Tecnologia de la llum

roberto.macovez@upc.edu despacho 11.45 (planta 11)

http://gcm.upc.edu/members/roberto-macovez/docencia

1) la naturaleza de la luz y los fenómenos ópticos
2) aplicaciones tecnológicas:
- fuentes (antenas, incandescencia, luminiscencia, láser)
- espejos, lentes, rejillas de difracción, capas antirreflejo
- instrumentos ópticos (lupa, el ojo, la cámara, telescopio, microscopio)

- análisis de imagen, técnicas de microscopía, visión humana
- semiconductores y optoelectrónica: LED, diodo láser, celdas solares, fotodiodo, pantallas, CCD
- teoría y aplicaciones del láser (holografía, DVD, medicina, materiales…)
- fibras ópticas y telecomunicaciones

- si queda tiempo: un vistazo a las aplicaciones futuras: óptica integrada, plasmónica, cristales fotónicos y metamateriales, invisibilidad …

Estructura de la asignatura (1ª mitad)

1) **Introducción: qué es la luz**

2) **La matemática de las ondas**
- Números complejos y notación compleja
- Ondas monocromáticas planas (y relación con los rayos), ondas esféricas
- Transformada de Fourier (y serie de Fourier)
- Interferencia y velocidad de fase y de grupo

3) **Fuentes de Luz**
- Clasificación de las fuentes electromagnéticas
- Antenas
- Fuentes luminiscentes
- Fuentes incandescentes y de cuerpo negro

4) **Los fenómenos ópticos**
- Interacción microscópica con la materia: emisión, absorción y esparcimiento
- Propagación en un medio aislante o conductor
- Casos particulares de esparcimiento: scattering Bragg, reflexión y refracción

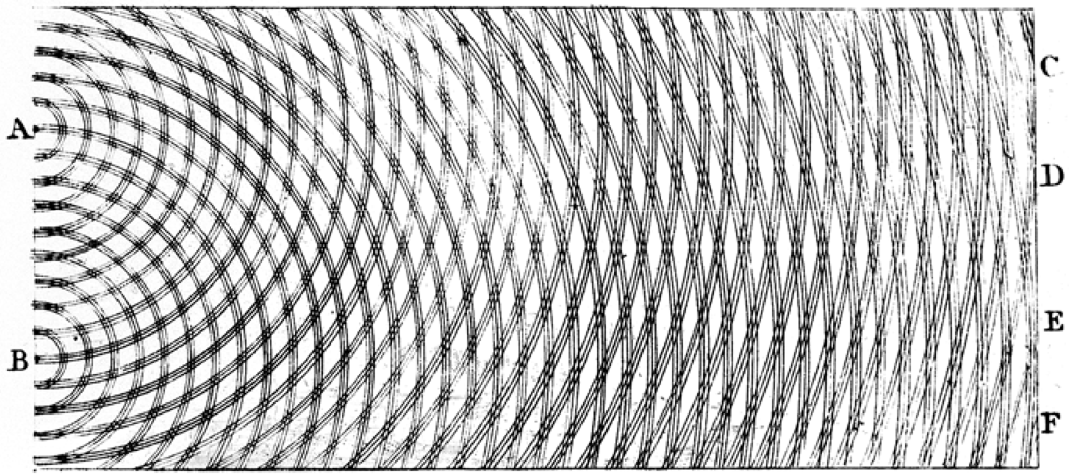
5) **Óptica geométrica e instrumentos ópticos**

Evaluación

$$\underbrace{0{,}2\ \text{EvC} + 0{,}2\ \text{TEST}}_{40\%} + \underset{20\%}{0{,}2\ \text{informe}} + \underset{40\%}{0{,}4\ \text{EF}}$$

¿Qué es la luz? (TEMA 1)

- Siglos XVII y XVIII:
  1609: Galileo desarrolla y usa el telescopio para mirar la luna, Júpiter, los astros
  1676: Rømer demuestra que la luz se propaga con velocidad finita ($c \approx 2.2 \cdot 10^{8} ms^{-1}$)
  1690, 1704: Controversia Huygens – Newton: ¿ luz = onda o partículas?
- 1801: experimento de la doble rendija de Young (interferencia)



- 1808: Malus describe el comportamiento de la polarización de la luz (onda trasversal)
- 1845: Faraday encuentra que un campo magnético puede variar la polarización de la luz que se propaga en un material → relación luz – magnetismo ?
- 1850 y 1862: Primero Fizeau y luego Foucault remiden *c*. El 2º encuentra $2.98 \cdot 10^{8} ms^{-1}$
- 1873: Maxwell descubre que sus ecuaciones predicen la existencia de *ondas electromagnéticas* que se propagan en el vacío

Luz : onda electromagnética

Ec. de Maxwell (en el vacío)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

Utilizando la identidad vectorial: $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V}$ se obtiene la:

Ecuación de onda e.m.

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}}$$

Velocidad de propagación: $\boxed{c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3.0 \cdot 10^8 \, ms^{-1}}$

$$c = 1 \Big/ \sqrt{\left(8.85 \cdot 10^{-12} s^2 C^2 m^{-3} kg^{-1}\right)\left(4\pi \cdot 10^{-7} mkgC^{-2}\right)}$$

En 1D: $\dfrac{d^2 y}{dx^2} - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{d^2 y}{dt^2} = 0$ solución particular ➡ $y(x,t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$

con ω/k = λ ν = c

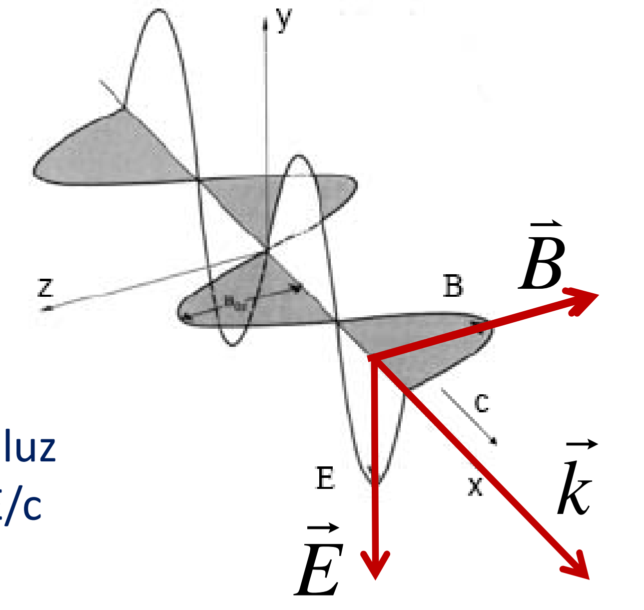
En 3D $\vec{k}$ es un vector, y $\vec{Y}(\vec{r},t) = \vec{A} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)$

$$\left.\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \vec{k} \perp \vec{E} \, , \, \vec{k} \perp \vec{B} \, , \, \vec{B} \perp \vec{E}$$

→ las ondas e.m. son transversales

→ la dirección de **E** se llama <u>polarización</u> de la luz

→ el módulo de **B** de una onda e.m. vale B = E/c



En un medio <u>no conductor</u> semitransparente (p.ej. aire, vidrio)

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &\to \varepsilon_r \varepsilon_0 \\ \mu_0 &\to \mu_r \mu_0 \approx \mu_0 \end{aligned} \Longrightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

con: $\boxed{n = \sqrt{\varepsilon_r} \left(= c/v\right)}$ <u>índice de refracción</u>

1-4

1-1,1-2,1-6

Luz : energía electromagnética

Multiplicando escalarmente por **E** la ecuación de Maxwell $\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B}=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, se halla:

$\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=\varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. Por la identidad vectorial $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)=\vec{B}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)-\vec{E}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)$, se tiene :

$\varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)+\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)=-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}\right)$ (se ha usado también $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$)

Definiendo el **vector de Poynting** $\boxed{\vec{S}=\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}}$, la ecuación anterior se escribe:

$\varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2+\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2=\vec{\nabla}\cdot\vec{S}$. Ya que:

$\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2\rightarrow\text{densidad energía eléctrica}$

$\frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\rightarrow\text{densidad energía magnética}$

$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial t}u_{em}=\vec{\nabla}\cdot\vec{S}$ <u>teorema de Poynting</u>

(conservación de la energía e.m. en el vacío)

En forma integral (integrando sobre el volumen) : $\boxed{\frac{\partial}{\partial t}U_{em}=\int dV\,\vec{\nabla}\cdot\vec{S}=\Phi_{\vec{S}}}$

→ la variación de energía electromagnética (en el vacío) es igual al flujo del vector de Poynting

$\vec{k}\,//\,\vec{S}$ ⇨ Una onda e.m. transporta energía en la dirección de propagación

El valor medio del módulo del vector de Poynting se llama **irradiancia (*I*)** y es igual a la <u>energía que fluye a través de un área por unidad de tiempo y superficie</u>.

Para una onda e.m. monocromática (o sea armónica) es: $\langle S\rangle=\frac{\langle EB\rangle}{\mu_0}=\frac{\langle E^2\rangle}{\mu_0 c}=\boxed{\frac{1}{2}\varepsilon_0 cE_0^2=I}$

Tipos de luz e interacción luz-materia

- 1887: Hertz genera y detecta ondas e.m. en el laboratorio (antenas)
- 1875-1895: descubrimiento de los rayos X (y luego gamma)
- 1896: invención de la radio; primeras "fotos" con rayos X

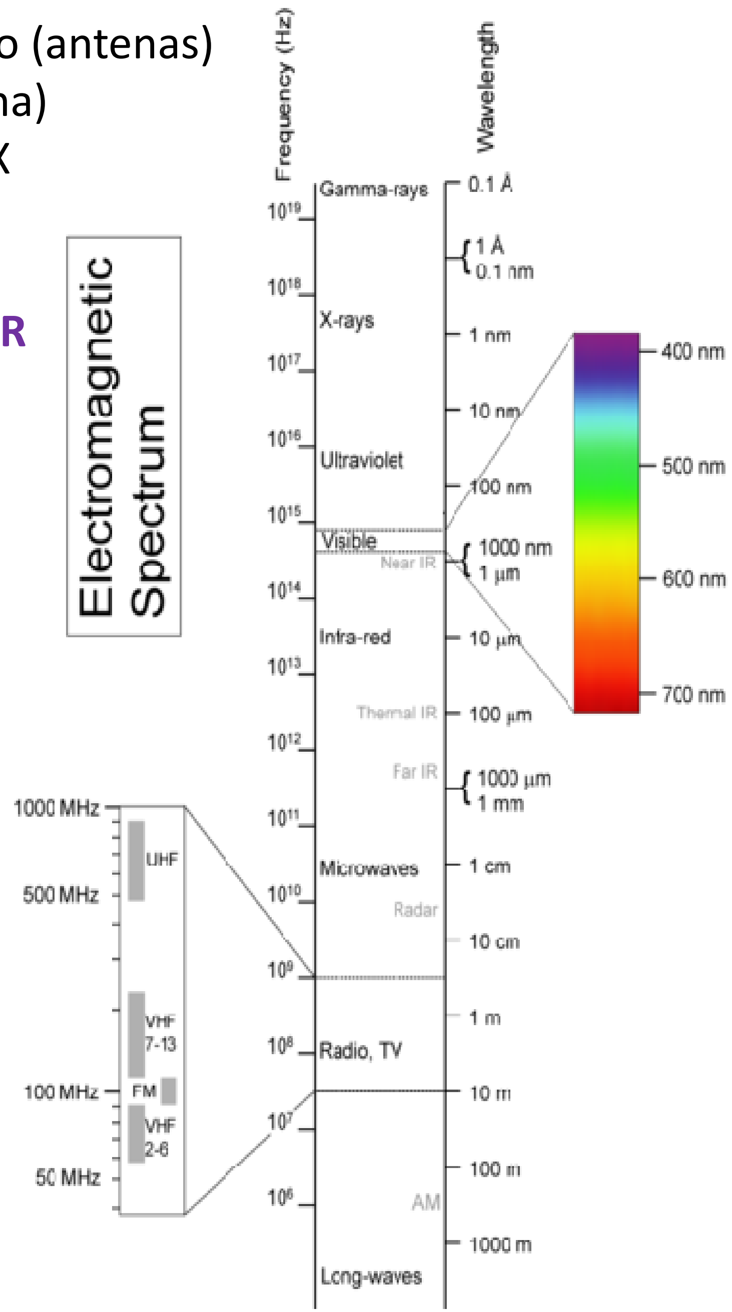
→ Espectro electromagnético

velocidad c , ondas armónicas: $\lambda\, \nu = c$

la frecuencia/longitud de onda están asociadas con el **COLOR**

- Siglo XIX: descubrimiento que la luz emitida por un gas está formada de pocos colores
- 1901: Planck introduce la cuantización de la energía de las ondas e.m. para explicar la radiación térmica
- 1905: Einstein explica el efecto fotoeléctrico asociando a la radiación e.m. de frecuencia ν una energía $E = h\nu$ donde $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J s se llama constante de Planck
- 1920-1960: desarrollo de la teoría cuántica
- 1960: invención del láser

LUZ = campo electromagnético variable en el tiempo (onda e.m.), generado por el movimiento de cargas eléctricas, que es emitido u adsorbido en <u>paquetes discretos de energía</u>



1-17, 1-23

1-7,1-15,1-22

La matemática de las ondas (TEMA 2)

Números complejos: un "juego" matemático muy útil

Sabemos que la solución de $ax^2+bx+c=0$ es $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Esta solución funciona si $b^2-4ac\geq 0$, porque si no, no sabemos sacar la raíz. P. ej. para las ecuaciones $\frac{1}{2}x^2-x+1=0$, o $x^2+4=0$ no existe solución. Aún así, "formalmente" se podrían aceptar las soluciones simbólicas $x_{1,2}=1\pm\sqrt{-1}$ o $x_{1,2}=\pm 2\sqrt{-1}$, ya que p.ej. : $x=2\sqrt{-1}$ $\Rightarrow x_1^2=4\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=4\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=4\sqrt{1}=4$

e igualmente $x_1=1+\sqrt{-1}$ $\Rightarrow \frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{-1}\right)^2=\frac{1}{2}\left(1^2+\left(\sqrt{-1}\right)^2+2\sqrt{-1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-1+2\sqrt{-1}\right)=\sqrt{-1}$

(así que efectivamente es $\frac{1}{2}x_1^2-x_1+1=0$). **Se utiliza el símbolo i para indicar $\sqrt{-1}$**

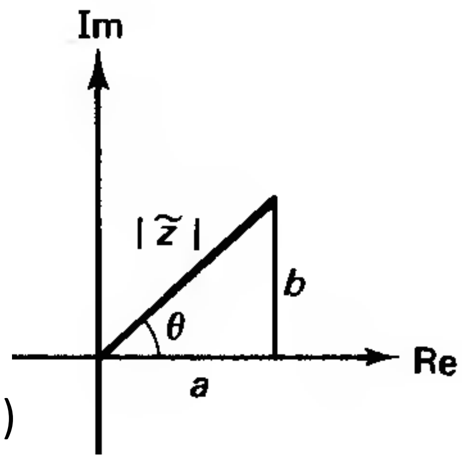
Si aceptamos como válidos números de la forma $a+ib=a+b\sqrt{-1}$, entonces el problema que con números reales $x^2+1=0$ no tenía solución, ahora sí la tiene: estamos preguntando si existe un número $a+ib$ tal que $(a+ib)^2=-1=-1+0i$ (de hecho hay dos, $+i$ y $-i$)

Un número de la forma $z=a+ib$, con $i=\sqrt{-1}$ (o $i^2=-1$) se llama

número complejo : $\boxed{z=a+ib}$

$a=\mathrm{Re}\{z\}$ parte "real" de z

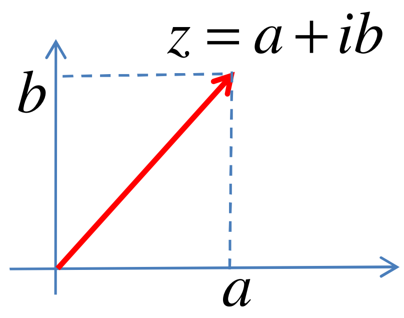
$b=\mathrm{Im}\{z\}$ parte "imaginaria" de z



z se puede representar como vector 2D en el "plano complejo"
(tal como un número real se puede representar como punto de una recta)
También se puede pensar y definir z como el par ordenado (a, b)

Del (vector o par ordenado) z podemos definir el módulo $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$
y la dirección:

$$\hat{z} = \frac{z}{|z|} = \frac{a+ib}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\theta + i\sin\theta$$



la representación gráfica de *z* se llama "fasor"

Dado el número complejo $z = a + ib$, se define su "conjugado" como: $z^* = a - ib$

Dos números complejos se pueden sumar y multiplicar:

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$$
$$(a+ib)\cdot(c+id) = (ac-bd)+i(bc+ad) \qquad (i^2=-1)$$

Podemos entonces también elevar a potencia y sacar raíces (en este último caso la operación no es unívoca (p.ej., existen 2 raíces complejas de -1, como existen dos soluciones reales de $x^2=9$).
Además podemos definir funciones. La única que nos hará falta es la

función exponencial compleja: $\boxed{e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib}}$

Si *z* es real (*b*=0, *z*=*a*), esto es igual a la función exponencial real e^a. Para *z* imaginario (*a*=0, *z*=*ib*)

vale la **identidad de Euler** : $\boxed{e^{ib} = \cos b + i\sin b}$

2-2,2-3 **2-4,2-5**

La identidad de Euler es una relación sorprendente entre exponencial (complejo) y funciones sinusoidales. Para demostrarla, escribimos $q = \cos b + i\sin b$ y tomamos el diferencial (derivamos):

$dq = -\sin b\,db + i\cos b\,db = i\left(\cos b + i\sin b\right)db = iq\,db$, o sea: $\dfrac{dq}{q} = i\,db$. Integrando pues: $q = e^{ib}$

Esto implica que un número complejo puede escribirse como $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta}$

Un número complejo de módulo 1, de la forma $\hat{z} = e^{i\theta}$, es una "dirección" en el plano complejo

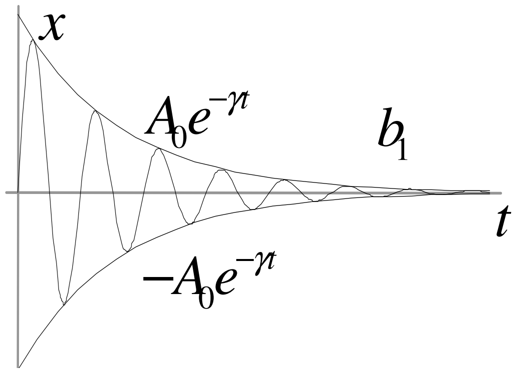
<u>Notación compleja</u>. Veamos ahora la utilidad del exponencial complejo. En mecánica y electromagnetismo encontramos ecuaciones diferenciales lineares de la forma $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$
Con lo que sabemos sobre números complejos, ya podemos resolver esta ecuación. Buscamos soluciones del estilo: $x(t) = Ae^{\kappa t}$. Esto nos da $\dot{x}(t) = A\kappa e^{\kappa t}$ y $\ddot{x}(t) = A\kappa^2 e^{\kappa t}$

Substituyendo en la ecuación diferencial: $Ae^{\kappa t}\kappa^2 + 2\gamma Ae^{\kappa t}\kappa + \omega_0^2 Ae^{\kappa t} = 0$
y simplificando el término $Ae^{\kappa t}$ obtenemos $\kappa^2 + 2\gamma\kappa + \omega_0^2 = 0$

Las soluciones para κ son: $\kappa_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm \beta$
Si $\gamma > \omega_0$ → β es real y se tiene la solución "sobre-amortiguada": $x(t) = A_1 e^{-(\gamma-\beta)t} + A_2 e^{-(\gamma+\beta)t}$

Si $\gamma < \omega_0$ → β es imaginario y poniendo $\beta = i\omega$ encontramos:
$x_1(t) = A_1 e^{-(\gamma - i\omega)t} = A_1 e^{-\gamma t} e^{i\omega t} = A_1 e^{-\gamma t}(\cos\omega t + i\sin\omega t)$

Tomando la parte real de esta solución compleja,
se obtiene una solución "sub-amortiguada" $x_1(t) = A_1 e^{-\gamma t}\cos\omega t$ →



Con la notación compleja, no sólo podemos encontrar soluciones a ecuaciones de oscilaciones u ondas, sino hacer cálculos de forma sencilla con las funciones sinusoidales.

2-6 Calcula la suma : cosθ + cos(θ + α) .
Con la notación compleja, esta cantidad es la parte real de ψ = exp(iθ) + exp[i(θ+α)]

$$\tilde{\psi} = \exp(i\theta) + \exp[i(\theta+\alpha)] = \exp(i\theta)[1+\exp(i\alpha)] \quad = \exp(i\theta)\exp(i\alpha/2)[\exp(-i\alpha/2)+\exp(i\alpha/2)] \quad = \exp[i(\theta+\alpha/2)]2\cos(\alpha/2).$$

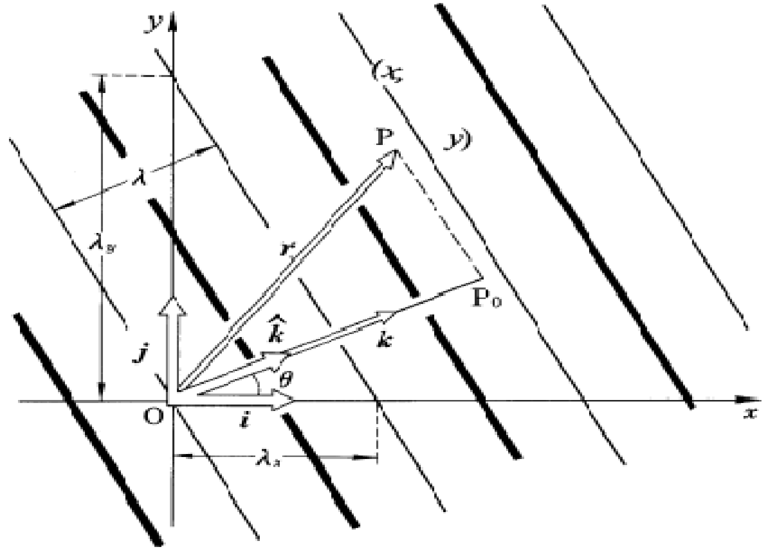
Por tanto cosθ + cos(θ + α) = Re[ψ] = 2cos(α/2)cos(α/2 + θ)

2-7

Ondas planas en 3D

Tomemos una onda plana que se propaga en la dirección $\hat{k}$ respecto al sistema de referencia, de modo que los frentes de onda son rectas orientadas como dibujado. Un punto P de la onda, de coordenadas ***r*** = (x,y) tiene la misma fase que todos los puntos de la recta paralela a un frente de onda que pasa por P. En particular la fase en P es igual a la fase en P_0 , que está sobre la recta que sale del origen con dirección $\hat{k}$. Si la fase en el origen vale φ_0 , la fase en P_0 es:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\overline{\mathrm{OP}_0} + \varphi_0$$



siendo λ la longitud de onda. El segmento $\overline{\mathrm{OP}_0}$ es la proyección de ***r*** sobre $\hat{k}$, y puede ser escrito como producto escalar entre estos dos vectores. Así $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0$

Definiendo el **vector de onda** como $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{k}$,

se tiene pues $\varphi = \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0$

Por tanto la ec. de una onda plana en cualquier punto del espacio es (la parte real de):

$$\boxed{\boldsymbol{E}(x, y, z) = \boldsymbol{E}_0(x, y, z)\exp[\mathrm{j}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \phi_0)]}$$

Onda plana (en 3D)

La dirección del vector $\vec{E}_0$ se llama dirección de polarización.
Tal onda se propaga con velocidad "de fase" $v_f = \omega/k$, siendo *k* el módulo del vector de onda

NOTA! Debido a que cos(α) = cos(–α), la parte real de una onda compleja no cambia si el exponente (fase total) se cambia de signo. Por convención se pone siempre el signo – delante de ω

2-10,2-15 **2-11,2-13**

Ondas esféricas

Una fuente puntual genera una onda esférica. Cualquier fuente se puede considerar formada por un conjunto de fuentes puntuales $\Rightarrow$ las ondas esféricas juegan un papel importante en óptica.

Consideremos una fuente puntual oscila con dependencia temporal harmónica: $e^{-j\omega t}$
La onda emanada tarda un tiempo r/c para llegar a una superficie esférica de radio r alrededor de la fuente. La fase en todo punto de la superficie esférica al tiempo t es la misma que la de la fuente al tiempo t – r/c, y la intensidad es la misma en cada punto de la esfera.
El campo en la superficie esférica vale pues $E(t,r) = E(r)e^{-j\omega(t-r/v)} = E(r)e^{-j\omega t+jkr}$
Aquí hemos utilizado la definición del vector de onda $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$

Para determinar el valor de *E*(*r*) . Para ello, consideremos la potencia W emitida por la fuente. Por la conservación de la energía, la potencia que atraviesa una esfera alrededor de la fuente es independiente del radio, así que $4\pi r^2\varepsilon|E(r)|^2 v = W$ y por lo tanto: $E(r) = \frac{E_0}{r}$
siendo E_0 el campo a una distancia de 1 metro de la fuente.
Obtenemos así:

$$\boxed{E(t,r) = \frac{E_0}{r}e^{-j(\omega t-kr)}}$$

Onda esférica

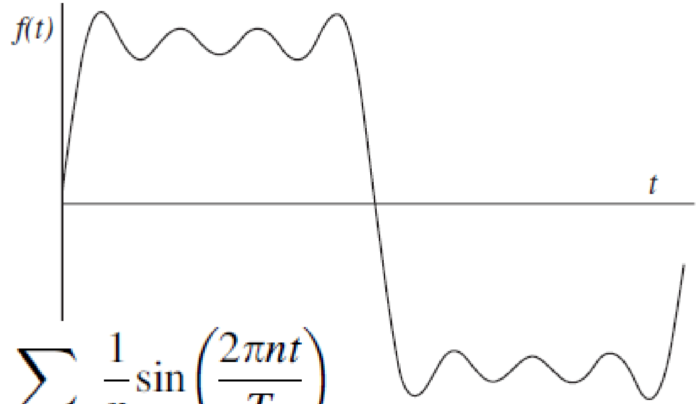
No hemos especificado la dirección del campo E, pero a menudo no hace falta. Una fuente puntual como un filamento pequeño (a distancia suficiente) *no tienen coherencia temporal* :
la fase y la polarización de la luz emitida varían rápidamente (en un tiempo inferior a 10^{-9} s), así que no tiene sentido hablar de una dirección de polarización (hay fuentes puntuales coherentes, p. ej. antenas pequeñas, como veremos en detalle más adelante)

Serie de Fourier real y compleja

Cualquier onda periódica se puede escribir como suma de ondas armónicas (síntesis de Fourier):

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\right) \quad \text{con } \omega_0 = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \quad \text{y}:$$

$$a_n = \frac{2}{\mathrm{T}}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \;, \quad b_n = \frac{2}{\mathrm{T}}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$$



P. ej. en el caso de una onda cuadrada, la suma de tan sólo los primeros 3 términos es suficiente para obtener el perfil aproximado de la onda!

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

Se puede hacer lo mismo en notación compleja, sólo que aparecen peculiaridades matemáticas. La frecuencia o pulsación de una onda es siempre positiva. Sin embargo, en notación compleja necesitamos introducir frecuencias auxiliares negativas y los coeficientes son en general complejos. Ejemplo:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) \quad ;\text{o también}: \quad \sin(\omega t) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$$

Más en general, cualquier onda periódica de periodo T puede expresarse como <u>serie de Fourier compleja</u> :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad \text{con } \omega_0 = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \quad \text{y} \quad c_n = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega_0 t}\,dt$$

(el factor 1/T es de normalización, como se ve considerando el caso $f(t) = e^{i\omega_0 t} \rightarrow c_1 = 1$).
Las frecuencias que aparecen en el desarrollo en serie de Fourier de una función periódica forman su **espectro de frecuencias** . Los coeficientes complejos permiten tener en cuenta del desfase relativo entre las componentes armónicas (fase compleja del coeficiente = desfase).

Trasformada de Fourier

Se puede hacer algo parecido a una suma de Fourier también con una función no periódica (pero finita y limitada): una tal función resulta en general de la suma de un conjunto continuo de frecuencias, que no son múltiples de una frecuencia fundamental. La generalización de la serie de Fourier al caso continuo es simplemente:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega)\exp(\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}\omega$$

El espectro de frecuencias es dado por la función amplitud (compleja) $A(\omega)$.

Interpretación: las componentes en frecuencia de una onda oscilan con períodos distintos.

Supongamos que la onda sea la suma de componentes de frecuencia ω_1, ω_2, ω_3, … :

$$f(t) = A + Be^{-i\omega_1 t} + Ce^{-i\omega_2 t} + De^{-i\omega_3 t} + \ldots$$

Cuando multiplicamos la onda por el factor exp($i\omega_1 t$) , la componente a frecuencia ω_1 (y sólo ella) “deja de oscilar”, de forma que cuando integramos en el tiempo (que es como promediar en el tiempo), sólo esta componente dará una contribución distinta de cero mientras las demás, que siguen oscilando, dan una contribución promedia nula. Así, la integración que nos da cada coeficiente c_n o la amplitud $A(\omega)$ es equivalente a seleccionar la componente de la onda que oscila a una frecuencia determinada (la serie de Fourier se puede considerar como un caso especial de transformada de Fourier). Se demuestra que si la función f(t) es real, $A(-\omega) = A^*(\omega)$, y viceversa. Por lo tanto toda la información sobre el espectro de frecuencia de un pulso (real) ya está contenida en la parte de frecuencias positivas.

La relación entre una función f(t) y su espectro en frecuencia $F(\nu)$ es, en general, dada por los integrales:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)\exp(2\pi\mathrm{i}\nu t)\mathrm{d}\nu,\ \ f(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-2\pi\mathrm{i}\nu\mathrm{t})\ \mathrm{dt}$$

Ejemplos de transformadas de Fourier

Puede calcularse la transformada de Fourier de un pulso temporal (→ espectro de frecuencias temporales ω) o de un perfil espacial (→ frecuencias "espaciales", indicadas con k)

2-18 Calcula el espectro de frecuencias de un pulso $g(t)$ rectangular dado por:

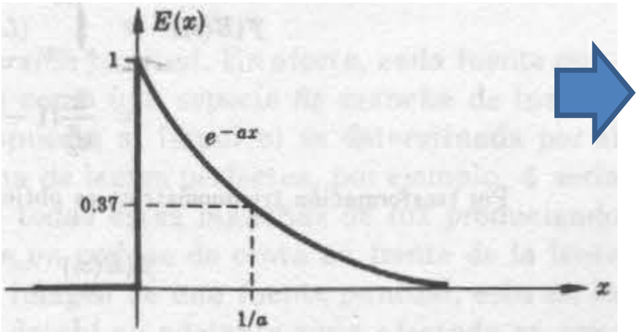
$$\begin{cases} g(t) = h \text{ for } \left(-\frac{1}{2}b < t < +\frac{1}{2}b\right) \\ g(t) = 0 \text{ elsewhere.} \end{cases}$$

$$G(\nu) = \int_{-b/2}^{+b/2} h \exp(-2\pi i\nu t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{h}{2\pi i\nu}\left[\exp\left(+2\pi i\nu\frac{b}{2}\right) - \exp\left(-2\pi i\nu\frac{b}{2}\right)\right]$$

$$= hb\frac{\sin\psi}{\psi} = hb \operatorname{sinc}\psi, \quad \text{where} \quad \psi = \pi\nu b.$$

2-22 $E(x) = U(x)e^{-ax}$

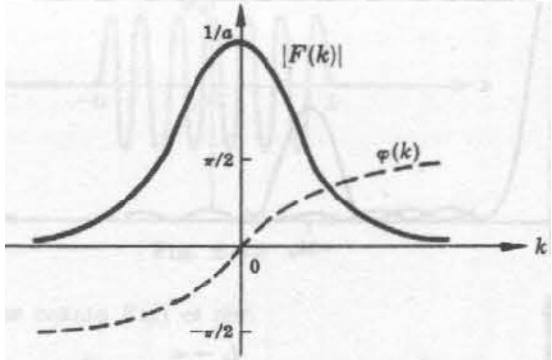


$$\mathcal{F}\{E(x)\} = \int_0^\infty e^{-ax}e^{ikx}\,dx = \int_0^\infty e^{-(a-ik)x}\,dx = \left[-\frac{1}{a-ik}e^{-(a-ik)x}\right]_0^\infty = \frac{1}{a-ik}$$

$$F(k) = \frac{a+ik}{(a-ik)(a+ik)} = \frac{a}{a^2+k^2} + i\frac{k}{a^2+k^2}$$

$$|F(k)|^2 = \left(\frac{a}{a^2+k^2}\right)^2 + \left(\frac{k}{a^2+k^2}\right)^2$$

$$\tan\varphi(k) = \left(\frac{k}{a^2+k^2}\right)\Big/\left(\frac{a}{a^2+k^2}\right)$$



Destello (pulso) con decaimiento exponencial

Módulo de F(k) = peso relativo de cada componente de frecuencia
Fase de F(k) = desfasamiento relativo de cada componente

2-19,2-21,2-23

Interferencia (espacial y temporal)

INTERFERENCIA = superposición de dos o más ondas ←→ suma vectorial de E (y B)

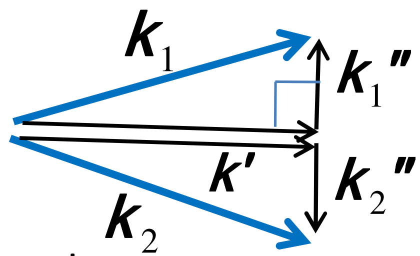
2 tipos
- 1) ESPACIAL   ondas de la misma frecuencia
- 2) TEMPORAL   ondas de frecuencia ligeramente diferente

2-25

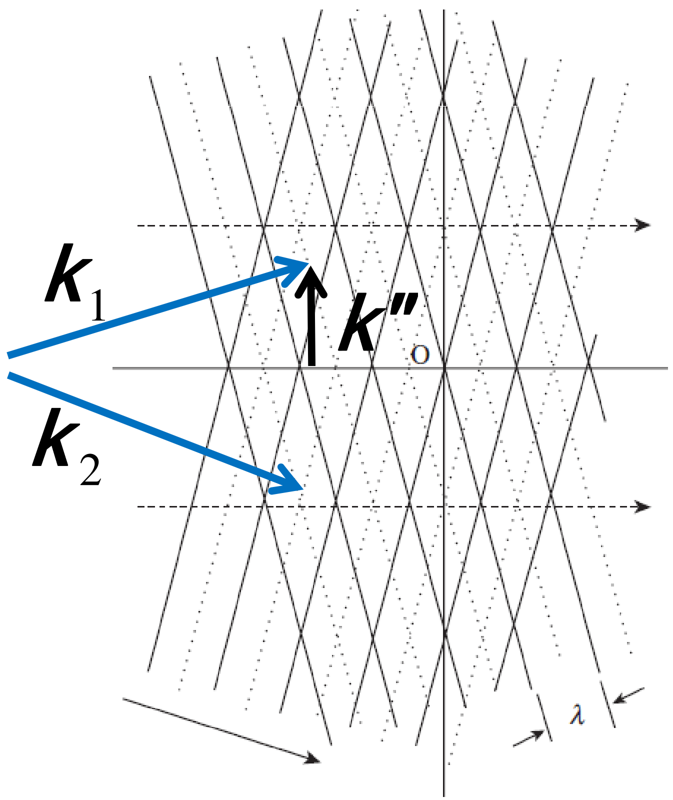
CASO 1(a): dos ondas planas de misma frecuencia y polarización, pero distinta dirección (y fase)

$$E_1 = E_0 \exp[\mathrm{j}(\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r} + \phi_1 - \omega t)]$$
$$E_2 = E_0 \exp[\mathrm{j}(\boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{r} + \phi_2 - \omega t)].$$

Definiendo los vectores:



$$\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{k}_1' + \boldsymbol{k}_1'', \qquad \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{k}_2' + \boldsymbol{k}_2'',$$
$$\boldsymbol{k}_1' = \boldsymbol{k}_2' = \boldsymbol{k}', \qquad \boldsymbol{k}_1'' = -\boldsymbol{k}_2'' = \boldsymbol{k}_2''.$$



el campo total $E = E_1 + E_2$ vale:

$$E = \underbrace{2E_0 \cos(\boldsymbol{k}'' \cdot \boldsymbol{r} + \Delta\phi)}_{\text{amplitude}} \underbrace{e^{\mathrm{j}(\boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{r} + \phi - \omega t)}}_{\text{phase}},$$

con:

$$\phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}, \qquad \Delta\phi = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}.$$

La amplitud no depende del tiempo. El coseno se anula en todos los puntos **r** en que:

$$\boldsymbol{k}'' \cdot \boldsymbol{r} + \Delta\phi = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

estos puntos forman las **franjas de interferencia** (flechas discontinuas)

La existencia de tal patrón de interferencia sólo depende de de que hayan <u>componentes antiparalelas</u> de los vectores **k**

Ondas estacionarias

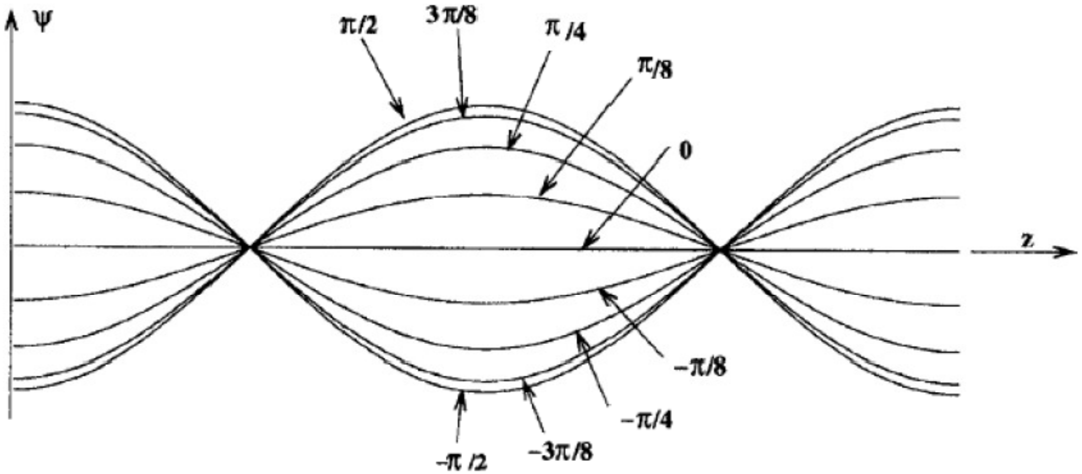
Caso 1(b): si dos ondas de la misma frecuencia se propagan en direcciones opuestas, se obtiene una onda estacionaria. Si 2 ondas de la misma amplitud se propagan una en la dirección positiva del eje z (+z), y la otra en –z, su suma es: $\psi = A\cos(kz - \omega t) + A\cos(-kz - \omega t)$

Con la ayuda de la notación compleja, se encuentra que la onda resultante tiene la expresión:

$$\begin{aligned}\tilde{\psi} &= A\exp(-i\omega t)[\exp(-ikz) + \exp(ikz)] \\ &= 2A\cos kz\exp(-i\omega t).\end{aligned}$$

→ 2-26

Mientras las ondas iniciales tienen amplitud A, su suma (que es una onda estacionaria y no depende de z – vt) tiene una amplitud dependiente de la posición $2A\cos kz$. Aquí abajo se ven “instantáneas” de la onda estacionaria, en instantes separados por intervalos de tiempo de 1/16 del periodo:



2-27, 2-28

Ondas electromagnéticas estacionarias se dan cerca de superficies reflectoras, p. ej. Entre dos espejos planos paralelos. Esta configuración de dos espejo paralelos es tan importante en óptica que tiene nombre propio: se le llama **cavidad Fabry-Perot** . Además de tener otras aplicaciones importantes en interferometría y espectroscopia, es un elemento constitutivo del láser.

EXTRA: cavidades Fabry-Perot y estructuras análogas

Si tomamos dos espejos planos paralelos en aire, la luz entre los espejos será reflejadas muchas veces ante de perder intensidad debido a la atenuación en aire o a la imperfección de los espejos. En general, para una periodo/frecuencia cualquiera del la onda e.m., la superposición de todas estas ondas de la misma frecuencia pero fase distinta será destructiva: en cada punto llegan reflexiones con fase arbitraria que se anularan mutuamente. Una onda de dicha frecuencia simplemente no puede existir, entre los dos espejos: si por ejemplo colocamos una fuente puntual de tal frecuencia entre los espejos, la fuente no puede irradiar en la dirección ortogonal a los espejos.

Si por otro lado la separación entre espejos L es igual a un múltiplo del periodo, las ondas reflejadas se solaparan perfectamente a la onda inicial; la frecuencia correspondiente si que puede propagarse.

Para describir las propiedades de una cavidad Fabry-Perot de longitud L, considérese la solución de las ecuaciones de Maxwell con dirección de propagación ortogonal a los espejos metálicos. Sabemos que en tal caso los campo E y B son paralelos a los espejos. Sin embargo, el campo eléctrico dentro de un metal tiene que ser nulo; esto implica que E es cero en la superficie y dentro los dos espejos. Es decir: $E=0$ para $z = 0$ y $z = L$. Las únicas ondas (estacionarias) armónicas (sinusoidales) que respetan esta condición se escriben

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 \sin(k_n z) e^{-i\omega_n t} \quad , \quad k_n = n\frac{\pi}{L} \quad , \quad \omega_n = ck_n$$

Estas ondas se llaman MODOS de la cavidad

Caso (2): interferencia temporal: batidos y **velocidad de grupo**

Consideremos ahora la suma de ondas de distinta frecuencia. Tomemos una onda de pulsación $\omega + \Delta\omega/2$, y la otra $\omega - \Delta\omega/2$, ambas de amplitud *a*. Su patrono de interferencia (suma) vale:

$$y = a\exp\left\{i\left[\left(\omega+\frac{\Delta\omega}{2}\right)t-\left(k+\frac{\Delta k}{2}\right)x\right]\right\}+a\exp\left\{i\left[\left(\omega-\frac{\Delta\omega}{2}\right)t-\left(k-\frac{\Delta k}{2}\right)x\right]\right. = a\exp[i(\omega t-kx)]\left\{\exp\left[i\left(\frac{\Delta\omega t}{2}-\frac{\Delta k x}{2}\right)\right]+\left[\exp -i\left(\frac{\Delta\omega t}{2}-\frac{\Delta k x}{2}\right)\right]\right\}$$

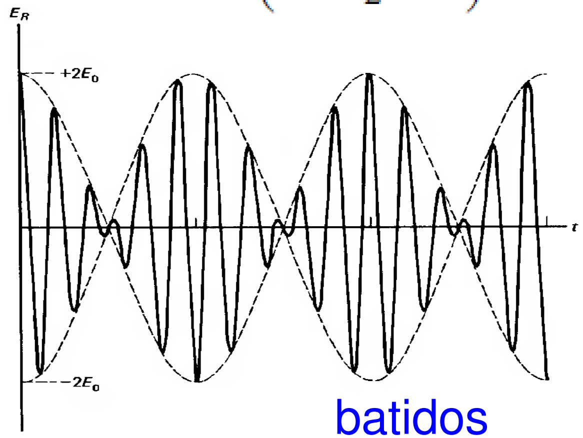
$$= 2ia\sin\left(\frac{\Delta\omega t-\Delta k x}{2}\right)\exp[i(\omega t-kx)]$$

Tomando la parte real: $y_{\mathrm{real}} = -2a\sin\left(\frac{\Delta\omega t-\Delta k x}{2}\right)\sin(\omega t-kx)$

El patrono es una onda de frecuencia ω modulada en amplitud por el factor $\sin\left(\frac{\Delta\omega t-\Delta k x}{2}\right)$

Una onda monocromática de frecuencia ω se propaga a la velocidad $v = \omega/k = c$. La modulación tipo "batidos" se desplaza con velocidad distinta: la modulación presente al tiempo t=0 en el origen es la misma a distancia $1/\Delta k$ al tiempo $1/\Delta\omega$. La velocidad con que se propaga la modulación es por tanto: $v_g = \Delta\omega/\Delta k$, llamada ***velocidad de grupo***.

En el limite $\Delta\omega \to 0$, se tiene: $\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk}}$



batidos

En la realidad no existen ondas armónicas infinitas; las ondas reales siempre están limitadas en el tiempo, es decir, tienen una ancho de banda no nulo. Toda onda e.m. es un "paquete" de ondas de distinta frecuencia, que no se propaga a la "velocidad de fase" $v_f = \omega/k = c/n$, sino con velocidad

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv_f)}{dk} = v_f + k\frac{d(v_f)}{dk}$$

En el espacio vacío, la velocidad de fase no depende de k $\Rightarrow$ la velocidad de grupo es igual a la de fase. (Veremos que en un medio material la velocidad de fase sí depende de la frecuencia: ondas armónicas de frecuencia distinta se propagan con diferente velocidad, y por tanto $v_g \neq v_f$)

Difracción

Ocurre difracción cuando una porción de la superficie de fase constante se obstruye de alguna manera, o sea cuando una región del frente de onda se altera en forma (en amplitud y/o en fase)
El término se utiliza en al menos tres contextos:
1) cuando la onda interactúa con medios materiales que bloquean parcialmente su paso. Un ejemplo es lo que ocurre a las olas del mar cuando llegan a los rompeolas cerca de un puerto
2) cuando la longitud de onda de la luz es comparable con el tamaño de los componentes (átomos o moléculas, pero también dominios o granos) del material con que interactúa; p. ej. en el caso de los rayos X, éstos pueden difractar de los átomos de un material, y darnos información sobre la morfología del mismo. En este caso la "difracción" es, para una onda, el equivalente de un choque para una partícula o sólido
3) cuando una onda se ensancha debido a su propagación (incluso en el espacio vacio!) :
- un haz láser aunque salga muy colimado del láser se ensancha (pensad a las caras verdes de los futbolistas cuando los hinchas contrarios apuntan a sus ojos con punteros láseres..)
- se puede focalizar la luz, pero al otro lado del foco el haz vuelve a ensancharse
- incluso con una lente perfecta, cuando se quiere focalizar un haz lumínico en un punto, nunca se logra conseguirlo: existe un tamaño mínimo de la onda, dado aproximativamente por la longitud de onda de la misma, por debajo del cual no es posible focalizar más (o casi…). Se habla en este caso de "límite de difracción"

En definitiva, la difracción es una propiedad que define la naturaleza de las ondas tanto cuanto la interferencia. Veremos la descripción matemática de los casos 1) y 3) (se utiliza la transformada de Fourier !!) y sus consecuencias en la 2ª mitad de la asignatura.