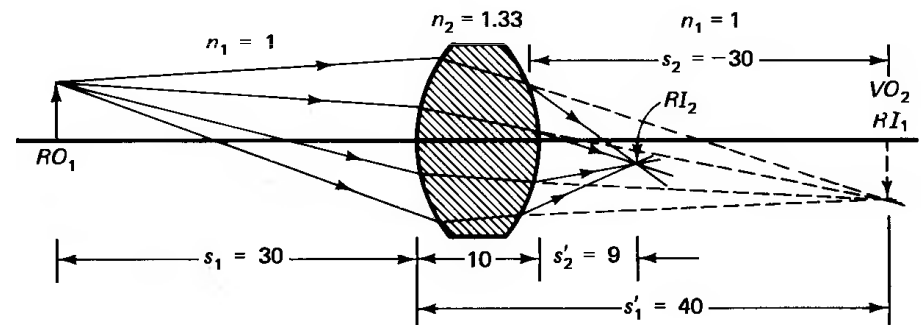
Let us suppose now (Figure 3-20b) that the second medium is only 10 cm thick, forming a *thick lens*, with a second, concave spherical surface, also of radius 5 cm. The refraction by the first surface is, of course, unaffected by this change. Inside the lens, therefore, rays are directed as before to form an image 40 cm from the first surface. However, these rays are intercepted and again refracted by the second surface to produce a different image, as shown. Since the convergence of the rays striking the second surface is determined by the position of the first image, its location now specifies the appropriate object distance to be used for the second refraction. We call the real image for surface (1) a *virtual object* for surface (2). Then, by the sign convention established previously, we make the virtual object distance, relative to the second surface, a negative quantity. Then:

$$\frac{1.33}{-30} + \frac{1}{d_i'} = \frac{1 - 1.33}{-5}$$

or $d_i' = +9$ cm. The magnification is:

$$M = \frac{(-1.33)(+9)}{(1)(-30)} = +\frac{2}{5}$$

The final image is then $\frac{2}{5}$ the lateral size of its (virtual) object and appears with the same orientation. Relative to the original object, the final image is $\frac{2}{5}$ as large and inverted.



(b)

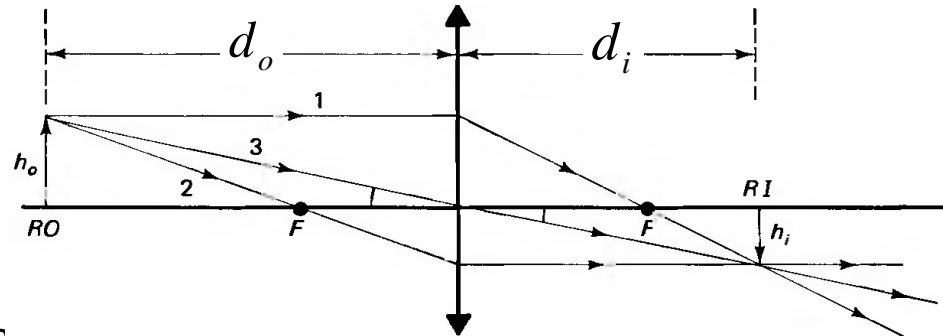
$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i'} = \frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Ecuación lentes delgadas y lentes en contacto

Acabamos de ver que la formación de imágenes por una lente se puede describir por la fórmula

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}, \text{ con } \frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Mirando el dibujo, el rayo (3) que pasa por el centro de la lente atraviesa las dos caras en el punto en que ambas son verticales, por lo que sale sin ser desviado. Se tiene pues la misma



relación que la reflexión: $\frac{h_o}{d_o} = \frac{h_i}{d_i} \Rightarrow$ el aumento es el mismo que el de un espejo:

$$M = -\frac{d_i}{d_o}$$

ECUACIÓN de la LENTE DELGADA

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Convenio de SIGNOS: **REAL y CONVEXO = POSITIVO**

5-25, 5-36

5-27, 5-34

Para dos lentes que estén en contacto, la imagen de la 1ª es esencialmente el "objeto" de la 2ª.

Las ecuaciones de las dos lentes son: $\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f_1}$ y $\frac{1}{d_o'} + \frac{1}{d_i'} = \frac{1}{f_2}$. Con $d_o' = -d_i$ se ha pues:

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i'} = \frac{1}{d_o} + \left(\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_o'} \right) + \frac{1}{d_i'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}, \text{ o sea}$$

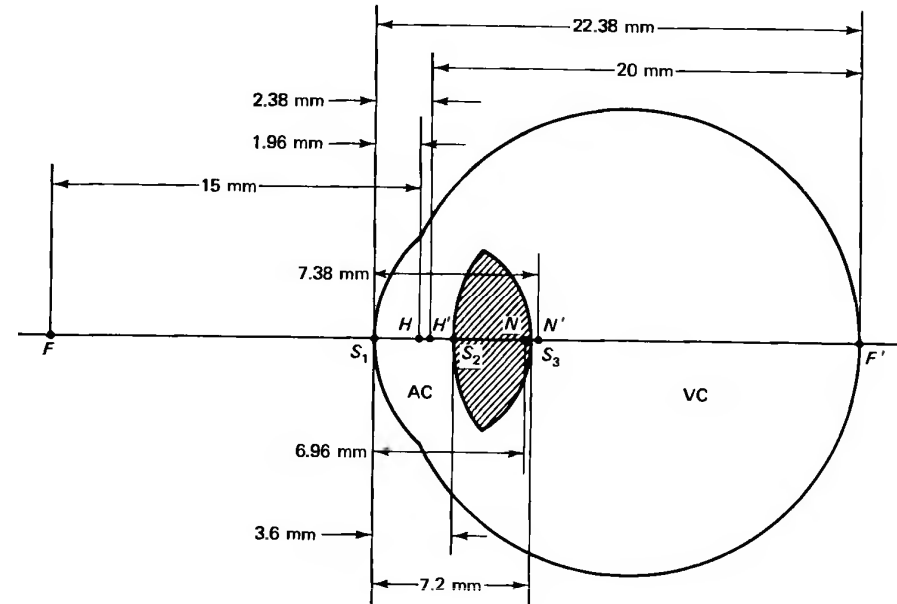
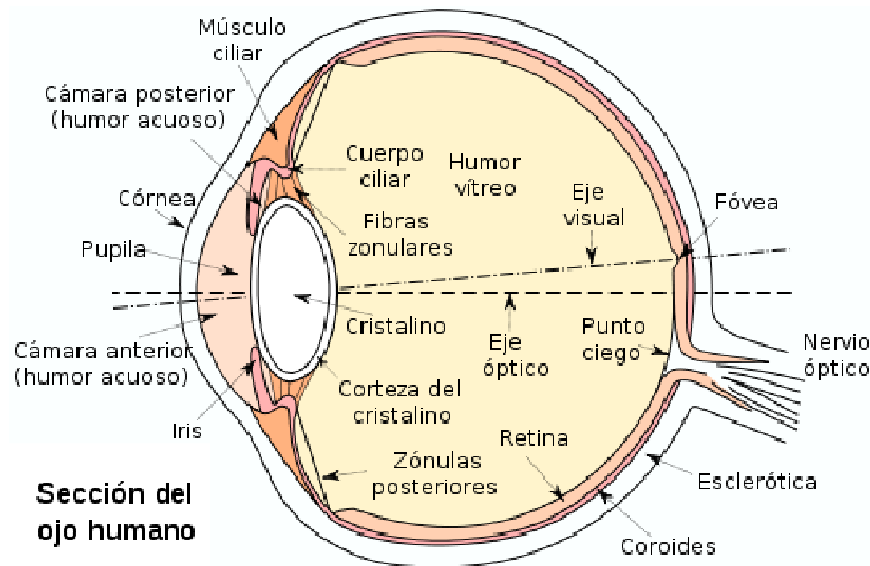
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

También aquí $M = -\frac{d_i}{d_o}$

5-38

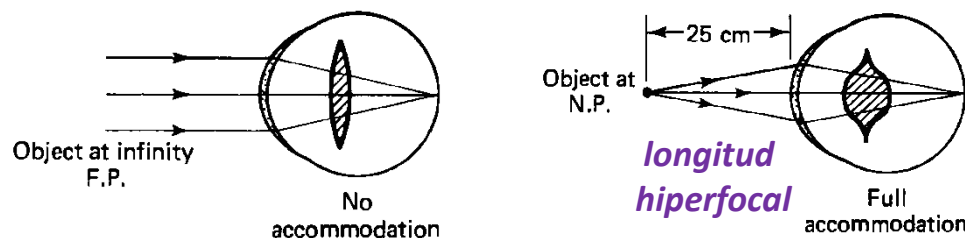
5-42

“aplicación”: el ojo humano



73% del poder dióptrico del ojo humano se debe a la córnea ($n = 1.376$), que actúa como un dioptro esférico para rayos procedentes del aire, el resto a la acción del cristalino ($n = 1.45$). La curvatura y espesor del cristalino se pueden modificar por la contracción del músculo ciliar, un proceso que se llama “acomodación”. En su conjunto, el ojo actúa como una lente delgada positiva de distancia focal 17 mm en el estado relajado del cristalino (visión lejana, sin acomodación) y 14 mm en el estado con el cristalino tensado (visión cercana).

ojo normal



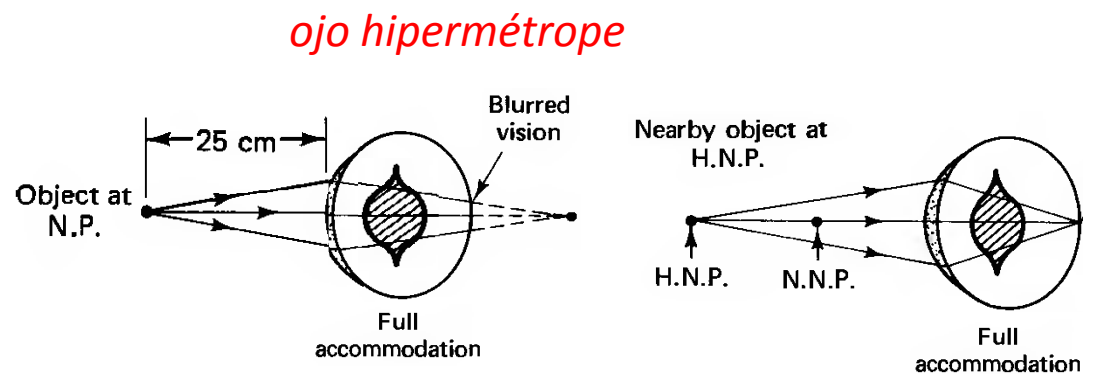
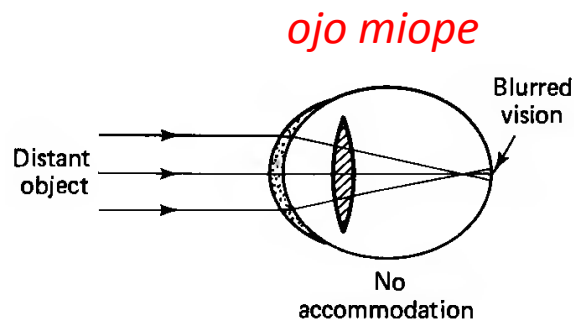
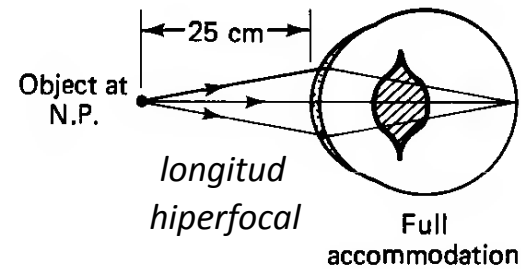
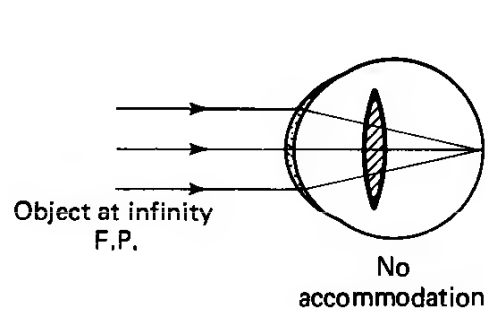
Existe una distancia mínima (*longitud hiperfocal*) por debajo de la que el ojo no es capaz de focalizar. Para el ojo normal es circa 25 cm y corresponde a la máxima acomodación (contracción músculo ciliar)

Defectos de la visión

Pueden ser debidos a:

1) forma no ideal de la superficie de la córnea: la cornea no es esférica sino que tiene dos radios de curvatura distintos si se miden vertical u horizontalmente (*astigmatismo*)

2) forma no ideal del ojo: ojo demasiado "largo" → *miopía*
ojo demasiado "corto" → *hipermetropía*



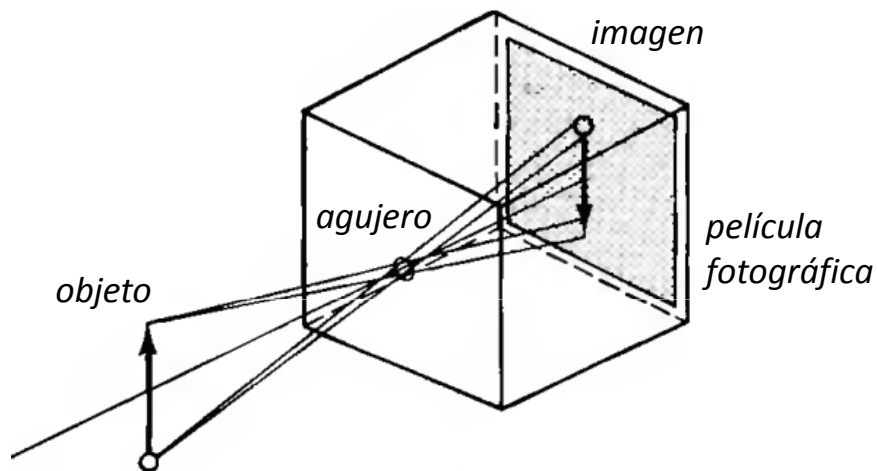
3) incapacidad de acomodación debida p.ej. a mayor rigidez del cristalino con la edad (*presbicia*)

Instrumentos ópticos sencillos

CÁMARA ESTENOPEICA

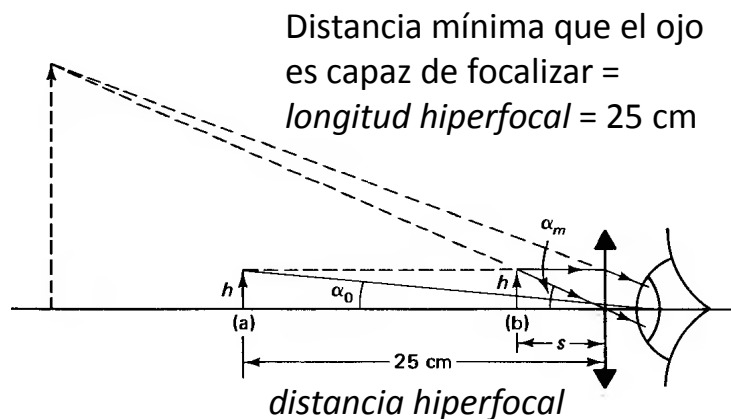
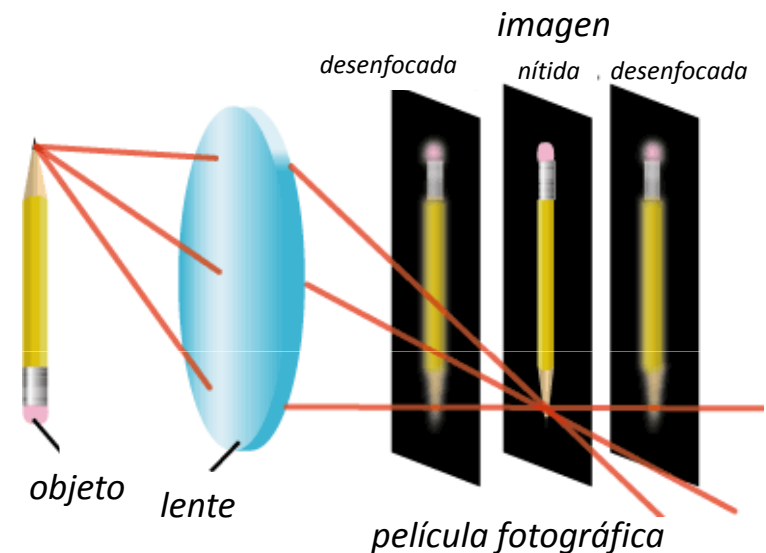
Sistema más simple para formar una imagen

- Ventaja: no focaliza \rightarrow toda distancia está en foco
- Desventaja: poca luz atraviesa el agujero; si éste se hace más grande, la imagen deja de ser nítida



CÁMARA SIMPLE / OJO

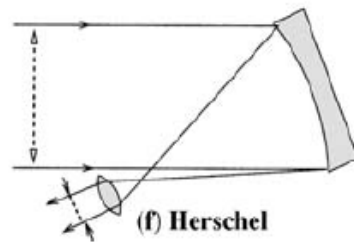
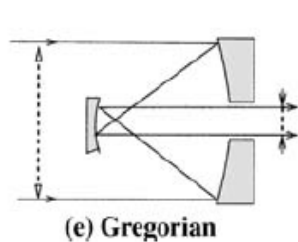
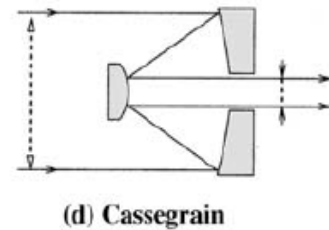
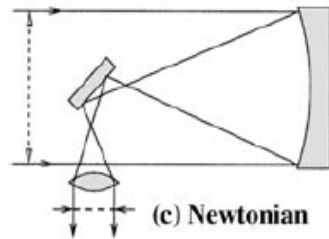
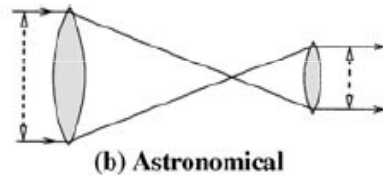
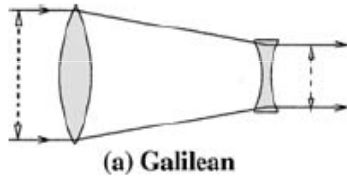
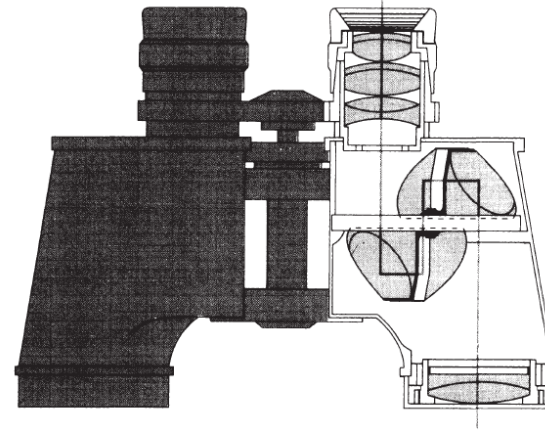
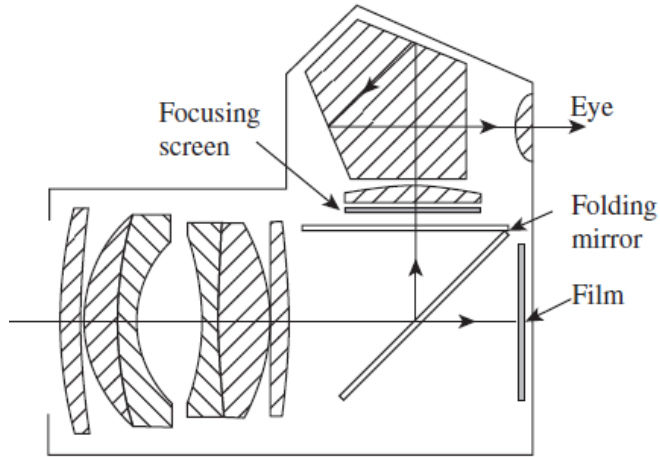
Una lente en lugar del agujero \rightarrow más irradiancia y nitidez; desventaja: sólo se focalizan ciertos planos a distancias fijas



LUPA y GAFAS. El aumento depende de la distancia de la lupa/gafas del ojo, y del objeto a la lente. La lupa se puede colocar a distintas distancias del objeto, y tampoco hace falta mover las gafas (en el caso de la miopía) para ver más cerca o lejos, porque el ojo ajusta el foco de su "lente natural", es decir el cristalino, para focalizar la imagen sobre la retina.

Instrumentos ópticos compuestos

Combinaciones de más lentes (y espejos): lente compuesta de una cámara réflex, binoculares, telescopio, microscopio

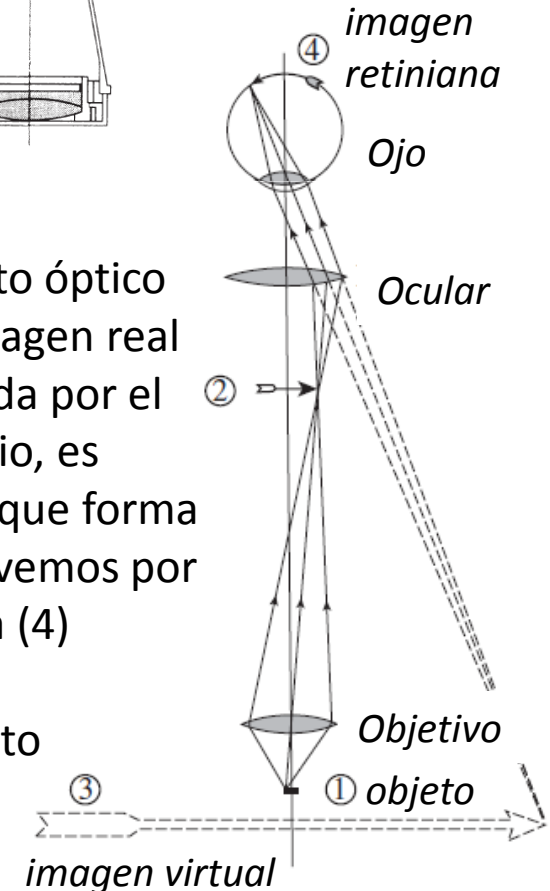


Ocular :

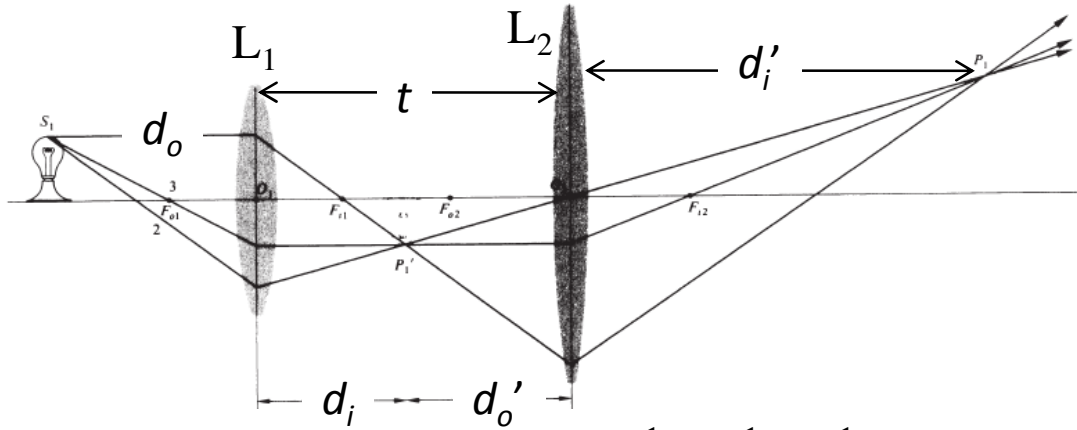
1ª lente de un instrumento óptico (más cerca del ojo). La imagen real (2) del objeto (1), generada por el objetivo de un microscopio, es aumentada por el ocular que forma la imagen virtual (3) que vemos por su proyección en la retina (4)

Objetivo :

lente más cercana al objeto



Dos lentes a distancia t



La ecuación de la 1ª lente L_1 es $\frac{1}{d_i} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{d_o}$, que da $d_i = \frac{f_1 d_o}{d_o - f_1}$

La imagen (intermedia) creada por L_1 actúa como objeto para L_2

La distancia de tal objeto de L_2 es $d_o' = t - d_i$

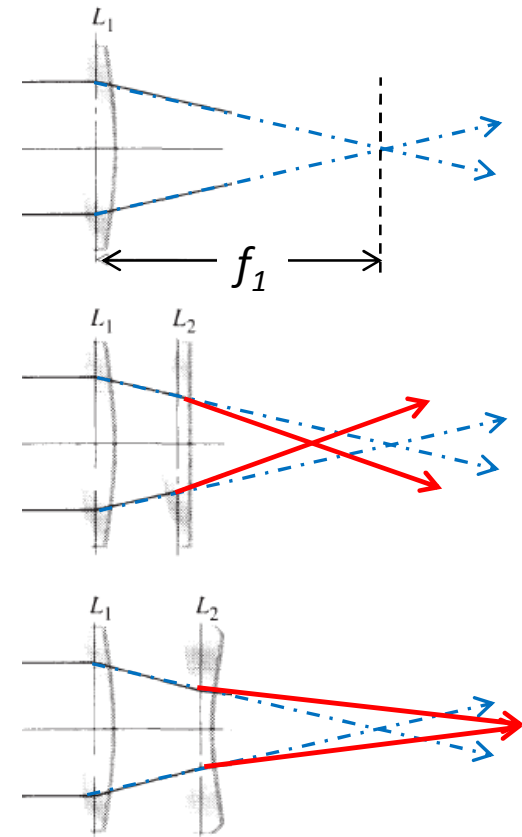
Sustituyendo en la ecuación de la 2ª lente, $d_i' = \frac{f_2 d_o'}{d_o' - f_2}$, se ha:

$$d_i' = \frac{f_2(t - d_i)}{t - d_i - f_2} = \frac{f_2[t - f_1 d_o / (d_o - f_1)]}{t - f_2 - f_1 d_o / (d_o - f_1)}$$

L_2 aumenta la imagen intermedia generada por $L_1 \Rightarrow$ magnificación total $M_{TOT} = M_1 M_2$

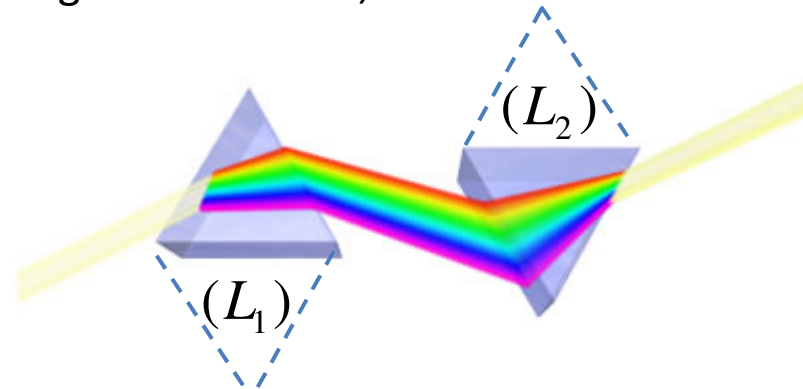
Con $M_1 = -\frac{d_i}{d_o}$ y $M_2 = -\frac{d_i'}{d_o'} = -\frac{d_i'}{t - d_i}$, se ha $M_1 M_2 = \frac{d_i}{d_o} \frac{d_i'}{t - d_i} = \frac{d_i'}{d_o} \frac{1}{(t/d_i - 1)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow M_{TOT} = \frac{d_i'}{t(d_o/f_1 - 1) - d_o}$$



*Aberración cromática y su corrección

Al igual que para un prisma, en una lente hay un efecto de dispersión, que hace que la distancia imagen sea diferente para distintos colores (longitudes de onda). La combinación de dos lentes puede utilizarse para corregir este defecto, conocido como **aberración cromática transversal**.



Para dos lentes delgadas 1 y 2 en aire y hechas del mismo vidrio, la ecuación de cada lente es:

$$\frac{1}{f_1} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}} \right) = (n - 1)K_1 \quad , \quad \frac{1}{f_2} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}} \right) = (n - 1)K_2$$

Si se colocan a una distancia L , se puede mostrar que la longitud focal del conjunto vale aprox.:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{L}{f_1 f_2} \quad , \quad \text{o sea:} \quad \frac{1}{f} = (n - 1)K_1 + (n - 1)K_2 - L(n - 1)^2 K_1 K_2$$

(En realidad esta relación no es cierta para las distancias focales, sino para las distancias entre el punto focal y los llamados “planos principales”; por ello no puede utilizarse en los problemas)

Para minimizar la aberración cromática se requiere que $\frac{d(1/f)}{dn} = K_1 + K_2 - 2LK_1 K_2(n - 1) = 0$

Esto se cumple si $L = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{K_1(n - 1)} + \frac{1}{K_2(n - 1)} \right] = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ (Pedrotti³, cap. 18 y ej. 3-4)

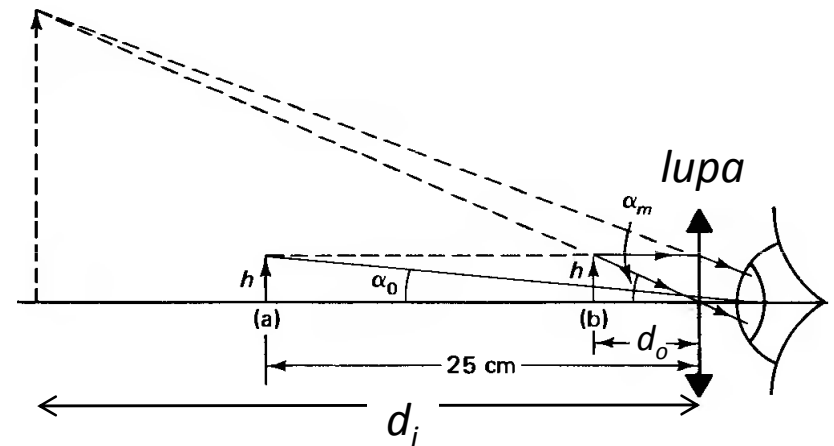
Esta condición sólo involucra las distancias focales; las demás características de ambas lentes se pueden elegir para minimizar otros efectos indeseados (aberración esférica, astigmatismo..)

*Magnificación angular

Los objetos reales y las imágenes virtuales formadas por instrumentos ópticos pueden hallarse a distancias muy grandes (en el caso de un telescopio las distancias objeto pueden ser astronómicas, y en un microscopio la distancia imagen puede ser muy grande). En estos casos, y en todos los instrumentos que tienen un ocular, la magnificación trasversal no es muy útil, y es preferible definir una *magnificación angular*, que da también una estimación de la dimensión de la imagen (real) que se forma en la retina de quien mira.

Ejemplo: la LUPA

Si un objeto pequeño de altura h_o (en cm) se mira a ojo nudo, como mucho se puede acercarlo hasta la distancia hiperfocal de 25 cm (a). En tal posición, el objeto forma, desde el ojo, un ángulo $\alpha_o \approx h_o/25$. Para mirarlo a través de una lupa, se acerca el objeto para que esté dentro de la longitud focal de la lupa (b). El ángulo formado desde el ojo por la imagen (virtual) es, en aproximación paraxial: $\alpha_i \approx h_i/d_i = h_o/d_o$



Se define la magnificación angular como:
$$M_\alpha = \frac{\alpha_i}{\alpha_o} = \frac{h_o/d_o}{h_o/25} = \frac{25}{d_o}$$

→ Si la imagen virtual muy lejana, entonces por la ecuación de la lente $d_o = f$ y $M_\alpha = \frac{25}{f}$

→ Si la imagen virtual se ve en la distancia hiperfocal ($d_i = -25$), entonces:

$$d_o = \frac{25f}{25+f} \quad \text{y} \quad M_\alpha = \frac{25}{f} + 1 \quad \left(\approx \frac{25}{f} \text{ para } f \text{ pequeña} \right)$$

Para lentes de distancias focales cortas pues, siempre es válida la aproximación $M_\alpha = 25/f$

Para una lupa esto es típicamente entre 2x y 10x

Resumen ecuaciones instrumentos ópticos

$$\text{Dioptrio: } \frac{n_1}{d_o} + \frac{n_2}{d_i} = \frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad M = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{n_1}{n_2} \frac{d_i}{d_o}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f} \\ M = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{espejo: } \frac{1}{f} = -\frac{2}{R} \\ \text{lente delgada: } \frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ \text{lentes delgadas} \\ \text{en contacto: } \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \\ \text{*lente gruesa} \\ \text{(de espesor } t\text{): } \frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{n_2 - n_1}{n_1 n_2} \frac{t}{R_1 R_2} \right) \end{array}$$

*dos lentes delgadas
a distancia L :

$$d_i = \frac{f_2 [t - f_1 d_o / (d_o - f_1)]}{t - f_2 - f_1 d_o / (d_o - f_1)} \quad M = \frac{d_i}{t(d_o / f_1 - 1) - d_o}$$

* = estas ecuaciones se encuentran combinando las ecuaciones de 2 dioptrios o de 2 lentes, junto a la condición: $d_o' = t - d_i$

Dan la posición de la imagen final en función de la distancia objeto inicial

SIGNOS: *Distancia imagen: real-positiva, virtual-negativa*
Radio: convexo-positivo, cóncavo-negativo

La cantidad $P = 1/f$ se llama **poder dióptrico** (de la lente, espejo o dioptrio)

Si f es en metros, la unidad de P es la dioptría, definida como $D = m^{-1}$